Vorstudienlehrgang der Wiener Universitäten VWU

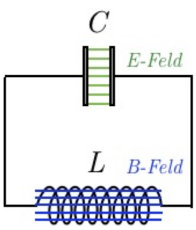
Skriptum

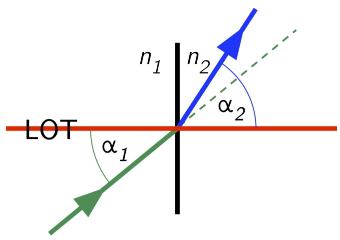
Physik-Kurs

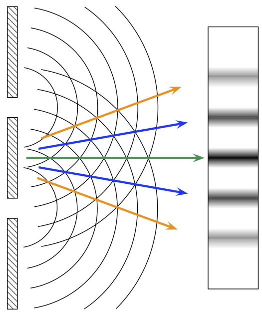
Abschnitt 6: Elektromagnetische Strahlung, Optik, ausgewählte Gebiete der modernen Physik

Katharina Durstberger-Rennhofer

Version März 2020







Inhaltsverzeichnis

1 Der elektrische Schwingkreis

1.1 Der Zusammenhang zwischen Feldern und Energiedichte

Die allgemeine Definition der Energiedichte

Ähnlich wie es eine Massendichte $\rho = \frac{m}{V}$ (Masse pro Volumen) und eine Teilchendichte $\rho_N = \frac{N}{V}$ (Anzahl der Teilchen pro Volumen) gibt, kann man auch eine Energiedichte definieren.

Die Energiedichte ρ_E ist gegeben als die Energie ΔE pro Volumseinheit V

$$\rho_E = \frac{\Delta E}{V} \tag{1.1}$$

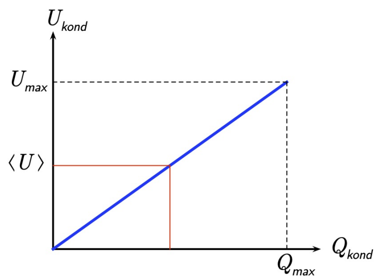
Einheit: $[\rho_E] = [\frac{\Delta E}{V}] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}$ Joul pro Kubikmeter

Die elektrische Energiedichte

Für die Erzeugung eines elektrischen Feldes E muss man Ladungen trennen. Das kostet Energie. Die Berechnung wollen wir an einem homogenen Kondensatorfeld durchführen.

Zur Wiederholung:

Ein Kondensator besteht aus zwei Platten mit jeweils der Fläche A, dem Plattenabstand d und der Plattenladung $\pm Q$.
Der Kondensator hat das elektrische Feld $E_{\text{kond}} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \cdot A}$ und die Spannung $U_{\text{kond}} = \frac{Q \cdot d}{\varepsilon_0 \cdot A}$.
Wenn der Kondensator geladen wird verändert sich die Ladung Q auf den Platten, und damit steigt auch die Spannung U zwischen den Platten proportional an (siehe Abbildung). Das muss man bei der Energieberechnung berücksichtigen, indem man mit der mittleren Spannung $\langle U \rangle$ (Mittelwert der Spannung) rechnet



$$\Delta E_{\text{el}} = \langle U_{\text{kond}} \rangle \cdot Q$$

Wir laden jetzt die Platten von $Q = 0$ bis Q_{max} auf und berechnen die dafür zugeführte Energie:

$$\Delta E_{\text{el}} = \langle U_{\text{kond}} \rangle \cdot Q_{\text{max}} = \frac{U_{\text{max}}}{2} \cdot Q_{\text{max}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_{\text{max}} \cdot d}{\varepsilon_0 \cdot A} \cdot Q_{\text{max}} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_{\text{max}} \cdot d}{\varepsilon_0 \cdot A} \cdot Q_{\text{max}} \cdot \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{\varepsilon_0 \cdot A} = \frac{E \cdot d \cdot E \cdot \varepsilon_0 \cdot A}{2} = \frac{E^2 \cdot \varepsilon_0 \cdot V}{2}$$

Der Mittelwert der Spannung ist gleich der Hälfte der Maximalspannung $\langle U_{\text{kond}} \rangle = \frac{1}{2} U_{\text{max}}$, da die Spannung linear ansteigt. Das Volumen des Kondensators $V = A \cdot d$ besteht aus der Plattenfläche A und dem Abstand d.
Die Energie ΔE_{el} wird für die Erzeugung des elektrischen Feldes benötigt und ist dann im elektrischen Feld gespeichert. Die gespeicherte Energie kann auch noch geschrieben werden als

$$\Delta E_{\text{el}} = \frac{E^2 \cdot \varepsilon_0 \cdot A \cdot d}{2} = \frac{C \cdot U^2}{2} \tag{1.2}$$

wobei $C = \frac{A \cdot \varepsilon_0}{d}$ und $U = E \cdot d$ ist. Die Energiedichte des elektrischen Feldes ist dann

$$\rho_{\text{el}} = \frac{\Delta E_{\text{el}}}{V} = \frac{E^2 \cdot \varepsilon_0}{2} \tag{1.3}$$

Dieses Ergebnis gilt allgemein für beliebige elektrische Felder E.

Beispiel (1.1)

Ein Kondensator besteht aus zwei kreisrunden Platten (12 cm Durchmesser), die einen Abstand von 10 mm aufweisen. Der Kondensator wird geladen, bis eine Spannung von 300 V auftritt.
a) Wie groß ist das elektrische Feld zwischen den Platten?
b) Berechnen Sie die Kapazität!
c) Berechnen Sie die Energiedichte des Kondensators!
d) Berechnen Sie die gesamte Energie, die im Kondensator gespeichert ist!

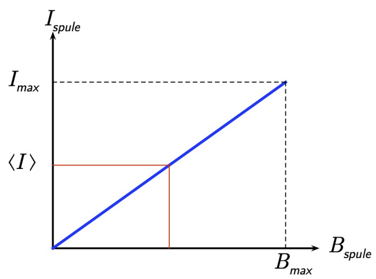
Lösung

a) Das elektrische Feld ergibt sich als $E = \frac{U}{d} = \frac{300}{0{,}01} = 3 \cdot 10^4$ N/C.
b) Die Fläche der Kondensatorplatten ist $A = r^2 \cdot \pi = 0,06^2 \cdot \pi = 1,13 \cdot 10^{-2}$ m^2.
Damit bekommt man für die Kapazität $C = \frac{A \cdot \varepsilon_0}{d} = \frac{1{,}13 \cdot 10^{-2} \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}}{0{,}01} = 1 \cdot 10^{-11}$ F $= 0,01$ nF.
c) Wir setzen in die Formel für die Energiedichte ein
$\rho_{\text{el}} = \frac{E^2 \cdot \varepsilon_0}{2} = \frac{(3 \cdot 10^4)^2 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}}{2} = 3,98 \cdot 10^{-3}$ J/m^3 $= 3,98$ mJ/m^3
d) Die gesamte Energie im Kondensator ist
$\Delta E_{\text{el}} = \rho_{\text{el}} \cdot V = \rho_{\text{el}} \cdot A \cdot d = 3,98 \cdot 10^{-3} \cdot 1,13 \cdot 10^{-2} \cdot 0,01 = 4,5 \cdot 10^{-7}$ J $= 0,45$ nJ oder
$\Delta E_{\text{el}} = \frac{C \cdot U^2}{2} = \frac{1 \cdot 10^{-11} \cdot 300^2}{2} = 4,5 \cdot 10^{-7}$ J $= 0,45$ nJ.

Die magnetische Energiedichte

Für die Erzeugung eines magnetischen Feldes B in einer Spule, braucht man elektrischen Strom. Das kostet Energie. Die Berechnung wollen wir an einem homogenen Feld einer Spule durchführen.

Zur Wiederholung:



Eine Spule mit Länge ℓ, Windungszahl N, Querschnittsfläche A und Spulenstrom I hat das Magnetfeld $B = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot N}{\ell}$. Die Spule wird durch die Selbstinduktivität $L = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot A}{\ell}$ beschrieben. Der Strom in der Spule kann auch als lineare Funktion des Magnetfeldes gesehen werden $I(B) = \frac{B \cdot \ell}{\mu_0 \cdot N}$.

Wir berechnen die benötigte Energie über die elektrische Leistung $P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = U \cdot I$, wobei wir berücksichtigen, dass aufgrund der Selbstinduktion der Spule auch beim Abschalten der externen Spannungsversorgung noch ein Strom fließt und wir daher die Induktionsspannung $U_{\text{ind}} = N \frac{\Delta \Phi}{\delta t} = N \cdot \frac{A \cdot \Delta B}{\Delta t}$ verwenden.

Wir schalten jetzt den Strom von $I = 0$ bis I_{max} ein und berechnen die Energie, die zum Aufbau des magnetischen Feldes B nötig ist

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{mag}} &= P \cdot \Delta t = U_{\text{ind}} \cdot \langle I \rangle \cdot \Delta t = N \cdot \frac{A \cdot \Delta B}{\Delta t} \cdot \frac{I_{\text{max}}}{2} \cdot \Delta t = \\ &= \frac{1}{2} \cdot N \cdot A \cdot B_{\text{max}} \cdot \frac{B_{\text{max}} \cdot \ell}{\mu_0 \cdot N} = \frac{B_{\text{max}}^2 \cdot A \cdot \ell}{2\,\mu_0} = \frac{B_{\text{max}}^2 \cdot V}{2\,\mu_0}\end{aligned}$$

Der Mittelwert des Stromes ist gleich der Hälfte des Maximalstromes $\langle I_{\text{spule}} \rangle = \frac{1}{2} I_{\max}$, da der Strom linear ansteigt. Die Änderung des Magnetfeldes ist gleich dem Maximalwert $\Delta B = B_{\max}$. Das Volumen der Spule $V = A \cdot \ell$ besteht aus der Querschnittsfläche A und der Länge ℓ.
Die Energie $\Delta E_{\text{mag}} = \frac{B^2 \cdot V}{2\mu_0}$ wird für den Aufbau des Magnetfeldes benötigt und ist im Magnetfeld gespeichert. Die gespeicherte Energie kann noch anders geschrieben werden

$$\Delta E_{\text{mag}} = \frac{B^2 \cdot V}{2\mu_0} = \frac{B^2 \cdot A \cdot \ell}{2\mu_0} = \frac{I^2 \cdot L}{2}$$

wobei $L = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot A}{\ell}$ und $I = \frac{B \cdot \ell}{\mu_0 \cdot N}$. Die Energiedichte des Magnetfeldes ist dann

$$\rho_{\text{mag}} = \frac{\Delta E_{\text{mag}}}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0} \tag{1.4}$$

Dieses Ergebnis gilt allgemein für beliebige magnetische Felder B.

Beispiel (1.2)

Eine Spule ($N = 5000$, $A = 20$ cm^2, $\ell = 50$ cm) wird von einem Strom $I = 5$ A durchflossen.
a) Berechnen Sie die magnetische Energiedichte der Spule!
b) Berechnen Sie die gesamte Energie, die in der Spule gespeichert ist!

Lösung

a) Die Induktivität der Spule ist $L = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot A}{\ell} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 5000^2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}}{0{,}5} = 0{,}1256$ H
Das magnetische Feld der Spule ist $B = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot N}{\ell} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 5000}{0{,}5} = 6{,}28 \cdot 10^{-2}$ T $= 62{,}8$ mT
Die Energiedichte der Spule ist $\rho_{\text{mag}} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{(6{,}28 \cdot 10^{-2})^2}{2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}} = 1569{,}2$ J/m^3
b) Die gesamte Energie in der Spule ist
$\Delta E_{\text{mag}} = \rho_{\text{mag}} \cdot V = \rho_{\text{mag}} \cdot A \cdot \ell = 1569{,}2 \cdot 20 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}5 = 1{,}57$ J oder
$\Delta E_{\text{mag}} = \frac{I^2 \cdot L}{2} = \frac{5^2 \cdot 0{,}1256}{2} = 1{,}57$ J

Zusammenfassung

Für die Erzeugung eines Feldes ist Energie nötig. Die Energie, die pro Volumeneinheit im Feld gespeichert ist, heißt Energiedichte.
Die Energiedichte eines Feldes ist immer proportional zum Quadrat des Feldes

elektrische Energiedichte:
$$\rho_{\text{el}} = \frac{E^2 \cdot \varepsilon_0}{2} \tag{1.5}$$

magnetische Energiedichte:
$$\rho_{\text{mag}} = \frac{B^2}{2\mu_0} \tag{1.6}$$

Die gesamte gespeicherte Energie in einem Kondensator ist gleich

$$\Delta E_{\text{el}} = \frac{E^2 \cdot \varepsilon_0 \cdot V}{2} = \frac{C \cdot U^2}{2} \tag{1.7}$$

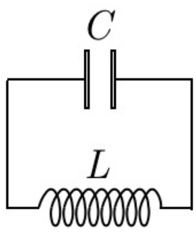
Die gesamte gespeicherte Energie in einer Spule ist gleich

$$\Delta E_{\text{mag}} = \frac{B^2 \cdot V}{2\mu_0} = \frac{L \cdot I^2}{2} \tag{1.8}$$

1.2 Der elektrische Schwingkreis

1.2.1 Der geschlossene Schwingkreis

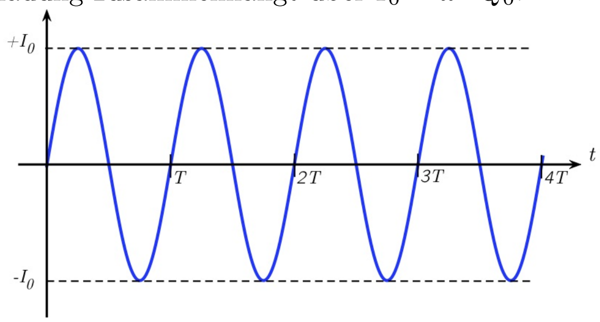
Eigenschaften des Schwingkreises:



- Es ist ein elektrischer (Wechsel-) Stromkreis (eine Schaltung) ohne Spannungsquelle. Es werden eine Kapazität C (Kondensator) und eine Induktivität L (Spule) in Serie geschaltet.
- Der Ohm'sche Widerstand im Schwingkreis ist fast gleich Null $R \approx 0$.
- Der Schwingkreis wird einmalig aufgeladen, indem man die Ladungen $\pm Q_0$ auf dem Kondensator aufbringt.
- Die elektrischen Ladungen bewegen sich von einer Platte des Kondensators zur anderen, indem sie dabei durch die Spule laufen. Es entsteht eine periodische Bewegung, die man elektrische Schwingung nennt.
- Im Kreis entsteht von selbst eine Wechselspannung und ein Wechselstrom mit der Frequenz f

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{1.9}$$

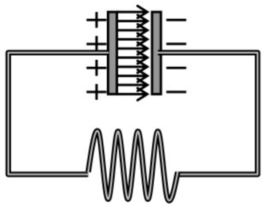
  wobei L für die Induktivität der Spule und C für die Kapazität des Kondensators stehen. Diese Gleichung heißt Thomson'sche Schwingungsgleichung.
- Beim elektrischen Schwingkreis wird Energie zwischen dem elektrischen Feld des Kondensators und dem magnetischen Feld der Spule periodisch ausgetauscht.
- Wenn der Schwingkreis keine Energieverluste hat, so folgt der Verlauf des Stromes im Schwingkreis einer Sinus-Kurve $I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$, wobei der Scheitelwert des Stromes mit der Anfangsladung zusammenhängt über $I_0 = \omega \cdot Q_0$.



Der elektrische Schwingkreis kann mit einer mechanischen Schwingung vergleichen werden, wie dem Fadenpendel oder dem Federpendel.

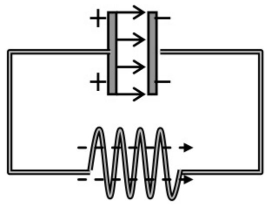
Die einzelnen Phasen der Schwingung

$t = 0$



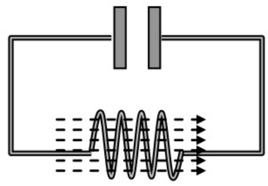
Der Kondensator ist voll geladen, die Ladung am Kondensator ist maximal. Das elektrische Feld ist auch maximal. Im Moment fließt kein Strom. Das Magnetfeld in der Spule ist gleich Null.

$t = \frac{T}{8}$



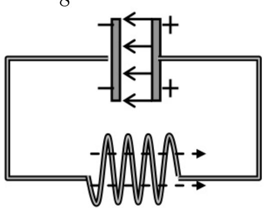
Da es keine Spannungsquelle gibt, beginnen die Ladungen vom Kondensator wegzufließen. Das el. Feld wird kleiner. Es beginnt ein Strom zu fließen. In der Spule entsteht ein Magnetfeld.

$t = \frac{T}{4}$



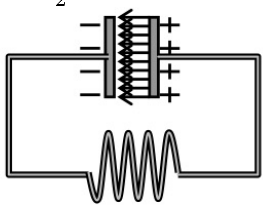
Der Kondensator ist leer, die Ladung ist Null. Das el. Feld ist Null. Der Strom hat jetzt seinen Maximalwert erreicht. Das Magnetfeld ist maximal.

$t = \frac{3T}{8}$



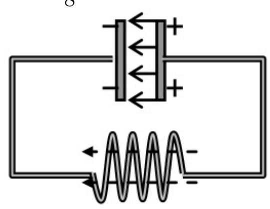
Die Ladungen bewegen sich weiter, sodass sich der Kondensator wieder mit entgegengesetztem Vorzeichen auflädt. Die Ladung steigt wieder. Der Strom wird kleiner und auch das Magnetfeld wird kleiner.

$t = \frac{T}{2}$



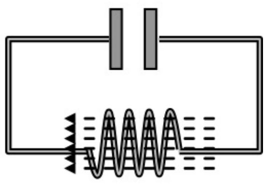
Der Kondensator ist jetzt wieder voll, aber entgegengesetzt geladen. Das el. Feld ist maximal. Es fließt im Moment kein Strom. Das Magnetfeld ist gleich Null.

$t = \frac{5T}{8}$



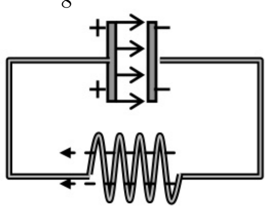
Die Ladungen fließen wieder vom Kondensator weg. Das el. Feld wird kleiner. Es fließt ein Strom, aber in die andere Richtung. In der Spule entsteht wieder ein Magnetfeld, aber in die andere Richtung.

$t = \frac{3T}{4}$



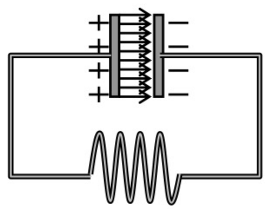
Der Kondensator ist leer, die Ladung ist Null. Das el. Feld ist Null. Der Strom hat seinen Maximalwert erreicht. Das Magnetfeld ist maximal.

$t = \frac{7T}{8}$



Die Ladungen bewegen sich zum Kondensator und laden ihn wieder auf. Das el. Feld nimmt zu und hat wieder die ursprüngliche Richtung. Der Strom und das Magnetfeld werden kleiner.

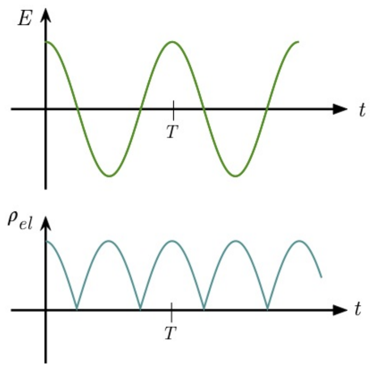
$t = T$



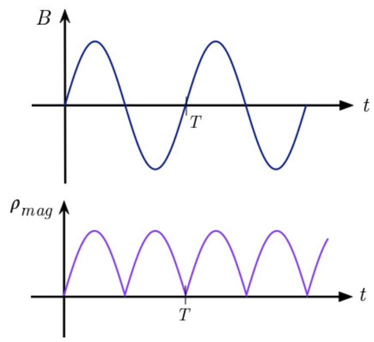
Der Kondensator ist wieder voll geladen. Der Strom und das Magnetfeld sind wieder Null. Eine volle Schwingung ist abgeschlossen.

Zeitliches Verhalten der Felder und Energiedichten

Der zeitliche Verlauf des E-Feldes entspricht einer Cosinus-Funktion. Darunter ist der zeitliche Verlauf der elektrischen Energiedichte dargestellt, $\rho_{\text{el}} \propto E^2$.



Der zeitliche Verlauf des B-Feldes entspricht einer Sinus-Funktion. Darunter ist der zeitliche Verlauf der magnetischen Energiedichte dargestellt, $\rho_{\text{mag}} \propto B^2$.



Ein elektrischer Schwingkreis besteht aus einer Spule (Induktivität L) und einem Kondensator (Kapazität C). Im geschlossenen Schwingkreis entsteht nach einmaliger Aufladung des Kondensators (= einmalige Energiezufuhr) von selbst eine Schwingung von elektrischen Ladungen (= Wechselstrom). Dabei verwandelt sich elektrische Feldenergie ρ_{el} in magnetische Feldenergie ρ_{mag} und umgekehrt. Die Frequenz der Schwingung heißt Resonanzfrequenz

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{1.10}$$

Herleitung der Frequenzformel:

Im sogenannten Resonanzfall gilt, dass die Größe des induktiven Widerstands gleich groß ist wie die Größe des kapazitiven Widerstands:

$$\begin{aligned}
R_L &= R_C \\
\omega \cdot L &= \frac{1}{\omega \cdot C} \\
\omega^2 &= \frac{1}{L \cdot C} \\
\omega &= \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \\
f &= \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}}
\end{aligned}$$

Beispiel (1.3)

Ein elektrischer Schwingkreis hat die Induktivität 0,1 H und eine variable Kapazität von $C_1 = 10\ \mu$F bis $C_2 = 1$ mF.

a) Berechnen Sie den Frequenzbereich, in dem man damit elektrische Schwingungen erzeugen kann!

b) Berechnen Sie die Größe der Kapazität, damit man Schwingungen mit 1 MHz zu erzeugen kann!

Lösung

a) Wir setzen in die Thomsonsche Formel ein:

$f_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C_1}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0{,}1 \cdot 10 \cdot 10^{-6}}} = 159,15$ Hz
$f_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C_2}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0{,}1 \cdot 1 \cdot 10^{-3}}} = 15,92$ Hz
Mit diesem Schwingkreis kann man Schwingungen von 15,9 Hz bis 159,2 Hz erzeugen.
b) Wir formen die Thomsonsche Formel um:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}}$$
$$C = \frac{1}{4 \cdot \pi^2 \cdot L \cdot f^2} = \frac{1}{4 \cdot \pi^2 \cdot 0,1 \cdot (1 \cdot 10^6)^2} = 2,53 \cdot 10^{-13}\ \text{F} = 0,25 \cdot 10^{-12} = 0,25\ \text{pF}$$

Die Kapazität muß 0,25 pF groß sein.

Beispiel (1.4)

Ein Schwingkreis ($L = 2$ H, $C = 7\,\mu$F) erzeugt elektrische Schwingungen. Die Gesamtenergie des Schwingkreises beträgt $E_{\text{ges}} = 49$ mJ.
a) Berechnen Sie die Schwingungsdauer des Schwingkreises!
b) Berechnen Sie die Anfangsspannung U_0 und die Anfangsladung Q_0 am Kondensator!
c) Berechnen Sie die maximale Stromstärke I_0 in der Spule!
d) Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Ladung $Q(t)$ und des Stromes $I(t)$!

Lösung

a) Die Frequenz ist $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2 \cdot 7 \cdot 10^{-6}}} = 42,54$ Hz
und die Schwingungsdauer ist $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{42{,}54} = 0,0235$ s.
b) Die Gesamtenergie entspricht der elektrischen Energie, die am Anfang im Kondensator gespeichert ist. Daraus kann man die Spannung am Kondensator berechnen

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{el}}(t = 0) = \frac{C \cdot U_0^2}{2}$$
$$U_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{\text{ges}}}{C}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 49 \cdot 10^{-3}}{7 \cdot 10^{-6}}} = 118,32\ \text{V}$$

und damit die Anfangsladung am Kondensator aus der Definition der Kapazität $C = \frac{Q_0}{U_0}$

$$Q_0 = C \cdot U_0 = 7 \cdot 10^{-6} \cdot 118,32 = 8,28 \cdot 10^{-4} = 828\ \mu\text{C}$$

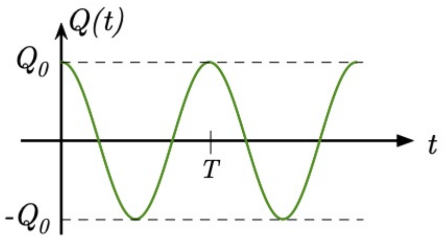
c) Die maximale Stromstärke kann man entweder aus der Energieumwandlung berechnen

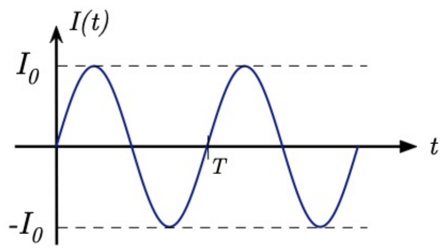
$$E_{\text{ges}} = E_{\text{mag}}(t = \frac{\pi}{4}) = \frac{L \cdot I_0^2}{2}$$
$$I_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{\text{ges}}}{L}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 49 \cdot 10^{-3}}{2}} = 0,22\ \text{A}$$

oder mit der Formel

$$I_0 = \omega \cdot Q_0 = 2\pi \cdot f \cdot Q_0 = 2\pi \cdot 42,54 \cdot 8,28 \cdot 10^{-4} = 0,22\ \text{A}$$

d) Die Ladung $Q(t)$ hat den gleichen Verlauf wie das elektrische Feld $E(t)$ und der Strom $I(t)$ hat den gleichen Verlauf wie das Magnetfeld $B(t)$.





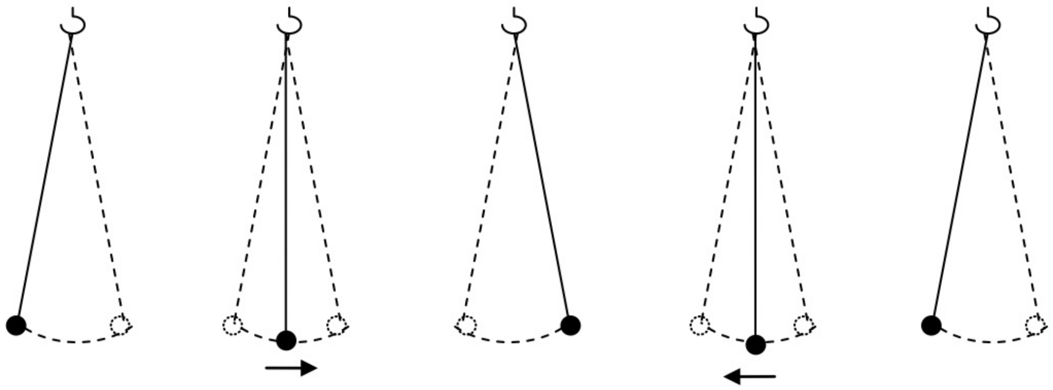
1.2.2 Ein mechanisches Analogon zum elektrischen Schwingkreis

Beim elektrischen Schwingkreis wandelt sich elektrische Energie in magnetische Energie um und umgekehrt. Das kann man vergleichen mit der Energieumwandlung beim Fadenpendel (mathematisches Pendel) oder beim Federpendel. Es wird periodisch potentielle Energie in kinetische Energie umgewandelt und wieder zurück. Die Frequenz dieser Schwingungen ist

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \qquad \text{bzw.} \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}$$

Das schwingende Pendel oder auch die schwingende mechanische Feder können als Analogon zum elektrischen Schwingkreis dienen.

Wir betrachten das Fadenpendel. Hier wird einmalig Energie zugeführt. Das Herausheben der Masse aus der Ruhelage in die Position der maximalen Auslenkung entspricht der Zufuhr von E_{pot}.



$t = 0$	$t = \frac{T}{4}$	$t = \frac{T}{2}$	$t = \frac{3T}{4}$	$t = T$
$E_{\text{kin}} = 0$	$E_{\text{kin}} = \max$	$E_{\text{kin}} = 0$	$E_{\text{kin}} = \max$	$E_{\text{kin}} = 0$
$E_{\text{pot}} = \max$	$E_{\text{pot}} = 0$	$E_{\text{pot}} = \max$	$E_{\text{pot}} = 0$	$E_{\text{pot}} = \max$

Das Pendel oder die Feder schwingen ohne Reibung ewig mit gleicher Amplitude. Mit Reibung wird die Schwingung gedämpft.

Beispiel (1.5)

An eine vertikal aufgehängte mechanische Feder wird ein Körper mit der Masse $m = 0,5$ kg gehängt. Dadurch wird die Feder um $\Delta x = 4$ cm gedehnt. Das System wird in Schwingungen versetzt.
a) Berechnen Sie die Federkonstante D und die Schwingungsdauer T des Federpendels!
b) Mit der gleichen Schwingungsdauer T soll ein elektromagnetischer Schwingkreis mit der Induktivität $L = 20$ H schwingen. Berechnen Sie die dazu erforderliche Kapazität!

Lösung

a) Wir berechnen die Federkonstante $D = \frac{F}{\Delta x} = \frac{m \cdot g}{\Delta x} = \frac{0,5 \cdot 10}{4 \cdot 10^{-2}} = 125$ N/m.
Die Frequenz des Federpendels beträgt $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{125}{0,5}} = 2,52$ Hz
und damit ist die Schwingungsdauer gleich $T = \frac{1}{f} = 0,40$ s

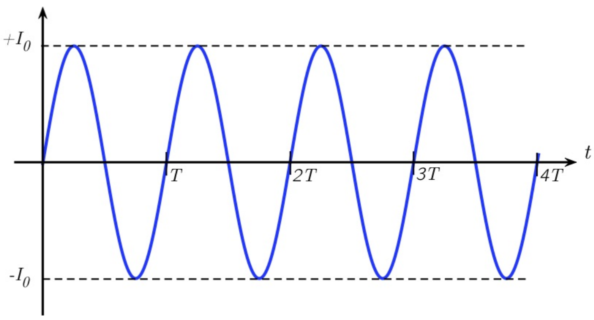
b) Wenn die Schwingungsdauern gleich sind, dann sind auch die Frequenzen gleich

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$
$$\sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$
$$C = \frac{m}{L \cdot D} = \frac{0,5}{20 \cdot 125} = 2 \cdot 10^{-4} = 200\ \mu\text{F}$$

1.2.3 Die Dämpfung von Schwingungen

Das Wort "Dämpfung"bedeutet Abnahme und Abschwächung. Wir betrachten hier die elektrischen Schwingungen im Schwingkreis und ihre zeitliche Abnahme. Dämpfung gibt es aber auch bei anderen Arten von Schwingungen (z.B. bei einer mechanischen Schwingung).

Die ungedämpfte Schwingung



Wenn ein Schwingkreis perfekt ist und keine Energie verloren geht, so dauert die Schwingung unendlich lange an.
Der zeitliche Verlauf des Stromes zeigt, dass der Strom immer wieder zum Ausgangwert I_0 zurück kehrt

$$I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

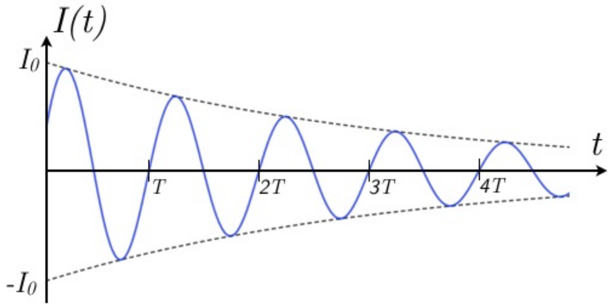
Man spricht dann von einer ungedämpften Schwingung.
Die Schwingung im Schwingkreis ist ungedämpft, wenn

- der Ohm'sche Widerstand (fast) gleich Null ist $R = 0$
- die Platten des Kondensators einen sehr kleinen Abstand haben
- die Spule sehr lang und dünn ist

Je besser ein Schwingkreis diese Forderungen erfüllt, desto länger wird er schwingen, ohne dass sich die Stromstärke verringert und die Schwingung abnimmt. Ein realer Schwingkreis hat immer ein bisschen Dämpfung.

Die gedämpfte Schwingung

Ein ungedämpfter Schwingkreis ist eine Idealvorstellung, die unter realen Bedingungen nur annähernd verwirklicht werden kann. Der Spulendraht im Schwingkreis oder die stromdurchflossenen Bauteile des Kondensators besitzen natürlich immer einen Ohm'schen Widerstand $R \neq 0$, der zu einem Energieverlust führt.
Der Energieverlust wird dadurch sichtbar, dass die Schwingung im Lauf der Zeit weniger wird und schließlich ganz aufhört.

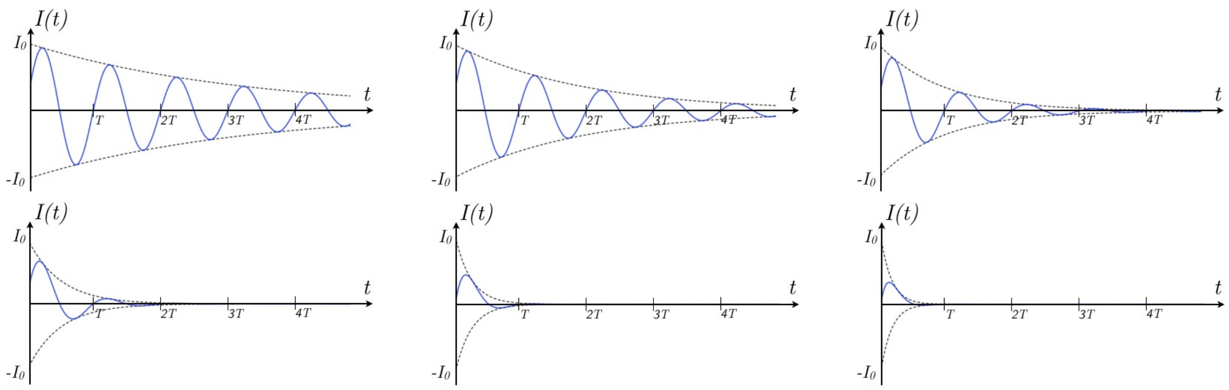


Wenn man den zeitlichen Verlauf des Stromes zum Beispiel ansieht, so nimmt die Amplitude exponentiell ab (siehe Abbildung). Die Sinus-Funktion des Stromes wird dann durch einen sogenannten Dämpfungsterm erweitert

$$I(t) = I_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) = I_0(t) \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

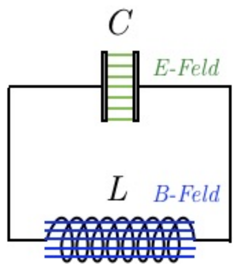
wobei die Dämpfungskonstante δ die Stärke der Dämpfung angibt.
Es nimmt also die Amplitude $I_0(t)$ im Laufe der Zeit ab. Die Frequenz bleibt aber gleich und verändert sich nicht.
Die blaue Kurve in der Abbildung beschreibt den Verlauf des Stromes $I(t)$, die strichlierte Kurve (auch Einhüllende genannt) beschreibt den Verlauf der exponentiell abnehmenden Amplitude $I_0(t)$.
Für die Ladung, das elektrische Feld und das Magnetfeld gelten ähnliche Formeln.

Der zeitliche Verlauf des Stromes für verschieden starke Dämpfungen.



1.2.4 Vom geschlossenen Schwingkreis zum Hertz'schen Dipol

Geschlossener Schwingkreis

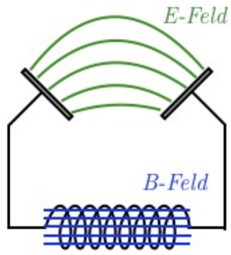


Ein geschlossener elektrischer Schwingkreis zeichnet sich dadurch aus dass

- der Ohm'sche Widerstand (fast) gleich Null ist $R = 0$
- die Platten des Kondensators einen sehr kleinen Abstand haben
- die Spule sehr lang und dünn ist

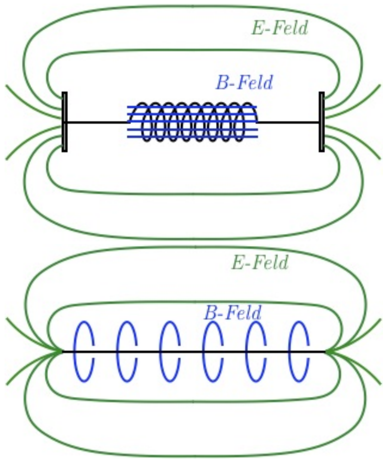
Es bleibt das elektrische Feld E auf den Raum zwischen den Platten beschränkt und das magnetische Feld B ist auf das Innere der Spule konzentriert. Außen gibt es fast kein Feld. Die Energie bleibt im Schwingkreis erhalten und es kommt zu (fast) keiner Dämpfung.

Halboffener Schwingkreis



Wenn man aber den Abstand zwischen den Platten vergrößert, so dringt das elektrische Feld E teilweise nach außen, was zu einem Energieverlust und damit zu einer Dämpfung der elektrischen Schwingung führt.
Je weiter man die Platten voneinander entfernt, desto größer ist die Dämpfung. Eine ähnliche Wirkung erhält man, wenn die Spule kurz ist und ihre Windungen einen großen Radius haben.

Offener Schwingkreis, Hertz'scher Dipol



Wenn man den Kondensator vollständig aufbiegt, so ist das elektrische Feld vollständig im Außenraum. Wenn man die Spule dann auch noch auseinander zieht, sodass man nur mehr einen geraden Leiter hat, so ist das Magnetfeld kreisförmig um diesen Leiter angeordnet und damit auch im Außenraum.
Der Energieverlust ist hier sehr hoch und die Dämpfung sehr stark.
Für den Hertz'schen Dipol werden dann auch noch die Platten des Kondensators auf Punkte zusammen geschrumpft. Jetzt hat man eigentlich nur mehr einen Leiter (Draht) auf dem die Ladungen hin und her schwingen.
Da die elektrischen und magnetischen Felder immer gemeinsam auftreten, spricht man von **elektromagnetischen Feldern**.
Diese elektromagnetischen Felder (und ihre periodischen Veränderungen) bewegen sich in den Raum und werden auch als **elektromagnetische Wellen** bezeichnet.
Der Hertz'sche Dipol erzeugt also durch die hin und her schwingenden Ladungen elektromagnetische Wellen, was das Funktionsprinzip einer Antenne ist.

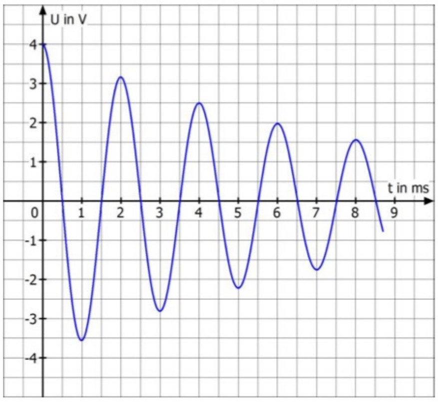
Frequenz des Hertz'schen Dipols

Wir wollen nun wissen, was mit der Frequenz eines Schwingkreises passiert, wenn man ihn öffnet und zu einem Hertz'schen Dipol deformiert. Dazu müssen wir einerseits die Veränderung der Kapazität und andererseits die Veränderung der Induktivität betrachten.
Die Kapazität C hängt von der Fläche A ab $C \sim A$. Wenn man die Fläche kleiner macht, so sinkt die Kapazität. Die Induktivität L hängt von der Fläche A und der Windungszahl N ab $L \sim A \cdot N^2$. Wenn man die Fläche kleiner und die Windungzahl kleiner macht, so sinkt die Induktivität.
Wir setzten dieses Verhalten jetzt in die Thomson'sche Formel für die Schwingungsfrequenz ein $f \sim \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$ und sehen, wenn die Kapazität C und die Induktivität L kleiner werden, so steigt die Frequenz an.

Durch die Veränderung vom geschlossenen zum offenen Schwingkreis steigt die Frequenz der elektromagnetischen Schwingung an und es steigt die Dämpfung der Schwingung. Man kann damit höherfrequente elektromagnetische Wellen produzieren.

Beispiel (1.6)

Bei einem elektrischen Schwingkreis wird der nebenstehende Spannungsverlauf festgestellt. Die Zeit ist in Millisekunden (ms) angegeben, die Spannung in Volt (V).



a) Erklären Sie den Verlauf der Spannung! Handelt es sich um einen gedämpften oder einen ungedämpften Schwingkreis? Woran kann man das erkennen?
b) Wodurch wird die Dämpfung verursacht?
c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Diagramms die Spannung U_0 und die Frequenz f der Schwingung!
d) Berechnen Sie die Induktivität L des Schwingkreises, wenn die Kapazität $C = 0,33\ \mu$F hat!
e) Zu welchem Zeitpunkt ist der Strom im Schwingkreis das erste Mal gleich Null? Berechnen Sie den Maximalwert des Stromes!
f) Bestimmen Sie die Dämpfungskonstante δ!

Lösung

a) Die Spannung nimmt ab, also handelt es sich um einen gedämpften Schwingkreis. Die Dämpfung ist nicht sehr stark.
b) Die Dämpfung kann durch einen Ohm'schen Widerstand im Schwingkreis oder durch einen zu großen Abstand der Platten oder durch eine zu kurze Spule bewirkt werden. Es geht hier Energie verloren.
c) Der Scheitelwert der Spannung ist gleichzeitig der Startwert der Spannung und daher ist $U_0 = 4$ V. Aus der Abbildung kann man die Periode ablesen zu $T = 2$ ms $= 2 \cdot 10^{-3}$ s. Daraus ergibt sich die Frequenz $f = \frac{1}{T} = 500$ Hz.
d) die Induktivität der Spule ergibt sich aus

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}}$$
$$L = \frac{1}{4 \cdot \pi^2 \cdot C \cdot f^2} = \frac{1}{4 \cdot \pi^2 \cdot 0,33 \cdot 10^{-6} \cdot 500^2} = 0,31 \text{ H}$$

e) Der Strom im Schwingkreis ist immer zeitversetzt zur Spannung und beginnt bei $t = 0$ s beim Wert Null. Der Maximalwert des Stromes ergibt sich durch

$$I_0 = \omega \cdot Q_0 = 2\pi \cdot f \cdot C \cdot U_0 = 2\pi \cdot 500 \cdot 0,33 \cdot 10^{-6} \cdot 4 = 0,0041 \text{ A} = 4,1 \text{ mA}$$

f) Für die Dämpfung der Spannung gilt derselbe Zusammenhang wie für den Strom

$$U(t) = U_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) = U_0(t) \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Wir lesen z.B. $U_0(4 \text{ ms}) = 2,5$ V aus der Abbildung ab und setzen dann ein und berechnen die Dämpfungskonstante

$$U_0(t) = U_0 \cdot e^{-\delta \cdot t}$$
$$2,5 = 4 \cdot e^{-\delta \cdot 4 \cdot 10^{-3}}$$
$$\delta = -\frac{\ln(\frac{2,5}{4})}{4 \cdot 10^{-3}} = 117,5 \text{ s}^{-1}$$

Man kann aus der Dämpfungskonstante auch die Halbwertszeit t_H (das ist die Zeit, nach der nur mehr die Hälfte der Ausgangsmenge vorhanden ist) berechnen durch

$$t_H = -\frac{\ln 0,5}{\delta} = 0,0059 \text{ s} \approx 6 \text{ ms}$$

was auch mit dem Wert in der Abbildung sehr gut übereinstimmt, da hier die Spannung bereits auf 2 V gesungen ist.

1.3 Aufgaben

Energiedichte

(1.1) Ein Kondensator hat den Plattenabstand $d = 0,1$ mm und zwischen seinen Platten herrscht die Spannung $U = 5$ V. Wie groß ist die Energiedichte in seinem Feld?

(1.2) Durch eine Spule (Länge $l = 40$ cm, Radius $r = 1$ cm) mit 500 Windungen fließt der Strom $I = 20$ mA . Bestimmen Sie das Magnetfeld und die Energiedichte in der Spule!

(1.3) Eine Spule ($N = 230$, $l = 20$ cm, $A = 15$ cm^2) wird von einem Strom der Stärke $I = 5$ A durchflossen. Berechnen Sie die magnetische Energiedichte und die gesamte magnetische Energie in der Spule!

(1.4) Ein Plattenkondensator hat den Plattenabstand $d = 1$ mm und wird mit der Spannung $U = 220$ V aufgeladen. Wie groß muss jeweils die Plattenfläche A sein, damit das homogene elektrische Feld die jeweils gleiche Energie speichert wie das in Aufgabe *(1.3)* gegebene magnetische Feld?

(1.5) Eine lange zylindrische Spule mit Radius $r = 4$ cm und Länge $\ell = 38$ cm wird von einem Strom $I = 250$ mA durchflossen. Wie groß muss die Windungszahl N sein, wenn die Spule die magnetische Feldenergie $E_{\text{mag}} = 2$ mJ speichern soll?

(1.6) Eine Spule mit der Induktivität $L = 0,126$ H wird vom Strom $I = 5$ A durchflossen.
Berechnen Sie die Energie, die in der Spule gespeichert ist!

Schwingkreis

(1.7) a) Zeichnen Sie das Schaltbild eines elektrischen Schwingkreises. Beschreiben Sie die einzelnen Phasen einer vollständigen Schwingung! Fertigen Sie Skizzen des Schwingkreises für die Zeitpunkte $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{T}{4}$, $t_3 = \frac{T}{2}$, $t_4 = \frac{3T}{4}$ und $t_5 = T$ und zeichnen Sie jeweils die E- und B-Felder ein.
b) Welche Energien wandeln sich im elektrischen Schwingkreis ineinander um? Vergleichen Sie den Schwingkreis mit einem mechanischen Analogon!

(1.8) An eine vertikal aufgehängte mechanische Feder wird ein Körper mit der Masse $m = 0,3$ kg gehängt. Dadurch wird die Feder um $\Delta x = 1,2$ cm gedehnt. Das System wird in Schwingungen versetzt.
a) Berechnen Sie die Federkonstante D und die Schwingungsdauer T des Federpendels!
b) Mit der gleichen Schwingungsdauer T soll ein elektromagnetischer Schwingkreis mit der Induktivität $L = 70$ H schwingen. Berechnen Sie die dazu erforderliche Kapazität!

(1.9) Ein geschlossener Schwingkreis hat die Induktivität $L = 0,25$ H und die Kapazität $C = 0,01$ mF, der Ohm'sche Widerstand ist fast gleich Null.
a) Welche Art von Schwingung entsteht im Kreis und welche Frequenz hat sie?
b) Was können sie über den Zusammenhang zwischen Dämpfung der Schwingung, Ohm'schem Widerstand und Plattenabstand des Kondensators sagen?
c) Welche Energien verwandelt sich dabei in einander?

(1.10) Ein geschlossener Schwingkreis hat die Induktivität $L = 4$ H.
a) Wie groß muss die Kapazität sein, damit man mit dem Schwingkreis eine Frequenz von 10 kHz erzeugen kann?
b) Wie kann man den Schwingkreis in einen halboffenen Schwingkreis verändern? Was geschieht dann mit der Dämpfung? Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Stromstärke!
c) Wie erhält man einen offenen Schwingkreis? Zeichnen Sie die E- und B-Felder dazu ein.

(1.11) Ein geschlossener Schwingkreis hat die Induktivität $L = 0,5$ H und die Kapazität $C = 5\ \mu$F. Der Ohm'sche Widerstand R ist sehr klein aber nicht gleich Null.
a) Berechnen Sie die Frequenz des Schwingkreises und erklären Sie seine Funktionsweise!
b) Da der Ohm'sche Widerstand R zwar sehr klein ist aber nicht gleich Null, so entsteht im Schwingkreis eine gedämpfte Schwingung. Zeichnen Sie den zeitlichen Verlauf derStromstärke auf!

(1.12) Ein geschlossener Schwingkreis besteht aus einer Spule (Windungen $N = 20$, Länge $l = 4$ cm, Spulenfläche $A_L = 3\ \text{cm}^2$) und einem Kondensator (Plattenfläche $A_C = 2\ \text{cm}^2$, Plattenabstand $d = 3$ mm). Der Kondensator wird durch eine 200V Spannungsversorgung aufgeladen.
a) Bestimmen Sie L und C!
b) Berechnen Sie die Frequenz f und die Periode T der entstehenden Schwingung!
c) Bestimmen Sie die Anfangsladung Q_0 am Kondensator sowie den maximalen Strom $I_0 = \omega \cdot Q_0$! Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Ladungen $Q(t)$ und des Stromes $I(t)$!

(1.13) Ein Schwingkreis ($L = 0,2$ H, $C = 2,5\,\mu$F) erzeugt ungedämpfte elektrische Schwingungen. Die Gesamtenergie des Schwingkreises beträgt $E_{\text{ges}} = 45$ mJ.
a) Berechnen Sie die Schwingungsdauer des Schwingkreises!
b) Erklären Sie die Funktionsweise eines Schwingkreises und die Energieumwandlung im Schwingkreis!
c) Berechnen Sie die Anfangsladung Q_0 und die Anfangsspannung U_0 am Kondensator!
d) Berechnen Sie die maximale Stromstärke I_0 in der Spule!
(Hinweis: Verwenden Sie für c) und d) die Energieformeln $E_{\text{el}} = \frac{C \cdot U^2}{2}$ und $E_{\text{mag}} = \frac{L \cdot I^2}{2}$!)

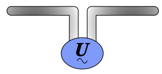
(1.14) Eine Kapazität $C = 1$ nF und eine Induktivität L bilden einen ungedämpften elektrischen Schwingkreis mit der Frequenz von $f = 5$ kHz. Die Anfangsspannung an der Kapazität beträgt $U_0 = 100$ V.
a) Zeichnen Sie das elektrische Schaltbild eines Schwingkreises und erklären Sie den Schwingkreis! Was ist eine Kapazität, was ist eine Induktivität?
b) Berechnen Sie die Größe der Induktivität!
c) Berechnen Sie die maximale Ladung Q_0 der Kapazität und die maximale Stromstärke I_0!
(Hinweis: Verwenden Sie die Energieformeln $E_{\text{el}} = \frac{C \cdot U^2}{2}$ und $E_{\text{mag}} = \frac{L \cdot I^2}{2}$ oder den Zusammenhang $I_0 = \omega \cdot Q_0$!)

(1.15) Für einen elektrischen Schwingkreis gilt: $L = 580$ H und $C = 50\ \mu$F und $U_0 = 80$ V. Zum Zeitpunkt $t = 0$ s wird der Schwingkreis aufgeladen und beginnt zu schwingen. Die Schwingung ist nicht gedämpft.
a) Berechnen Sie die Schwingungsdauer und die Frequenz der auftretenden Schwingung! Zu welchen Zeitpunkten ist die Stromstärke durch die Spule maximal?
b) Berechnen Sie die maximal Stromstärke I_0 durch die Spule!
c) Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Ladung $Q(t)$ und der Stromstärke $I(t)$!
d) Wir betrachten jetzt eine zusätzliche Dämpfung der Schwingung. Pro Schwingungsdauer "verliert" der Schwingkreis 25% seiner elektrischen Gesamtenergie durch die Dämpfung.
Berechnen Sie, welche Ladung sich nach genau 2 Schwingungsdauern noch auf dem Kondensator befindet!

2 Die elektromagnetische Welle

2.1 Der Hertz'sche Dipol als Oszillator

2.1.1 Der schwingende elektrische Dipol



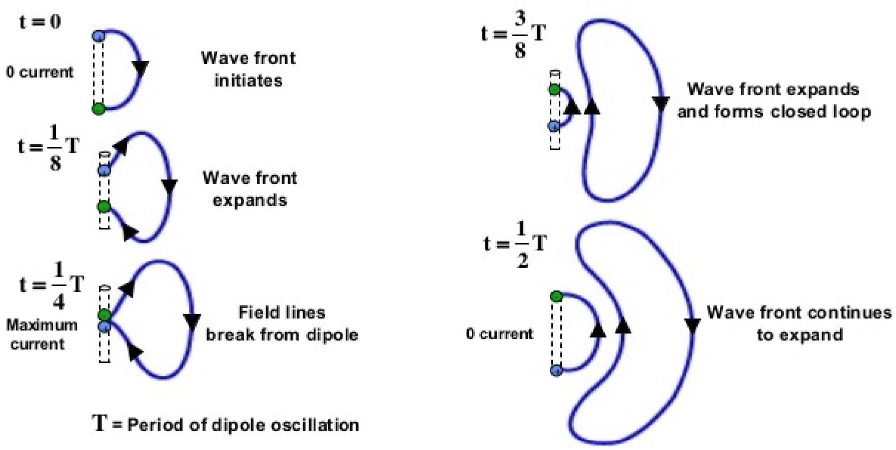
Da bei einem Hertz'schen Dipol (oder allgemeiner bei einem offenen elektrischen Schwingkreis) die Dämpfung sehr stark ist, muss man dem System von außen Energie zuführen, um eine länger andauernde periodische Schwingung zu erreichen. Dies wird mit einer äußeren Wechselspannungsquelle U erricht, die die Ladungen periodisch hin und her schwingen lässt. Mit dieser Anordnung kann man ungedämpfte elektromagnetische Wellen erzeugen und in den Raum abstrahlen. Das ist die einfachste Form eines Senders, wie er z.B. bei Sendemasten, Handys usw. verwendet wird.

Der Hertz'sche Dipol ist ein elektrischer Dipol, der durch eine äußere Spannungsquelle zu Schwingungen der elektrischen Ladungen angeregt wird.

Die Ladungen im Dipol schwingen mit der Frequenz der Spannungsquelle hin und her. Dabei entstehen elektrische und magnetische Felder im Wechsel. Die Felder bleiben aber nicht nur in der Nähe des Dipols bestehen, sondern breiten sich in den Raum hinein aus.

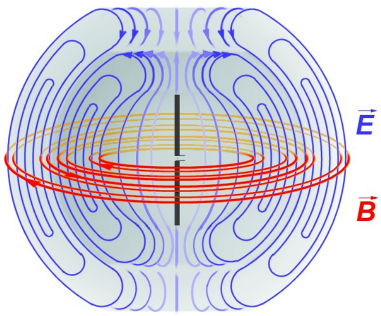
Ablösung der elektrischen Feldlinien

Wir betrachten zuerst die elektrischen Felder eines schwingenden Dipols.



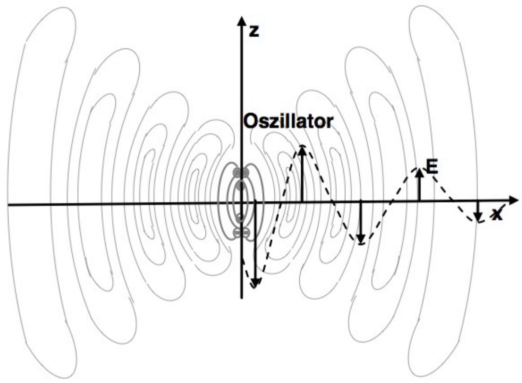
Die Ladungen befinden sich am Anfang an den Enden des Dipols und bewegen sich in einer periodischen Bewegung hin und her. Die elektrischen Feldlinien werden dabei mitgenommen. Wenn die Ladungen sich in der Mitte des Dipols treffen, so lösen sich die elektrischen Feldlinien ab und bilden geschlossene Linien (Feldablösung). Kurz darauf entstehen neue Feldlinien, die aber jetzt in die andere Richtung zeigen. Die Feldlinien breiten sich vom Dipol weg in den Raum hinaus.

2.1.2 Die räumliche Form der Felder einer elektromagnetischen Welle



Die Elektromagnetischen Felder, die sich in den Raum fortpflanzen, haben im allgemeinen komplizierte dreidimensionale Formen, die man mit den sogenannten Maxwell-Gleichungen berechnen kann. Wir betrachten hier nur die qualitative Form der Feldlinien für den einfachen schwingenden Dipol.

Die elektrischen Feldlinien sind eigentlich dreidimensionale Gebilde, die wie ein Torus (Doughnut) geformt sind und den Dipol schalenförmig umgeben. Sie lösen sich immer wieder ab und bilden dann geschlossene Flächen.
Die magnetischen Felder, die durch die bewegten Ladungen im Dipol (=Strom) entstehen, sind kreisförmig (bzw. zylinderförmig) um den Dipol angeordnet und bewegen sich stetig vom Dipol weg. In der Abbildung wird nur das Magnetfeld in der Zentralebene dargestellt.



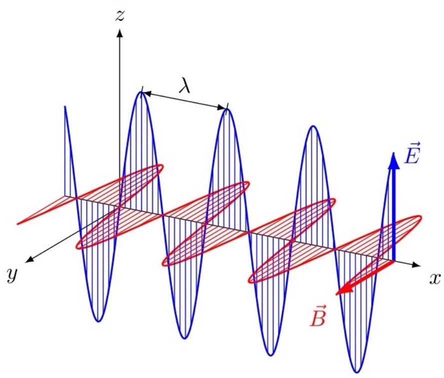
Man sieht bei beiden Feldern, dass die Richtungen sich jeweils periodisch abwechseln.
Wenn man für das elektrische Feld den räumlichen Verlauf des Feldes für eine Richtung in der Zentralebene einzeichnet (hier x-Richtung), so schwingt das E-Feld in die z-Richtung und man kann einen sinusförmigen Verlauf feststellen – das Kennzeichen einer Welle (siehe nebenstehende Abbildung).
Dasselbe gilt auch für das Magnetfeld, allerdings schwingt das Magnetfeld im rechten Winkel zum elektrischen Feld. In der nebenstehenden Abbildung würde das der y-Richtung entsprechen.
In der nebenstehenden Abbildung fällt auch auf, dass die Schwingungsamplitude des E-Feldes mit wachsendem Abstand zum Dipol immer mehr abnimmt. Das ist eine Folge der räumlichen Ausbreitung der Welle.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der entstehenden elektromagnetischen Wellen (im Vakuum) ist $c = 299\,792\,458$ m/s $\approx 3 \cdot 10^8$ m/s. Diese Geschwindigkeit nennt man Lichtgeschwindigkeit, weil Licht eine besondere Form einer elektromagnetischen Welle ist und sich mit dieser Geschwindigkeit im Vakuum ausbreitet. (Bemerkung: Elektromagnetische Wellen brauchen kein Medium um sich auszubreiten, sie existieren auch im leeren Raum, dem Vakuum.)

In einem offenen elektrischen Schwingkreis (Hertz'scher Dipol, Antenne) entstehen elektromagnetische Wellen. Das sind Schwingungen des elektrischen Feldes E und des magnetischen Feldes B, die sich in den Raum ausbreiten. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit nennt man Lichtgeschwindigkeit und sie hat im Vakuum den Wert von

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \tag{2.1}$$

Die elektromagnetische Welle entlang einer Richtung



Wenn man die elektromagnetische Welle in eine bestimmte Richtung betrachtet, so stellt man fest, dass elektrisches Feld und magnetisches Feld immer normal aufeinander stehen und beide sind auch normal zur Ausbreitungsrichtung. In der Abbildung wird diese Relation der Felder zueinander und zur Ausbreitungsrichtung dargestellt. (Die Abschwächung der Welle wird hier nicht berücksichtigt.)
Das elektrische Feld schwingt hier in der z-Richtung (bzw. in der zx-Ebene), das Magnetfeld schwingt in der y-Richtung (bzw. in der yx-Ebene) und die Welle breitet sich in die x-Richtung aus.
Die beiden Felder schwingen genau in Phase[1]. Wenn das elektrische Feld sein Maximum erreicht, so macht das auch das Magnetfeld. Beide Felder können räumlich durch die Wellenlänge λ bzw. zeitlich durch die Periode T (oder die Frequenz $f = \frac{1}{T}$) charakterisiert werden. Es gilt wie bei allen Wellen die Wellenformel

$$c = \lambda \cdot f = \frac{\lambda}{T}$$

Die Wellenlänge λ, der abgestrahlten elektromagnetischen Welle hängt mit der Länge ℓ des Dipols zusammen. Es gilt

$$\ell = \frac{\lambda}{2}$$

Man bezeichnet deshalb die Antenne auch als $\lambda/2$-Dipol.
Das elektrische Feld E und das magnetische Feld B sind durch die Gleichung

$$E = c \cdot B$$

verbunden. Das gilt auch für die Amplitude des elektrischen Feldes E_0 und die Amplitude des magnetischen Feldes B_0

$$E_0 = c \cdot B_0$$

Daraus erkennt man die enge Verbindung zwischen elektrischen und magnetischen Feldern, die sich auch in der Ausbreitungsgeschwindigkeit c der elektromagnetischen Welle (der Lichtgeschwindigkeit) äußert

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}}$$

die durch die Verbindung von elektrischer Feldkonstante $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C^2/(N\ m^2)}$ und magnetischer Feldkonstante $\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{V\ s/(A\ m)}$ zustande kommt.
Die Intensität S einer elektromagnetischen Welle hängt vom Quadrat der Amplitude ab, wie man über die Energiedichte $\rho_{\mathrm{el}} = \rho_{\mathrm{mag}}$ ableiten kann

$$S = \rho_{\mathrm{el}} \cdot c = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \cdot E_0^2 \cdot c$$
$$S = \rho_{\mathrm{mag}} \cdot c = \frac{1}{2 \cdot \mu_0} \cdot B_0^2 \cdot c$$

[1] Wenn man die entstehenden Felder ganz in der Nähe des Dipols betrachtet, so stellt man fest, dass E-Feld und B-Feld um 90° gegeneinander phasenverschoben sind. Dies bezeichnet man als Nahfeld des Dipols. Sobald man aber eine Entfernung r von ungefähr $r \gtrsim \frac{\lambda}{2\pi}$ vom Dipol entfernt ist, so befindet man sich im Fernfeld und dort bewegen sich die beiden Felder in Phase, wie in der Abbildung dargestellt.

Dabei kann noch der Zusammenhang von E und B verwendet werden und es ergibt sich für die Intensität

$$S = \frac{E_0 \cdot B_0}{2 \cdot \mu_0}$$

Eigenschaften der elektromagnetischen Welle

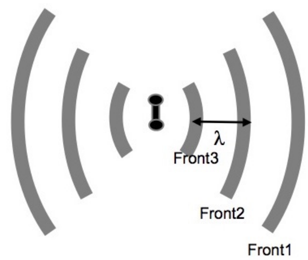
- Ein Hertz'scher Dipol besteht aus periodisch schwingenden Ladungen. Immer wenn Ladungen periodisch schwingen spricht man auch allgemein von einem **Oszillator**.
- Vom Oszillator ausgehend breiten sich periodisch schwingende elektrische Felder E und periodisch schwingende magnetische Felder B aus.
- Die Ausbreitung dieser periodischen schwingenden Felder heißt elektromagnetische Welle und ist der Ausbreitung einer Kugelwelle ähnlich[2].
- Die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Vakuum beträgt $c = 3 \cdot 10^8$ und heißt Lichtgeschwindigkeit.
- Die Intensität der abgestrahlten Wellen ist in der Äquatorialebene des Dipols am größten. In Richtung des Dipols (oberhalb und unterhalb) ist die Intensität praktisch gleich Null. Man spricht auch von der Strahlungscharakteristik des Dipols.
- Die Stärke des elektromagnetischen Feldes nimmt mit zunehmendem Abstand r ab ($\propto \frac{1}{r}$). Die Intenstität der Welle nimmt mit zunehmendem Abstand r ab ($\propto \frac{1}{r^2}$).
- Das elektrische Feld und das magnetische Feld stehen immer normal aufeinander und normal zur Ausbreitungsrichtung der Welle (Transversalwelle).

Die symbolische Darstellung einer elektromagnetischen Welle

Die vollständige Darstellung der räumlichen Struktur der elektrischen und magnetischen Felder ist etwas kompliziert, wie wir im letzten Kapitel gesehen haben.

Für viele Anwendungen reicht es, wenn man mit einer vereinfachten Art der Darstellung arbeitet. Die Vereinfachungen sind:

- wir beschränken uns auf die Darstellung des elektrischen Feldes E (das magnetische Feld ist ohnehin immer normal darauf)
- beim elektrischen Feld E stellen wir nur mehr die Wellenfronten[3] als Kreisbögen dar



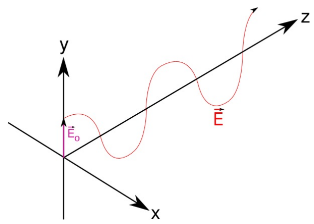
Auf den Fronten der Kugelwelle zeigt das E-Feld z.B. nach oben und ist sehr stark (Wellenberg). Der Abstand zweier Fronten beträgt immer eine Wellenlänge λ. Die Ausbreitungsrichtung einer Welle steht immer normal auf die Wellenfronten.
Front 1 im Bild wurde zuerst vom Oszillator abgestrahlt, sie ist schon am weitesten von ihm entfernt. Front 2 wurde genau eine Periode T später abgestrahlt, Front 3 wurde wieder eine Periode T später abgestrahlt. Die Fronten bewegen sich mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit c vom Oszillator weg.

[2] Eine punktförmige Schallquelle sendet kugelförmige Schallwellen aus, sogenannte Kugelwellen. Die elektromagnetischen Wellen, die der Dipol abgibt, sind dagegen keine exakten Kugelwellen, sondern räumlich orientiert. Der Grund ist die räumliche Orientierung des Dipols selbst.

[3] Eine Wellenfront ist die Verbindungslinie (oder Verbindungsfläche) aller Punkte einer Welle, die sich zu einem Zeitpunkt in der gleichen Phasenlage befinden. Zum Beispiel alle Punkte, die sich gerade auf einem Wellenberg befinden.

Beispiel (2.1)

Eine elektromagnetische Welle bewegt sich, wie in der Abbildung gezeigt, in die positive z-Richtung fort. Das elektrische Feld schwingt wie eingezeichnet entlang der y-Achse. Die Amplitude des elektrischen Feldes beträgt $E_0 = 3$ N/C, die Welle hat eine Frequenz von 100 MHz.



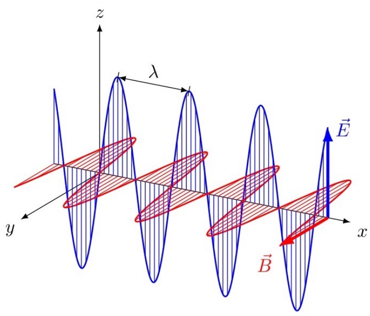
a) Berechnen Sie die Wellenlänge der Welle!
b) Berechnen Sie die Amplitude des magnetischen Feldes B_0! In welche Richtung schwingt das Magnetfeld?
c) Berechnen Sie die Länge ℓ des Dipols, der diese Welle erzeugen kann!

Lösung

a) Die Wellenlänge berechnet sich aus $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{100 \cdot 10^6} = 3$ m
b) Das maximale Magnetfeld ist $B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{3}{3 \cdot 10^8} = 10^{-8} = 0,01\ \mu$T. Das Magnetfeld schwingt in x-Richtung, da es normal auf die Richtung des elektrischen Feldes und auf die Ausbreitungsrichtung steht.
c) Wir berechnen die Länge zu $\ell = \frac{\lambda}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$ m.

Beispiel (2.2)

Eine ebene elektromagnetische Welle pflanzt sich, wie in der Abbildung gezeigt, in die positive x-Richtung fort. Das elektrische Feld schwingt wie angegeben entlang der z-Achse und hat eine Amplitude von $E_0 = 1,5$ N/C. Die Welle hat eine Frequenz von 10 GHz.



a) Berechnen Sie die Wellenlänge und die Schwingungsdauer der Welle!
b) Berechnen Sie die Amplitude des magnetischen Feldes B_0! In welche Richtung schwingt das magnetische Feld?
c) Welche besondere Beziehung haben das elektrische und das magnetische Feld zueinander und zur Ausbreitungsrichtung?
d) Berechnen Sie die Intensität der elektromagnetischen Welle!

Lösung

a) Die Wellenlänge beträgt $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{10 \cdot 10^9} = 0,03$ m.
Die Schwingungsdauer ist $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{10 \cdot 10^9} = 1 \cdot 10^{-10}$ s.
b) Die Amplitude des Magnetfeldes ergibt sich aus $B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{1,5}{3 \cdot 10^8} = 5 \cdot 10^{-9} = 5$ nT. Das B-Feld schwingt in die y-Richtung.
c) Die beiden Felder stehen normal aufeinander und sie stehen jeweils normal auf die Ausbreitungsrichtung.
d) Die Intensität berechnet sich aus $S = \frac{E_0 \cdot B_0}{2 \cdot \mu_0} = \frac{1,5 \cdot 5 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} = 2,98 \cdot 10^{-3} = 2,98$ mW/m^2.

Beispiel (2.3)

Eine Glühlampe hat eine Leistung von $P = 50$ W und sendet elektromagnetische Wellen aus. Wir nehmen an, dass die Wellen sich kugelförmig im Raum ausbreiten und dass die gesamte Leistung in elektromagnetische Strahlung umgewandelt wird.
a) Berechnen Sie die Intensität der elektromagnetischen Welle in einer Entfernung von $r = 1$ m!
b) Berechnen Sie die Amplitude E_0 des elektrischen Feldes in dieser Entfernung!
c) Berechnen Sie die Amplitude B_0 des magnetischen Feldes in dieser Entfernung!

Lösung

a) Die Intensität der Welle ergibt sich aus der allgemeinen Intensitätsformel $S = \frac{P}{A}$, wobei wir

für die Fläche die Kugeloberfläche $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$ einsetzen.
Dies ergibt $S = \frac{P}{A} = \frac{P}{4 \cdot \pi \cdot r^2} = \frac{50}{4 \cdot \pi \cdot 1^2} = 3,98\ \mathrm{W/m^2}$.
b) Für die Amplitude des elektrischen Feldes können wir verwenden, dass $S = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \cdot E_0^2 \cdot c$ und wir erhalten
$E_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot S}{\varepsilon_0 \cdot c}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3,98}{8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^8}} = 54,7\ \mathrm{N/C}$.
c) Die Amplitude des magnetischen Feldes ergibt sich aus $B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{54,7}{3 \cdot 10^8} = 1,8 \cdot 10^{-7} = 0,18\ \mu\mathrm{T}$

2.2 Das elektromagnetische Frequenzspektrum

2.2.1 Allgemeines und Übersicht

Verschiedene Oszillatoren schwingen verschieden "schnell", d.h., mit verschiedener Frequenz. Sie erzeugen daher elektromagnetische Wellen mit verschiedener Frequenz und Wellenlänge. Die Gesamtheit aller dieser Wellen bezeichnet man als elektromagnetisches Spektrum.
Es gilt für alle elektromagnetischen Wellen die Wellenformel.

Die Wellenformel:

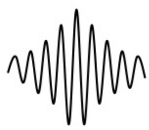
$$c = \lambda \cdot f \tag{2.2}$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit c ist gleich dem Produkt von Wellenlänge λ und Frequenz f.

Die Tabelle zeigt eine grobe Einteilung der wichtigsten Arten von elektromagnetischen Wellen und ihre ungefähren Frequenz- und Wellenlängenbereiche.

Name	Wellenlängenbereich [in m]	Frequenzbereich [in Hz]
Radiowellen (technische Wellen)	> 1 m	< 300 MHz ($\mathrm{M}=10^6$)
Mikrowellen	1 mm bis 1 m	300 MHz bis 300 GHz ($\mathrm{G}=10^9$)
Infrarotlicht, Wärmewellen	0,7 μm bis 1 mm	300 GHz bis 430 THz ($\mathrm{T}=10^{12}$)
Sichtbares Licht	0,4 μm bis 0,7 μm	430 THz bis 750 THz
Ultraviolettes Licht	1 nm bis 0,4 μm	750 THz bis 300 PHz ($\mathrm{P}=10^{15}$)
Röntgenstrahlen (X-ray)	10 pm bis 1 nm	300 PHz bis 30 EHz ($\mathrm{E}=10^{18}$)
Gammastrahlen (γ-Strahlen)	< 10 pm	> 30 EHz

Das Konzept der Photonen



Es gab schon lange einander widersprechende Meinungen über die Natur des Lichts. Wir haben jetzt die sogenannte Wellennatur (elektromagnetische Wellen) kennen gelernt. Man kann aber auch versuchen, das Licht durch Teilchen (sogenannte Lichtquanten oder Photonen) zu beschreiben (näheres dazu im Kapitel 8). Eine genaue Gegenüberstellung beider Theorien würde hier zu weit führen.
Wir wollen hier nur eine Erkenntnis der Lichtquanten (Photonen) verwenden. Man stellt sich vor, dass man elektromagnetischen Wellen in einem gewissen Sinn eine Energie zuordnen kann, die von der Frequenz des Lichts abhängt. Man spricht auch manchmal von räumlich begrenzten Wellenpaketen (Energiepaketen), denen man diese Energie zuordnen kann.
Elektromagnetische Wellen mit der Frequenz f kann eine Energie, die Photonenenergie zugeordnet werden. Diese Energie berechnet sich als

$$E_{\text{photon}} = h \cdot f \tag{2.3}$$

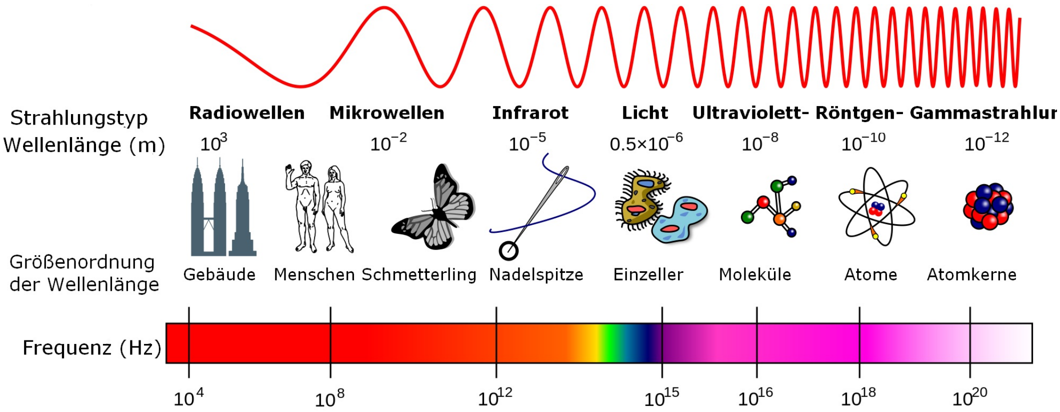
wobei $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Js das sogenannte Planck'sche Wirkungsquantum ist.

Die Energie der Photonen ist sehr klein, weshalb sie auch in der Einheit Elektronenvolt (eV) gemessen wird. Das ist eine sehr kleine Einheit für Energie, die man verwendet, wenn man sich mit einzelnen Atomen beschäftigt. Es gilt

$$1\text{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\text{J} \tag{2.4}$$

2.2.2 Die einzelnen elektromagnetischen Wellenarten

Im folgenden betrachten wir die einzelnen elektromagnetischen Wellenarten und geben die Art des Oszillators an, der schwingen muß, damit diese Art von elektromagnetischen Wellen entstehen können.



- *Radiowellen, Technische Wellen*: (Radio, TV)
  Oszillator: schwingende Ladungen in technischen Schwingkreisen.
  Radiowellen haben die größten Wellenlängen im elektromagnetischen Spektrum und liegen im Meterbereich aber auch im Kilometerbereich.

  Radiowellen übertragen nicht nur Musik ins Radio, sie werden auch zur Fernsehübertragung verwendet und beim Mobiltelefon.

- *Mikrowellen*: (Mobiltelefon, Radar, gelten manchmal als Teil der technischen Wellen)
  Oszillator: schwingende Ladungen in technischen Schwingkreisen.
  Mikrowellen haben Wellenlängen im Bereich von Dezimetern bis Millimetern.

  Der Mikrowellenherd verwendet Mikrowellen im Bereich von 12 cm Wellenlänge (2450 MHz). Diese durchdringen das Gargut und versetzen die Wassermoleküle im Inneren in Schwingungen. Dadurch erwärmt sich das Gargut nicht nur von außen, wie bei anderen Öfen, sondern von innen.

  Mikrowellen mit kurzer Wellenlänge werden als Navigationshilfe für Flugzeuge und Schiffe in Form von Radar (= Radio detecting and ranging) eingesetzt.

  Die hohe Frequenz der Mikrowellen erlaubt den Transport großer Informationsdichte, weshalb sie für Satelliten-Nachrichtentechnik und Mobilfunk eingesetzt werden.

- *Infrarotlicht (IR)*: (Wärmewellen, Fernbedienung)
  Oszillator: schwingende Moleküle
  Infrarotwellen haben Wellenlängen im Bereich von einer Stecknadelkopfgröße bis zum sichtbaren roten Licht ($0{,}7\ \mu$m), also etwa der Größe einer Zelle.

  Die ferne Infrarotstrahlung kennt jeder als die Wärmestrahlung, wie sie von einem Feuer, einem Wärmestrahler, o.ä. ausgeht.

  Das Nahe Infrarotlicht, das nicht so stark erwärmt, wird bei Fernbedienungen verwendet. Nachtsichtgeräte basieren auf IR-Licht.

- *Sichtbares Licht*: (sichtbar für das menschliche Auge)
  Oszillator: schwingende Elektronen der Außenhülle des Atoms
  Als (sichtbares) Licht bezeichnet man nur den sehr schmalen Wellenlängenbereich, den unser Auge erfasst. Er reicht von Rot ($0,7\ \mu$m) bis Violett ($0,4\ \mu$m).

  Sonnenlicht oder Licht aus einer Glühlampe erscheint uns weiß, was eine Mischung von verschiedenen Lichtsorten ist. Durch ein Prisma oder Regentropfen (Regenbogen) kann weißes Licht in seine Bestandteile zerlegt und in einzelne Farben aufgespaltet werden (siehe Kapitel 6.2 über Dispersion).

- *Ultraviolettes Licht (UV)*: (Insekten, Sonne, Sterilisation)
  Oszillator: schwingende Elektronen der Außenhülle des Atoms
  Der UV-Bereich reicht von Violett ($0,4\ \mu$m) bis in den Nanometerbereich.

  Wir Menschen können UV Licht nicht sehen, aber z.B. Insekten (Hummeln, Bienen) können auch im UV Bereich sehen. Deshalb erscheinen manche für uns unscheinbare weiße Blüten für diese Insekten sehr attraktiv.

  Unsere Sonne strahlt ebenso im UV-Bereich. Intensive ultraviolette Strahlung führt zu Sonnenbrand, Augenschäden oder Hautkrebs.

  UV-Strahlen werden auch zur Sterilisation medizinischer Geräte verwendet.

- *Röntgenstrahlen (X-rays)*: (medizinische Diagnostik, Astronomie)
  Oszillator: schwingende Elektronen der Innenhülle des Atoms
  Der Röntgenstrahlungs-Bereich reicht von Wellenlängen mit 1 nm bis zu Wellenlängen von ca. 10 pm. Man unterscheidet Röntgenstrahlung meist nach ihrer Energie.

  Röntgenstrahlung wird wegen ihres guten Durchdringens des Körpers in der Diagnostik verwendet.

  Röntgenstrahlung wird durch die Luftschichten unserer Atmosphäre absorbiert, dadurch werden wir nicht durch die kosmische Röntgenstrahlung geschädigt. Röntgenaufnahmen von astronomischen Objekten müssen daher vom Weltall aus mit Satelliten gemacht werden.

- *Gammastrahlen (γ-Strahlen)*: (radioaktive Strahlung, Astronomie)
  Oszillator: schwingende Kerne des Atoms
  Der Gamma-Strahlungs-Bereich umfasst alle Wellenlängen die kleiner sind als 10 pm.

  Gammastrahlung ist eine Art der radioaktiven Strahlung (neben Alpha- und Betastrahlung). Eine höhere Dosis von Röntgenstrahlung oder Gammastrahlung kann zur Strahlenkrankheit führen.

  Die kosmische Gammastrahlung wird von der Atmosphäre absorbiert, was für die Entwicklung des Lebens sehr wichtig ist.

Beispiel (2.4)

Eine Röntgenröhre sendet Röntgenstrahlen der Wellenlänge $\lambda = 0.1$ nm aus.
a) Um welche Art von Wellen handelt es sich?
b) Woraus besteht der Oszillator bei Röntgenstrahlen?
c) Wie groß ist die Frequenz der gegebenen Röntgenstrahlung?
d) Wieviel Energie transportiert ein Photon (Antwort in Joule und in eV)

Lösung

a) Es handelt sich um elektromagnetische Wellen, das sind elektrische und magnetische Felder die sich periodisch schwingend in den Raum ausbreiten.
b) Der Oszillator besteht aus den schwingenden Elektronen der inneren Atomhülle.

c) $f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{0{,}1 \cdot 10^{-9}} = 3 \cdot 10^{18}$ Hz
d) Jedes Photon ist ein Wellenpaket mit der Energie
$E_{\text{photon}} = h \cdot f = 6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{18} \approx 2 \cdot 10^{-15}$ J
Umrechnung: $2 \cdot 10^{-15}$ J $= 2 \cdot 10^{-15}/(1,6 \cdot 10^{-19}) \approx 12\,500$ eV

Beispiel (2.5)

Eine elektromagnetische Welle pflanzt sich in die z-Richtung fort. Das elektrische Feld schwingt entlang der y-Achse. Die Amplitude des elektrischen Feldes beträgt $E_0 = 10$ N/C, die Welle hat eine Frequenz von 1 MHz.
a) Berechnen Sie die Wellenlänge der Welle! Zu welcher Art (im Frequenzspektrum) gehört diese Welle und woraus besteht der Oszillator?
b) Berechnen Sie die maximale magnetische Feldstärke B_0! In welche Richtung schwingt das magnetische Feld?
c) Berechnen Sie die Energie der zugehörigen Photonen! (in Joule und eV)

Lösung

a) Wellenlänge $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{1 \cdot 10^6} = 300$ m
das sind Radiowellen (technische Wellen), die durch schwingende Ladungen in einem Schwingkreis entstehen
b) das maximale Magnetfeld ist $B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{10}{3 \cdot 10^8} = 3,3 \cdot 10^{-8} = 0,033\,\mu$T
das Magnetfeld schwingt in x-Richtung
c) Die Energie eines Photons beträgt
$E_{\text{photon}} = h \cdot f = 6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 1 \cdot 10^6 = 6,62 \cdot 10^{-28}$ J
Umrechnung: $6,62 \cdot 10^{-28}$ J $= 6,62 \cdot 10^{-28}/(1,6 \cdot 10^{-19}) \approx 4 \cdot 10^{-9}$ eV $= 4$ neV

2.3 Aufgaben

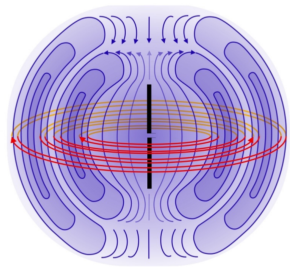
Elektromagnetische Wellen

(2.1) a) Welche "Form" hat eine elektromagnetische Welle, die von einem Hertz'schen Dipol ausgeht?
b) Wie hängt die Feldstärke vom Abstand ab?
c) In welcher Ebene wirkt diese elektromagnetische Welle am stärksten, wo ist ihre Wirkung praktisch gleich Null?

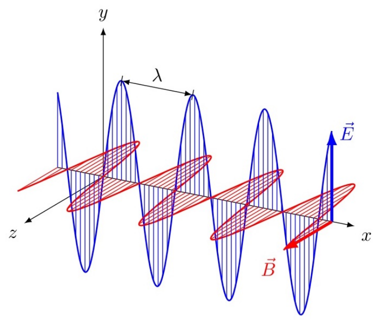
(2.2) Ein Radiosender strahlt sein Programm auf einer Frequenz von 92,0 MHz aus. Sie wollen eine Antenne bauen, die diesen Sender empfangen kann.
a) Erklären Sie das elektromagnetische Spektrum! Woraus besteht jeweils der Oszillator?
b) Erklären Sie, warum eine Antenne (Hertz'scher Dipol) auch ein elektrischer Schwingkreis ist. Wo befinden sich hier die einzelnen Elemente des Schwingkreises?
c) Berechnen Sie die Länge ℓ der Antenne, damit elektromagnetische Wellen dieser Frequenz entstehen können!
d) Berechnen Sie die Kapazität der Antenne, wenn ihre Induktivität $3,8\ \mu$H beträgt!

(2.3) Ein Radiosender strahlt sein Programm auf einer Frequenz von 1040 kHz aus. Sie wollen eine Antenne bauen, der diesen Sender empfängt. Sie besitzen bereits eine Spule mit der Induktivität $L = 4$ mH.
a) Wie groß muss die Kapazität des Kondensators sein, den sie benötigen?
b) Erklären Sie, warum ein Hertz'scher Dipol auch wie ein elektrischer Schwingkreis wirkt. Wo befinden sich hier die einzelnen Elemente des Schwingkreises?

(2.4) a) Erklären Sie die Abbildung! Was wird hier dargestellt? Was bedeuten die unterschiedlichen Lininen (lila und rot) und warum haben sie abwechselnd unterschiedliche Richtungen?
b) Berechnen Sie die Wellenlänge und die Frequenz für oranges Licht mit einer Periode von $T = 2 \cdot 10^{-15}$ s!
c) Berechnen Sie die Energie, die von diesem orangen Licht durch die Photonen übertragen wird!



(2.5) Eine ebene elektromagnetische Welle pflanzt sich, wie in der Abbildung gezeigt, in die positive x-Richtung fort. Der Vektor des elektrischen Feldes schwingt wie angegeben entlang der y-Achse und hat eine Amplitude von $E_0 = 20$ N/C. Die Welle hat eine Frequenz von 1 MHz.
a) Berechnen Sie die Wellenlänge der Welle! Zu welcher Art (im Frequenzspektrum) gehört diese Welle und woraus besteht der Oszillator?
b) Berechnen Sie die Amplitude des magnetischen Feldes B_0! In welche Richtung schwingt das magnetische Feld?
c) Welche besondere Beziehung haben das elektrische und das magnetische Feld zueinander und zur Ausbreitungsrichtung?



(2.6) Eine Glühlampe hat eine Leistung von $P = 100$ W und sendet elektromagnetische Wellen kugelförmig aus. Wir nehmen an, dass die gesamte Leistung in elektromagnetische Strahlung umgewandelt wird.
a) Berechnen Sie die Intensität der elektromagnetischen Welle in einer Entfernung von $r = 1$ m!
b) Berechnen Sie die Amplitude E_0 des elektrischen Feldes in dieser Entfernung!
c) Berechnen Sie die Amplitude B_0 des magnetischen Feldes in dieser Entfernung!

(2.7) Ein Mikrowellenherd hat die Leistung von $P = 1$ kW, die auf eine Fläche von 30 cm x 40 cm verteilt wird. Wir nehmen an, dass die gesamte Leistung in elektromagnetische Strahlung umgewandelt wird.
a) Berechnen Sie die Intensität der elektromagnetischen Welle auf dieser Fläche!
b) Berechnen Sie die Amplitude E_0 des elektrischen Feldes auf dieser Fläche!
c) Berechnen Sie die Amplitude B_0 des magnetischen Feldes auf dieser Fläche!

(2.8) Ein Hertz'scher Dipol schwingt mit der Frequenz 3000 MHz.
Welche Wellenlänge hat die elektromagnetische Welle, die er emittiert? Zu welcher Art (im Frequenzspektrum) gehört diese Welle und woraus besteht dieser Oszillator?

(2.9) Ein Hertz'scher Dipol emittiert Photonen mit der Frequenz $f = 10^{14}$ Hz.
Bestimmen Sie die Wellenlänge! Sind sie sichtbar? Wieviel Energie transportiert jedes Photon?

(2.10) Man beobachtet Photonen, die 5000 eV transportieren.
Bestimmen Sie die Wellenlänge und Frequenz sowie die Art der Strahlung! Welcher Oszillator erzeugt diese Strahlung?

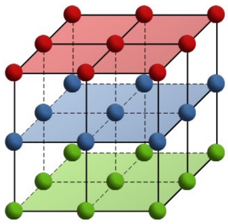
(2.11) Berechnen Sie den Zahlenwert von $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}}$ durch einsetzen! Bestimmen Sie die Einheit dieser physikalischen Größe c durch Einsetzen!

3 Streuung, Reflexion und Brechung von elektromagnetischen Wellen

3.1 Ebene elektromagnetische Wellen in einem Gitter

Die elektromagnetischen Wellen werden von Oszillatoren erzeugt. Jeder Oszillator erzeugt eine Kugelwelle. Durch das Zusammenwirken (Interferenz) von vielen Kugelwellen können ebene Wellen (Parallelwellen) entstehen.

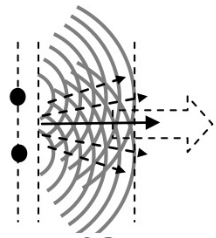
3.1.1 Das Gitter in einem Festkörper

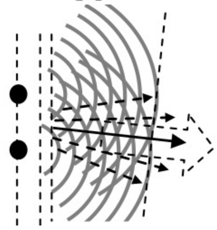


Die meisten Festkörper sind aus regelmäßig angeordneten Atomen oder Molekülen aufgebaut, die als Oszillatoren wirken. Diese Anordnung nennt man Gitter (Kristallgitter). Der Abstand der Teilchen im Gitter wird als Gitterkonstante oder Gitterabstand bezeichnet (bei komplizierten Gittern kann es mehrere Gitterkonstanten geben). Das Gitter kann man in einzelne Schichten zerlegen, die man Gitterebenen nennt (in der Abbildung rot, blau und grün eingezeichnet).
Wir betrachten im Folgenden nur mehr eine Gitterebene, die wir von der Seite betrachten, sodass es wie eine aufgefädelte Reihe von Oszillatoren aussieht.

3.1.2 Oszillatoren einer Gitterebene wirken zusammen

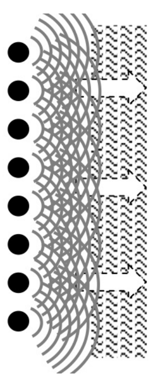
Zwei Oszillatoren

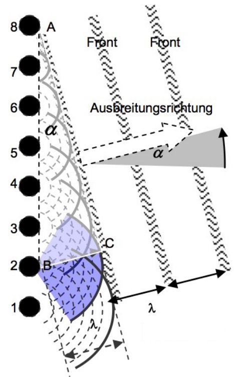




Im einfachsten Fall wirken zwei Oszillatoren zusammen.
In der ersten Abbildung wirken zwei Oszillatoren zusammen, die gleichphasig schwingen. Das heißt, sie senden ihre Wellenfronten genau zum gleichen Zeitpunkt aus. Die beiden Kugelwellen verstärken sich zu einer neuen gemeinsamen Welle, die die Einhüllende der beiden Wellen ist. Die neue Welle breitet sich normal zur Verbindungslinie der beiden Oszillatoren aus.
In der zweiten Abbildung schwingt der untere Oszillator ein wenig später als der obere. Die Fronten des unteren Oszillators sind daher etwas weiter hinter den Fronten des oberen Oszillators. Die beiden Oszillatoren schwingen mit einer Phasenverschiebung $\Delta\varphi$. Dadurch ändert sich auch die Ausbreitungsrichtung der neuen Welle, sie breitet sich schief aus.

Viele Oszillatoren





An einer Gitterebene wirken viele Oszillatoren zusammen. Die neue Welle ist die Einhüllende aller einzelnen (Kugel-) Wellen. Es ergibt sich eine ebene Welle, deren Wellenfronten parallele Ebenen bzw. Geraden sind.
Auch hier kann man zwei Fälle unterscheiden.
Die linke Abbildung zeigt viele gleichphasig schwingende Oszillatoren in einer Gitterebene. Die Kugelwellen verstärken sich zu einer neuen ebenen Welle, deren Wellenfronten parallel zur Gitterebene sind. Die Ausbreitungsrichtung der ebenen Welle ist normal zur Gitterebene.
Die rechte Abbildung zeigt viele Oszillatoren in einer Gitterebene, die nicht gleichphasig schwingen, sondern nacheinander eine Phasenverschiebung von jeweils $\Delta\varphi$ haben. Oszillator 1 (unten) hat als Erster zu schwingen begonnen. Oszillator 8 (oben) beginnt gerade im Augenblick der Abbildung neu zu schwingen. Die Kugelwellen verstärken sich auch hier zu einer

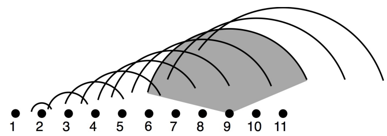
ebenen Welle. Die Ausbreitungsrichtung dieser Welle hat allerdings einen bestimmten Winkel α zur Normalen auf die Gitterebene. Der Winkel α hängt mit der Phasendifferenz $\Delta\varphi$ zusammen.

Die Kugelwellen von gleichphasig schwingenden Oszillatoren einer Gitterebene verstärken sich zu einer ebenen Welle. Ihre Fronten sind parallel und ihre Ausbreitungsrichtung ist normal zur Gitterebene.
Die Kugelwellen von Oszillatoren einer Gitterebene, die phasenverschoben schwingen, verstärken sich zu einer schiefen ebenen Welle. Ihre Fronten sind parallel und die Ausbreitungsrichtung ist um einem Winkel α verdreht.

Beispiel (3.1)

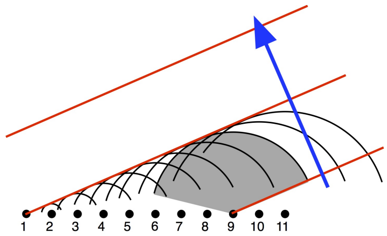
Die Abbildung zeigt elektromagnetische Kugelwellen, die von Oszillatoren einer Gitterebene ausgehen. Die markierte Kugelwelle hat vom Oszillator den Abstand $\lambda = 3$ mm. Die abgebildeten Kugelwellen verstärken sich zu einer neuen Welle.

a) Wie nennt die geometrische Form der neuen Welle? Zeichnen Sie die Ausbreitungsrichtung und die Fronten ein! Welcher Oszillator hat als erster zu schwingen begonnen, welcher als letzter?
b) Berechnen Sie Frequenz f und Schwingungsdauer T der Welle!



Lösung

a) Die Kugelwellen verstärken sich zu einer ebenen Welle, die den Winkel α mit der Gitterebene einschließt. Die Wellenfronten sind parallele Geraden (rot eingezeichnet). Eine Wellenfront beginnt beim Oszillator 1, eine andere beginnt beim Oszillator 9, da die ausgesendete Kugelwelle genau eine Wellenlänge entfernt ist und im nächsten Moment eine neue Kugelwelle ausgesendet wird.
Oszillator 11 hat als erster zu schwingen begonnen, Oszillator 1 als letzter. Die Ausbreitungsrichtung ist mit dem blauen Pfeil markiert und steht normal auf die neuen Wellenfronten.

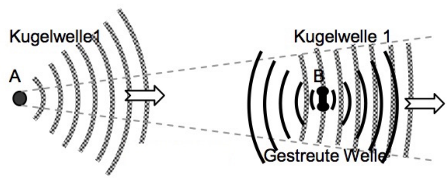


b) Die Frequenz ist $f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\cdot 10^8}{3\cdot 10-3} = 1\cdot 10^{11}$ Hz und die Schwingungdauer ist $T = \frac{1}{f} = 1\cdot 10^{-11}$ s.

3.2 Die Streuung von elektromagnetischen Wellen

Wenn eine elektromagnetische Welle auf Materie (Atome, Moleküle, Oszillatoren) trifft, so kommt es zu Wechselwirkungen und die Oszillatoren werden zu Schwingungen angeregt. Dadurch wird die ursprüngliche Welle von ihrer ursprünglichen Richtung abgelenkt (gestreut).

Die allgemeine Darstellung eines Streuprozesses

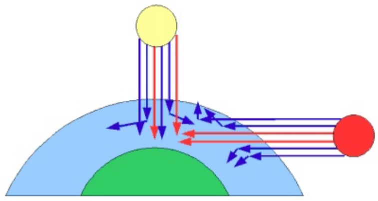


Ein Oszillator A erzeugt eine Kugelwelle, die sich ausbreitet. Wir betrachten den Teil dieser Welle, der sich nach rechts ausbreitet und zwar am Anfang (im linken Teil der Abbildung) und etwas weiter entfernt (im rechten Teil der Abbildung). Der Oszillator B wird von dieser Welle getroffen. Dadurch beginnen seine Ladungen mit derselben Frequenz zu schwingen. Von B breitet sich also eine neue elektromagnetische Welle kugelförmig aus. Diese Erscheinung nennt man Streuung. Die neue Welle heißt gestreute Welle.
Wegen der Massenträgheit des Oszillators B dauert es ein wenig, bis er durch die Kraft des schwingenden elektromagnetischen Feldes beschleunigt wird. Der Oszillator B schwingt daher nicht gleichphasig mit der ursprünglichen Welle, sondern ein wenig verspätet.

Trifft eine elektromagnetische Welle auf einen Oszillator, so beginnt dieser mit der Frequenz der Welle zu schwingen und emittiert eine Kugelwelle mit derselben Wellenlänge. Die Kugelwelle ist allerdings gegenüber der ursprünglichen Welle etwas verspätet (phasenverschoben). Diese kugelähnliche Ausbreitung der ursprünglichen Welle in alle Richtungen heißt Streuung. Die Welle wird an einem Oszillator in alle Richtungen gestreut.

Beispiel

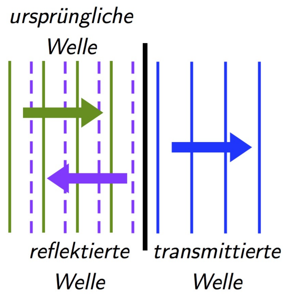
Das Licht der Sonne setzt es sich aus allen Farben des Regenbogens zusammen (siehe Kapitel 6.2). Das Licht wird an den Teilchen der Atmosphäre gestreut. Man spricht hier von Rayleigh-Streuung. Immer wenn wir nicht direkt in die Sonne blicken, sehen wir ausschließlich gestreutes Licht, das über ein paar Umwege von der Sonne in unser Auge gelangt. Daher ist es gerade das gestreute Licht, das die Farbe des Himmels bestimmt.



Blaues Licht wird stärker gestreut als rotes. Wenn die Sonne hoch am Himmel steht, ist der Weg des Sonnenlichts durch die Atmosphäre kurz. Es wird dabei hauptsächlich Blau gestreut, so dass uns der Himmel am Tag blau erscheint. Wenn die Sonne tief steht (Sonnenuntergang und Sonnenaufgang), ist der Weg des Lichts durch die Atmosphäre länger. Durch die Streuung vermindert sich der Blauanteil dabei so stark, dass das Rot überhand gewinnt. Daher ist der Himmel bei Sonnenaufgang (Morgenrot) und Sonnenuntergang (Abendrot) rötlich.

Die Streuungen am Gitter

Phänomene wie die Reflexion, die Transmission und die Beugung von elektromagnetischen Wellen beruhen auf mikroskopischen Streuprozessen in Materie (am Gitter).
Wenn die ursprüngliche Welle auf viele Oszillatoren einer Gitterebene trifft, dann werden die Oszillatoren zu Schwingungen angeregt. Die Kugelwellen der Oszillatoren überlagern sich zu ebenen Welle.
Man bezeichnet die ebene Welle, die von der Gitterebene wieder zurück läuft als reflektierte Welle und den Prozess als Reflexion. Die Welle, die in die gleiche Richtung läuft wie die ursprüngliche Welle, wird als transmittierte Welle bezeichnet und der Prozess heißt Transmission.
Meist ist ein Material nicht nur aus einer Gitterebene aufgebaut, sondern aus vielen Gitterebenen hintereinander. Dies wird in der Optik als **Medium** bezeichnet.



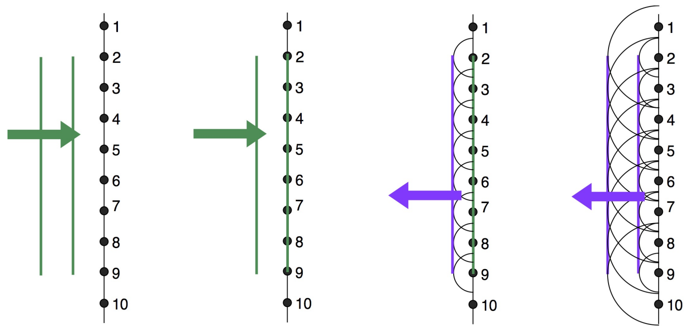
Wir unterscheiden folgende Begriffe:

Reflexion: die Welle trifft auf ein Medium und wird zurück geworfen
(Man sagt, die Welle wird reflektiert.)
Transmission: die Welle kann in das Medium eindringen und durchlaufen
(Man sagt, die Welle wird transmittiert.)
Brechung: die Welle kann in das Medium eindringen, wird aber in ihrer Richtung geändert
(Man sagt, die Welle wird gebrochen.)
Beugung: die Welle erfährt eine Ablenkung an einem Medium
(Man sagt, die Welle wird gebeugt.)

3.3 Die Reflexion von em Wellen

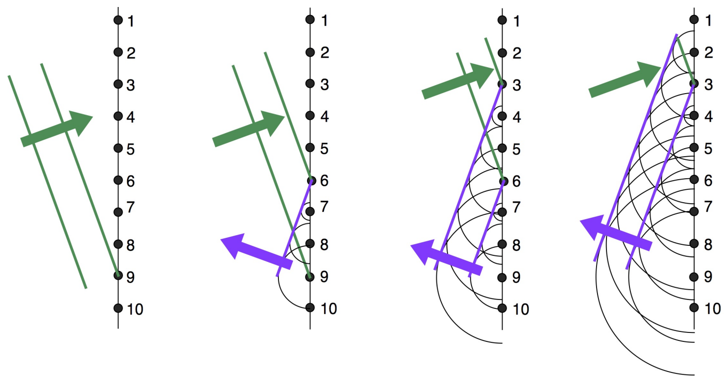
Die Reflexion einer Welle entsteht durch das Zusammenwirken von vielen Streuungen, die an einer Gitterebene stattfinden. Wir können zwei Fälle unterscheiden.

- Die Ausbreitungsrichtung der einfallenden Welle ist normal zur Gitterebene



Die Abbildung zeigt die von links einlaufende Welle (grün) zu verschiedenen Zeitpunkten. Wenn sie auf die Gitterebene trifft, so werden alle Oszillatoren gleichzeitig zu Schwingungen angeregt. Die Phasenverschiebung zwischen den Oszillatoren beträgt $\Delta\varphi = 0$. Es entsteht eine ebene Welle, die von der Gitterebene zurück läuft (also nach links) und deren Ausbreitungsrichtung wieder normal zur Gitterebene ist. Die reflektierte Welle (violett) hat die gleich Wellenlänge und Frequenz wie die ursprüngliche Welle, sie kann nur etwas zeitversetzt beginnen.

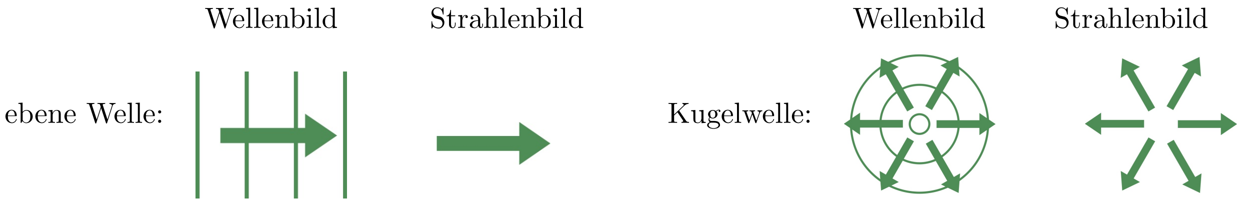
- Die Ausbreitungsrichtung der einfallenden Welle ist nicht normal zur Gitterebene



Die Abbildung zeigt die von schräg links unten einlaufende Welle (grün) zu verschiedenen Zeitpunkten. Wenn sie auf die Gitterebene trifft, so werden die Oszillatoren nacheinander mit einer Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ zu Schwingungen angeregt. Es entsteht eine schiefe ebene Welle, die von der Gitterebene nach links oben weg läuft. Die reflektierte Welle (violett) hat die gleich Wellenlänge und Frequenz wie die ursprüngliche Welle, sie kann nur etwas zeitversetzt beginnen.

Das Strahlenbild

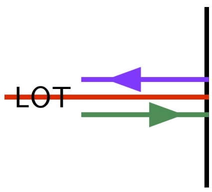
Wir wollen für die weiteren Überlegungen das Wellenbild verlassen, da es sehr viele Informationen enthält, die für die folgenden Überlegungen nicht relevant sind. Wir können für gewisse Anwendungen die elektromagnetische Welle auch nur durch ihre Ausbreitungsrichtung beschreiben. Diese wird auch als Wellenstrahl oder nur Strahl bezeichnet. Wir ersetzen also die Darstellung mit Wellenfronten durch die Darstellung mit Strahlen.



Lot, Einfallswinkel, Reflexionswinkel

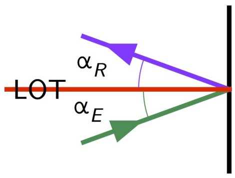
Wir können jetzt die Reflexion im Strahlenbild sehr übersichtlich darstellen.

- Die Ausbreitungsrichtung der einfallenden Welle ist normal zur Gitterebene:



Der einlaufende Strahl (grün) ist normal zur Gitterebene (schwarz). Der reflektierte Strahl (violett) ist ebenfalls normal zur Gitterebene. Das Lot (rot) ist eine gedachte Linie normal zur Gitterebene. Den Winkel zwischen einlaufendem Strahl und Lot nennt man Einfallswinkel α_E, den Winkel zwischen reflektiertem Strahl und Lot nennt man Reflexionswinkel α_R. Es gilt hier: $\alpha_E = 0$, $\alpha_R = 0$.

- Die Ausbreitungsrichtung der einfallenden Welle ist nicht normal zur Gitterebene



Der einlaufende Strahl (grün) hat den Einfallswinkel α_E gemessen vom Lot (rot). Der reflektierte Strahl (violett) hat den Reflexionswinkel α_R ebenfalls gemessen vom Lot. Es gilt hier: $\alpha_E = \alpha_R$.

Wir können diese Beobachtungen im Reflexionsgesetz formulieren.

Reflexionsgesetz:
Die Reflexion einer elektromagnetischen Welle an einer Gitterebene ist das Ergebnis vieler Streuungen an ihren Gitterpunkten. Es gilt, dass der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel ist.

$$\alpha_E = \alpha_R \tag{3.1}$$

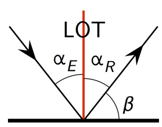
Der Einfallswinkel α_E wird zwischen Lot und Einfallsstrahl gemessen, der Reflexionswinkel α_R wird zwischen Lot und reflektiertem Strahl gemessen. Das Lot ist eine (gedachte) Linie normal auf die Gitterebene.

Beispiel (3.2)

Wie groß ist bei der Reflexion an einer Gitterebene der Einfallswinkel, wenn der Winkel zwischen reflektiertem Strahl und Gitterebene 40° beträgt?

Lösung

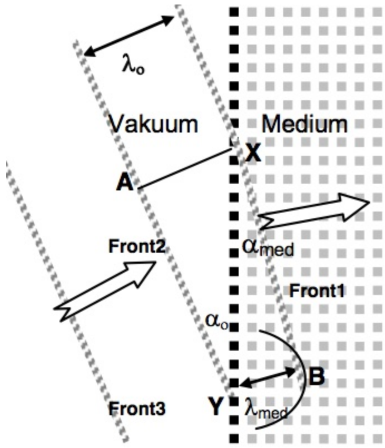
In diesem Fall ist nicht der Einfallswinkel α_E gegeben, sondern der Winkel zwischen dem reflektiertem Strahl und Gitterebene, nämlich $\beta = 40°$. Aus der Abbildung mit dem Lot sieht man:



$$\alpha_E = \alpha_R = 90° - \beta = 90° - 40° = 50°$$

3.4 Die Brechung von em Wellen

Wenn eine em Welle vom Vakuum auf eine Gitterebene trifft, so entsteht eine reflektierte Welle, die sich wieder zurück bewegt. Es entsteht aber auch eine transmittierte Welle, die sich in die gleiche Richtung weiter bewegt wie die ursprüngliche Welle (siehe Kapitel 3.2 Streuung am Gitter).
Wenn es nicht nur eine Gitterebene gibt, sondern viele Gitterebenen hintereinander (was wir Medium nennen), dann behält die transmittierte Welle ihre Richtung nicht bei, sondern es kommt zu einer Richtungsänderung, die man **Brechung** nennt. Diese Richtungsänderung entsteht, weil sich die Zeitverzögerungen der Wellen von Gitterebene zu Gitterebene summieren und es dadurch zu einer Geschwindigkeitsveränderung bzw. einer Wellenlängenänderung der Welle kommt.



Der Brechungsindex

Wenn eine elektromagnetische Welle in ein Medium eindringt, so verändert sie sich dabei. Man stellt folgendes fest:

- elektromagnetische Welle im Vakuum wird beschrieben durch
  Geschwindigkeit $c_0 = 3 \cdot 10^8$ m/s, Wellenlänge λ_0, Frequenz f_0
  $$c_0 = f_0 \cdot \lambda_0$$
- elektromagnetische Welle in einem Medium wir beschrieben durch
  Geschwindigkeit c_{med} wird kleiner, Wellenlänge λ_{med} wird kleiner, Frequenz f_{med} bleibt gleich (weil die Energie der Welle sich nicht verändert)
  $$c_{\text{med}} = f_{\text{med}} \cdot \lambda_{\text{med}}$$

Der Brechungsindex n beschreibt, wie stark sich eine Welle in einem Medium verändert im Vergleich zum Vakuum. Es gilt

$$c_{\text{med}} = \frac{c_0}{n}, \qquad \lambda_{\text{med}} = \frac{\lambda_0}{n}, \qquad f_{\text{med}} = f_0$$

Ein Medium mit einem hohen Brechungsindex nennt man **optisch dicht**, ein Medium mit einem kleinen Brechungsindex nennt man **optisch dünn**.

Beispiele:

Medium	Quarzglas	Wasser	Ethanol	Diamant	Luft	Vakuum
n	1,46	1,33	1,36	2,42	1,0029	1

Beispiel (3.3)

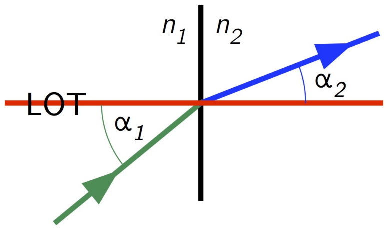
Berechnen Sie die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer em Welle in Wasser ($n = 1,33$)!

Lösung

Wir verwenden die Formel $c_{\text{med}} = \frac{c_0}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,33} = 2,25 \cdot 10^8$ m/s.

Die Brechung zwischen zwei Medien

Aus der Zeitverzögerung der elektromagnetischen Welle im Medium ergibt sich eine Richtungsänderung der transmittierten Welle.
Zusätzlich zur Brechung kommt es aber immer auch noch zu einer Reflexion des Strahls an den Gitterebenen. Dies lassen wir aber jetzt für den Moment außer Acht und konzentrieren uns nur auf die Brechung.
Die Brechung wird am einfachsten im Strahlenbild betrachtet. Der einfallende Strahl (grün) trifft auf die Grenzfläche (schwarz) zwischen den beiden Medien (durch n_1 und n_2 beschrieben) und wird im zweiten Medium gebrochen (blau).
Das Brechungsgesetz gibt den Zusammenhang zwischen dem Einfallswinkel α_1 und dem Brechungswinkel α_2 an. Die Winkel werden vom Lot aus gemessen. Das Lot ist eine gedachte Linie, die normal auf die Grenzfläche (Gitterebene) steht.



Es gilt:

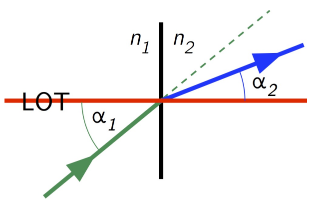
Brechungsgesetz:
Die Brechung einer elektromagnetischen Welle zwischen zwei Medien ist das Ergebnis vieler Streuungen an hintereinander liegenden Gitterebenen. Der Einfallswinkel α_1 und der Brechungswinkel α_2 haben den Zusammenhang

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

wobei n_1 der Brechungsindes des ersten Mediums und n_2 der Brechungsindex des zweiten Mediums ist. Die Winkel werden immer vom Lot gemessen.

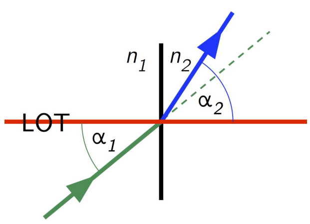
Wir können zwischen zwei Arten der Brechung und einem Spezialfall unterscheiden:

- Brechung zum Lot:



Der Brechungswinkel ist kleiner als der Einfallswinkel, $\alpha_1 > \alpha_2$. Dazu muß $n_1 < n_2$. Brechung zum Lot findet also bei einem Übergang von einem optische dünnen zu einem optisch dichten Medium statt, z.B. von Luft in Wasser.

- Brechung vom Lot:



Der Brechungswinkel ist größer als der Einfallswinkel, $\alpha_1 < \alpha_2$. Dazu muß $n_1 > n_2$. Brechung vom Lot findet also bei einem Übergang von einem optische dichten zu einem optisch dünnen Medium statt, z.B. von Wasser in Luft.

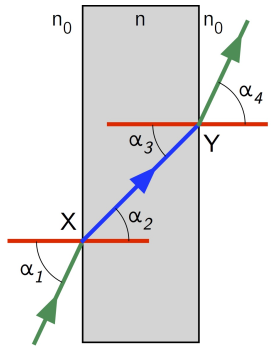
- Spezialfall: Einfallststrahl im Lot:

  Wenn der einfallende Strahl genau im Lot ist, so gibt es keine Richtungsänderung, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Die Geschwindigkeit und die Wellenlänge der transmittierten Welle (=gebrochene Welle) ändern sich aber schon.

Beispiel (3.4)

Ein Lichtstrahl läuft vom Vakuum in eine planparallele Glasplatte (gegenüber liegende Grenzebenen der Platte sind parallel, Brechungsindex $n = 1,46$). Der Winkel zwischen Strahl und Plattenebene beträgt $\beta = 40°$. Berechnen Sie die Richtungen des Strahls in der Platte und nach dem Austritt aus der Platte ins Vakuum! Geben Sie an, ob es sich um Brechungen zum Lot oder vom Lot handelt!

Lösung



Der Einfallswinkel ist in diesem Fall $\alpha_1 = 90° - \beta = 50°$.
Im Punkt X findet eine Brechung zum Lot statt, da der Übergang von optisch dünn nach optisch dicht ist. Wir verwenden das Brechungsgesetz

$$\begin{aligned}\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} &= \frac{n}{n_0}\\ \sin\alpha_2 &= \frac{\sin\alpha_1\cdot n_0}{n} = \frac{\sin 50°\cdot 1}{1,46} = 0,5247\\ \alpha_2 &= 31,65°\end{aligned}$$

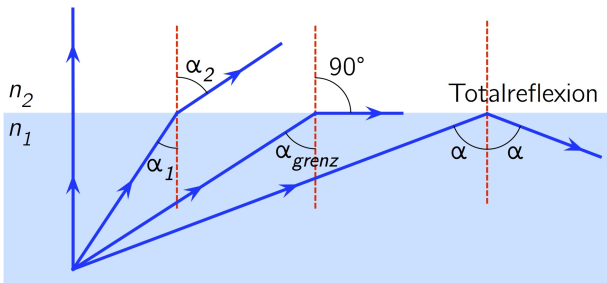
Im Punkt Y gibt Brechung vom Lot, da der Übergang von optisch dicht nach optisch dünn ist. Die Winkel sind $\alpha_2 = \alpha_3$. Das Brechungsgesetz ist

$$\begin{aligned}\frac{\sin\alpha_3}{\sin\alpha_4} &= \frac{n_0}{n}\\ \sin\alpha_4 &= \frac{\sin\alpha_3\cdot n}{n_0} = \frac{\sin 31,65°\cdot 1,46}{1} = 0,7661\\ \alpha_4 &= 50°\end{aligned}$$

Der Einfallswinkel α_1 und der Austrittswinkel α_4 aus der Platte sind gleich groß. Die Platte führt also nur zu einer Versetzung des urspünglichen Strahls.

3.5 Die Totalreflexion

Die Totalreflexion ist trotz des Namens eine Spezialform der Brechung. Sie tritt nur bei der Brechung vom Lot auf, also entweder beim Austritt eines Strahls vom Medium ins Vakuum oder beim Übertritt vom optisch dichteren Medium zum optisch dünneren Medium ($n_1 > n_2$).
In der Abbildung sind einige Strahlen eingezeichnet, die den Übergang von der normalen Brechung hin zur Totalreflexion darstellen.



- Der erste Strahl fällt im Lot auf die Grenzfläche und wird daher nicht in seiner Richtung verändert.
- Der zweite Strahl hat den Einfallswinkel α_1 und wird im Winkel α_2 gebrochen.
- Bei der Brechung vom Lot kann es vorkommen, dass der Brechungswinkel α_2 sehr groß wird. Eine besondere Situation stellt der dritte Strahl dar. Hier ist der Einfallswinkel so groß, dass der Brechungswinkel genau 90° beträgt. Dann verläuft der gebrochene Strahl gerade in der Grenzfläche zwischen den beiden Medien. Dieser besondere Einfallswinkel wird Grenzwinkel α_{grenz} genannt.

- Wenn der Einfallswinkel jetzt noch größer gewählt wird (vierter Strahl), so kann der Strahl nicht mehr vom Medium 1 ins Medium 2 übertreten. Er wird vollkommen ins Medium 1 zurück reflektiert. Man spricht dann von Totalreflexion.

Der Grenzwinkel der Totalreflexion

Der Einfallswinkel, bei dem der gebrochene Strahl in der Grenzfläche verschwindet, nennt man Grenzwinkel der Totalreflexion. Dieser Grenzwinkel kann durch das Brechungsgesetz berechnet werden, wenn man für den Brechungswinkel $\alpha_2 = 90°$ einsetzt:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin \alpha_{\text{grenz}}}{\sin 90} = \frac{\sin \alpha_{\text{grenz}}}{1} = \frac{n_2}{n_1}$$

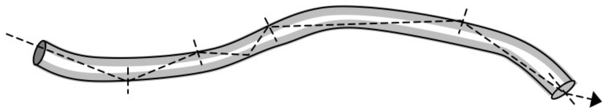
Es gilt:

Ist bei der Brechung vom Lot der Einfallswinkel α_1 größer als der Grenzwinkel α_{grenz}, so kann der Strahl aus dem Medium nicht mehr austreten und wird vollkommen ins Innere zurückreflektiert. Dies nennt man Totalreflexion. Der Grenzwinkel ist gegeben durch

$$\sin \alpha_{\text{grenz}} = \frac{n_2}{n_1} \tag{3.2}$$

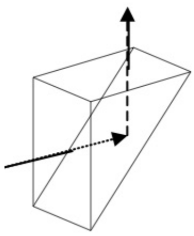
Anwendungen der Totalreflexion

- Glasfaserkabel:

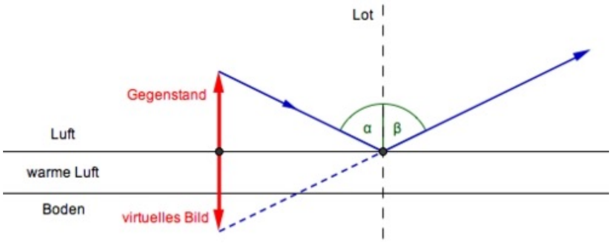


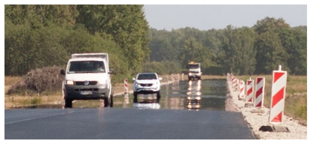
  - Datenübertragung:
    optische Datenübertragung hat eine höhere Bandbreite als elektrische Übertragung, es können mehr Information pro Zeiteinheit übertragen werden, die übertragenen Signale sind unempfindlicher gegenüber elektrischen und magnetischen Störfeldern
  - Beleuchtung und Dekoration:
    Herstellung von Lampen und Beleuchtungsinstallationen, Herstellung von Lichtbeton
  - Medizin:
    zur Beleuchtung und Abbildung bei Mikroskopen, Inspektionskameras oder Endoskopen
  - Sensoren:
    in der Messtechnik
  - Laser:
    zum Transport von Laserstrahlen, zur Erzeugung und Verstärkung von Laserstrahlen

- optische Geräte:
  totalreflektierende Prismen sind genauer als Spiegel und dienen der Umlenkung des Strahls

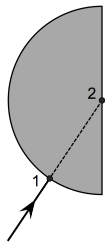


- Luftspiegelungen:
  Fata Morgana und "nasse Strasse" bei Hitze
  durch die warme Luftschicht ändert sich der Brechungsindex und es kommt zu Totalreflexionen



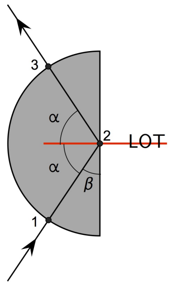


Beispiel (3.5)



Der Winkel zwischen Lichtstrahl und der vertikalen Grenzebene zwischen Medium ($n = 1,4$) und Vakuum beträgt $\beta = 40°$. Die Verlängerung des Strahls ist auf den Mittelpunkt des Halbkreises gerichtet.
Bestimmen Sie den Verlauf des Strahls beim Eintritt ins Medium (Punkt 1) und beim Wiederaustritt (Punkt 2)!

Lösung



Am Punkt 1 (Brechung zum Lot) fällt der Strahl genau im Lot auf die gekrümmte Oberfläche. Es findet daher keine Richtungsänderung statt, sondern nur eine Änderung der Wellenlänge und der Ausbreitungsgeschwindigkeit.

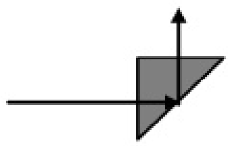
Der Strahl trifft daher am Punkt 2 wieder auf eine Grenzfläche. Hier findet ein Übergang von einem optisch dichten in ein optisch dünnen Medium statt, also eine Brechung vom Lot. Daher muß man eine mögliche Totalreflexion in Betracht ziehen.
Wir berechnen daher den Grenzwinkel der Totalreflexion

$$\sin \alpha_{\text{grenz}} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{1,4} = 0,714$$
$$\alpha_{\text{grenz}} = \arcsin 0,714 = 45,58°$$

Der Einfallswinkel beträgt $\alpha = 90° - \beta = 90° - 40° = 50°$. Es ist $\alpha > \alpha_{\text{grenz}}$ (Einfallswinkel größer als der Grenzwinkel), daher findet am Punkt 2 Totalreflexion statt und der Strahl nimmt den eingezeichneten Weg (Reflexionsgesetz).

Am Punkt 3 kann der Strahl das Medium verlassen, da der Strahl im Lot einfällt (Einfallswinkel gleich Null) und daher ohne Richtungsänderung durch geht.

Beispiel (3.6)



Die spitzen Winkel des dreiseitigen Prismas betragen je 45°.
a) Warum nimmt der Lichtstrahl den dargestellten Weg?
b) Wie groß muß der Brechungsindex des Prismas mindestens sein, damit der Lichtstrahl wie in der Abbildung verläuft?

Lösung

a) Der Lichtstrahl wird an der schiefen Fläche totalreflektiert. Durch die beiden anderen Flächen geht er jeweils ohne Richtungsänderung durch, da der Strahl jeweils im Lot einfällt.
b) Für die Totalreflexion muß der Einfallswinkel größer sein als der Grenzwinkel. Es lässt sich

hier leichter rechnen, wenn wir den Sinus auf diese Gleichung anwenden:

$$\alpha_E > \alpha_{\text{grenz}}$$
$$\sin\alpha_E > \sin\alpha_{\text{grenz}} = \frac{n_0}{n} = \frac{1}{n}$$
$$n > \frac{1}{\sin\alpha_E}$$

Der Einfallswinkel lässt sich in diesem Prisma leicht bestimmen: $\alpha_E = 45°$. Wir setzen ein

$$n > \frac{1}{\sin\alpha_E}$$
$$n > \frac{1}{\sin 45°} = \sqrt{2} = 1,414$$

Damit die dargestellte Totalreflexion eintritt muß der Brechungsindex des Mediums $n > 1,414$ sein.

3.6 Aufgaben

Wellen im Gitter

(3.1) In der Abbildung sind die Wellenfronten von verschiedenen Oszillatoren eingezeichnet. Die Wellenlänge ist λ und immer gleich groß.

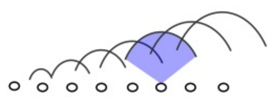
a) Wie nennt man die Anordnung der Moleküle im Festkörper? Wie heißen die Ebenen, die sich aus dieser Ordnung ergeben?
b) Bestimmen Sie, welche der abgebildeten Oszillatoren gleichphasig schwingen!
c) Welcher Oszillator hat als erster zu schwingen begonnen, welcher als letzter?

(3.2) Die Ausbreitungsrichtung einer ebenen elektromagnetischen Welle ($\lambda = 3$ cm) ist normal zur Gitterebene.
a) Mit welcher Frequenz schwingen die Oszillatoren auf den Gitterplätzen?
b) Welche Phasenverschiebung haben sie?
c) Skizzieren Sie die Oszillatoren und die entstehenden Kugelwellen! Welche Form hat die Welle, die durch die Überlagerung dieser Kugelwellen entsteht?

(3.3) Die Oszillatoren einer Gitterebene schwingen mit der Frequenz $f = 100$ GHz und haben eine Phasenverschiebung von $\Delta\varphi = 4°$.
a) Skizzieren Sie die hier beschriebene Situation! Welche Art von Welle erzeugen die Oszillatoren? Was entsteht bei der Überlagerung dieser Wellen?
b) Berechnen Sie die Wellenlänge der elektromagnetischen Welle!

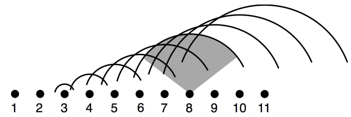
(3.4) Die Abbildung zeigt elektromagnetische Kugelwellen, die von Oszillatoren einer Gitterebene ausgehen. Die markierte Kugelwelle hat vom Oszillator den Abstand $\lambda = 6$ μm.

a) Die abgebildeten Kugelwellen verstärken sich zu einer neuen Welle. Wie nennt die geometrische Form einer solchen Welle? Zeichnen Sie ihre Ausbreitungsrichtung und die Fronten ein!
b) Berechnen Sie Frequenz f und Schwingungsdauer T der Welle!



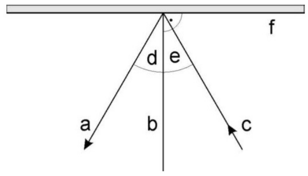
(3.5) Die Abbildung zeigt elektromagnetische Kugelwellen, die von Oszillatoren einer Gitterebene ausgehen. Die markierte Kugelwelle hat vom Oszillator den Abstand $\lambda = 3$ mm. Die abgebildeten Kugelwellen verstärken sich zu einer neuen Welle.

a) Wie nennt man die geometrische Form der neuen Welle? Zeichnen Sie die Ausbreitungsrichtung und die Fronten ein! Welcher Oszillator hat als erster zu schwingen begonnen, welcher als letzter?
b) Berechnen Sie Frequenz f und Schwingungsdauer T der Welle!



Reflexion

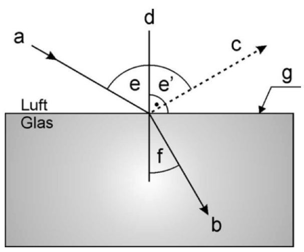
(3.6) a) Wie lautet das Reflexionsgesetz? Erklären Sie das Reflexionsgesetz im Wellenbild!
b) Benennen Sie die nebenstehende Abbildung richtig!



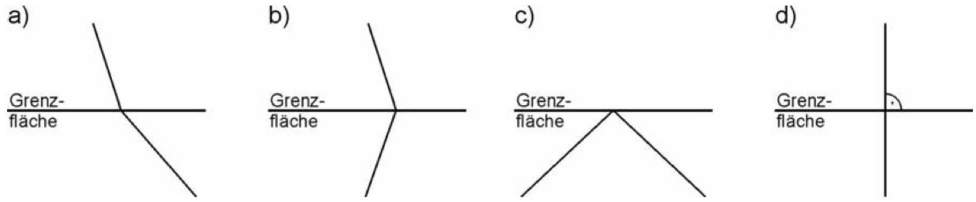
Brechung

(3.7) Ein Strahl wird beim Austritt aus einem Medium ins Vakuum gebrochen.
a) Wie heißt diese Art von Brechung?
b) Was können Sie über die beiden Winkel sagen?

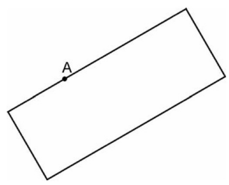
(3.8) a) Wie lautet das Brechungsgesetz?
b) Benennen Sie die nebenstehende Abbildung richtig!



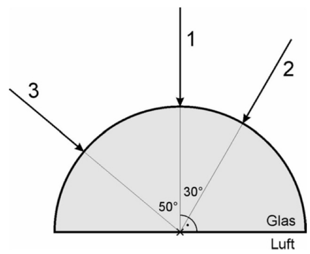
(3.9) Kann ein Lichtstrahl den eingezeichneten Verlauf haben?
Wenn der Strahlenverlauf richtig ist, so kennzeichnen Sie, wo das Medium Luft und wo das Medium Glas ist.



(3.10) Ein Lichtstrahl fällt unter dem Winkel von 60° zum Lot im Punkt A auf eine planparallele Glasplatte.
Berechnen und zeichnen Sie den gesamten Lichtweg bis zum Austritt des Lichtstrahls aus der Glasplatte! (Brechungsindex Glas $n = 1,5$)



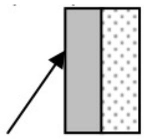
(3.11) Auf einen halbkreisförmigen Glaskörper (Brechungsindex Glas: $n = 1,2$) fallen drei Lichtstrahlen so, dass sie sich genau im Mittelpunkt der Kreislinie treffen.
Was passiert mit den einzelnen Strahlen im und außerhalb des Glaskörpers? (Rechnung)



(3.12) Ein Lichtstrahl läuft vom Vakuum in eine planparallele Glasplatte (gegenüber liegende Grenzebenen der Platte sind parallel, Brechungsindex $n = 1,4$). Der Winkel zwischen Strahl und

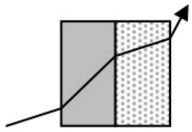
Plattenebene beträgt $\beta = 30°$.
Berechnen Sie die Richtungen des Strahls in der Platte und nach dem Austritt aus der Platte ins Vakuum! Handelt es sich um Brechungen vom Lot oder zum Lot?

(3.13) Der abgebildete Lichtstrahl schließt mit dem Lot einen Winkel von 60° ein. Das erste Medium hat die Brechzahl $n_1 = 1,3$, das zweite $n_2 = 1,8$.
Bestimmen sie den weiteren Verlauf des Strahls! (Drei Brechungen!)



(3.14) Wie Aufgabe *(3.13)* aber mit $n_1 = 1,8$ und $n_2 = 1,3$!

(3.15) In der Abbildung hat das linke Medium die Brechzahl $n_1 = 1,7$ und das rechte $n_2 = 1,2$. Welche Fehler enthält die Abbildung?

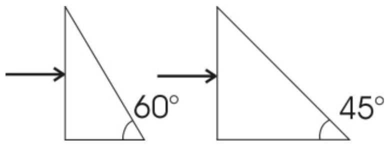


(3.16) Wie Aufgabe *(3.15)* aber mit $n_1 = 1,3$ und $n_2 = 1,8$. Welche Fehler hat die Abbildung jetzt?

Totalreflexion

(3.17) a) Was versteht man unter einer Brechung zum (vom) Lot. Wie hängt sie mit dem Brechungsindex in den Medien zusammen?
b) Bei welcher Art von Brechung kann Totalreflexion auftreten? Nennen Sie die Bedingung für den Eintritt der Totalreflexion! Nennen Sie zwei Anwendungen!

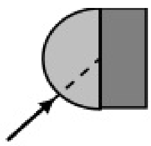
(3.18) a) Berechnen Sie den Grenzwinkel der Totalreflexion an der Grenzfläche Flintglas – Vakuum ($n = 1,75$)!
b) Auf zwei Prismen aus schwerem Flintglas fällt Licht. Entscheiden Sie für jedes der beiden Prismen, ob das Licht an der Grenzfläche Glas – Vakuum gebrochen oder total reflektiert wird! Begründen Sie Ihre Entscheidung!
c) Zeichnen Sie den Strahlenverlauf durch jedes der beiden Prismen!



(3.19) Der Winkel zwischen Einfallsstrahl und seinem Lot beträgt 45°. Bestimmen Sie den Verlauf des Strahls beim Eintritt ins Medium mit Brechungsindex $n = 1,2$ und beim Wiederaustritt!

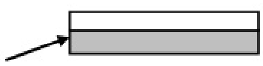
(3.20) Wie Aufgabe *(3.19)*, aber mit $n = 1,8$!

(3.21) Das halbkreisförmig Medium hat den Brechungskoeffizienten $n_1 = 1,2$, das zweite Medium hat $n_2 = 1,8$. Die Verlängerung des Lichtstrahls ist auf den Mittelpunkt des Halbkreises gerichtet. Der Winkel zwischen Grenzebene und Strahl beträgt 35°.
Berechnen Sie den Verlauf des Lichtstrahls beim Eintritt ins Medium, beim Übertritt zwischen den beiden Medien und beim Austritt ins Vakuum!



(3.22) Wie Aufgabe *(3.21)*, aber mit $n_1 = 1,8$ und $n_2 = 1,2$!

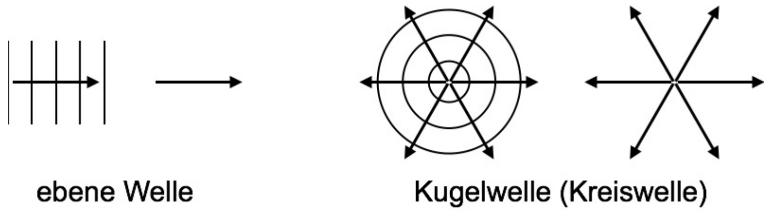
(3.23) Der Brechungskoeffizient des unteren Mediums ist $n_1 = 1,4$ und des oberen $n_2 = 1,6$. Der Winkel zwischen Strahl und Einfallslot beträgt 40°. Bestimmen Sie den weiteren Verlauf des Strahls beim Eintritt ins Medium, beim Übertritt zwischen den beiden Medien und beim Austritt ins Vakuum!



(3.24) Wie Aufgabe *(3.23)*, aber mit $n_1 = 1,8$ und $n_2 = 1,3$!

4 Geometrische Optik

Im Strahlenbild wird eine Welle nur durch ihre Ausbreitungsrichtungen dargestellt ohne die Wellenfronten einzuzeichnen.



Von jedem Punkt (Oszillator) eines Körpers geht eine Kugelwelle aus. Im Strahlenbild bedeutet dies, dass von jedem punktförmigen Bereich eines Gegenstandes ∞ viele Strahlen ausgehen.
Wir werden im Folgenden Licht (bzw. em Wellen) als Strahlen betrachten.
Durch optische Geräte (Spiegel, Linsen, Blenden) werden die Strahlen verändert. Von einem Gegenstand wird ein sogenanntes Abbild (oder nur Bild genannt) erzeugt.

4.1 Arten der Bildbeschreibung

In der geometrischen Optik befassen wir uns mit 3 Arten der Bildbeschreibung:

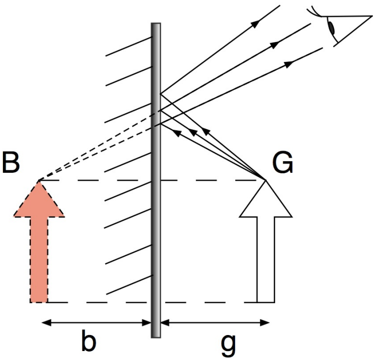
- Bildkonstruktion: das Bild wird zeichnerisch ermittelt
- Bildberechnung: das Bild wird rechnerisch ermittelt
- Bildcharakterisierung: das Bild wird sprachlich beschrieben

Wichtige Begriffe

Für die Bildcharakterisierung sind noch einige Begriffe nötig.

- reeles Bild (wirkliches Bild):
  Das Bild entsteht am Schnittpunkt der Strahlen selbst. Das Bild kann auf einem Schirm aufgefangen werden, es kann auch mit dem Auge gesehen werden.
- virtuelles Bild (scheinbares Bild, Scheinbild):
  Das Bild entsteht in der Verlängerung der Strahlen. Das Bild kann nicht auf einem Schirm aufgefangen werden, es kann aber mit einem anderen optischen System (z.B. Auge, Kamera) betrachtet werden.
- Vergrößerung $V = \frac{B}{G}$:
  Das ist das Verhältnis von Bildgröße B zu Gegenstandsgröße G.
  Es kann ein vergrößertes ($V > 1$), verkleinertes ($V < 1$) oder gleich großes ($V = 1$) Bild entstehen.
- Ausrichtung:
  Das Bild kann aufrecht oder verkehrt sein.
  Das Vorzeichen der Vergrößerung V gibt darüber Auskunft: $V > 0$: aufrecht, $V < 0$: verkehrt
- Ein reeles Bild ist immer verkehrt. Ein virtuelles Bild ist immer aufrecht.
- Das Gesetz von der Umkehrbarkeit der Strahlen:
  Jeder Strahl kann auch in der umgekehrten Richtung durchlaufen werden.

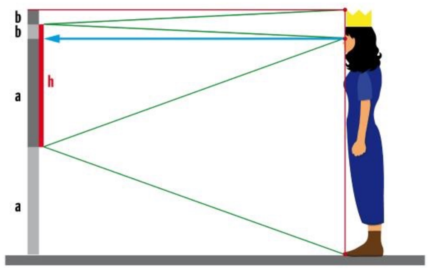
4.2 Der ebene Spiegel



Bei einem ebnene Spiegel wird das Licht an einer ebnenen Oberfläche reflektiert. Es gilt das Reflexionsgesetz.
Lichtstrahlen, die von einem Punkt des Gegenstandes ausgehen, treffen unter verschiedenen Einfallswinkeln auf den Spiegel und werden nach dem Reflexionsgesetz zurückgeworfen. Ein Teil der Strahlen gelangt in das Auge des Beobachters. Verlängert man diese Strahlen geradlinig nach hinten, so schneiden sie sich in einem Bildpunkt hinter dem Spiegel. Für den Betrachter scheint das ins Auge fallende Licht von diesem Punkt auszugehen.
Es gilt für den ebenen Spiegel:

- das Bild ist virtuell und aufrecht
- das Bild ist gleich groß wie der Gegenstand, $G = B$, $V = +1$
- Gegenstandsweite und Bildweite sind gleich groß, $|g| = |b|$

Wie groß muss ein Spiegel sein?



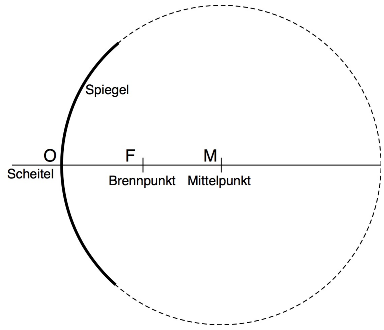
Manchmal möchte man sich in einem Spiegel vollständig sehen. Damit das der Fall ist, muss das Licht, das von den Füßen bzw. von den Haaren ausgeht, nach der Reflexion am Spiegel in die Augen gelangen. Da nach dem Reflexionsgesetz Einfallswinkel und Reflexionswinkel jeweils gleich sind, folgt: Die Größe des Spiegels muss gleich der halben Entfernung Fuß-Auge a plus der halben Entfernung Augen-Haare b sein. Ein ebener Spiegel muss also mindestens halb so hoch sein wie eine Person, die sich vollständig darin sehen will.

4.3 Gekrümmte Spiegel

Es gibt zwei Arten von gekrümmten Spiegeln:

- Konakvspiegel (Hohlspiegel, Sammelspiegel):
  Sie bündeln parallele Strahlen in einem Punkt dem Brennpunkt F. Der Abstand des Brennpunktes vom Mittelpunkt des Spiegels heißt Brennweite f. Es gilt $f > 0$.
- Konvexspiegel (Wölbspiegel, Zerstreuungsspiegel):
  Sie zerstreuen parallele Strahlen, sodass sie scheinbar von einem Punkt hinter dem Spiegel kommen, dem virturellen Brennpunkt F. Der Abstand des Brennpunktes vom Mittelpunkt des Spiegels heißt Brennweite f. Es gilt $f < 0$.

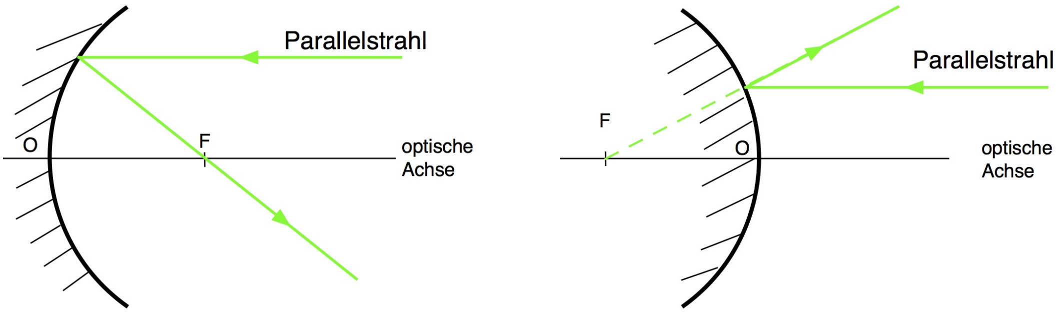
Eine besondere Art von gekrümmten Spiegeln sind die sphärischen Spiegel, die ein Teil einer Kugeloberfläche sind. Hier gilt: $f = \frac{r}{2}$, wobei r der Radius der Kugel ist. Es gibt aber auch noch andere Arten von Spiegeln (parabolische Spiegel, hyperbolische Spiegel).



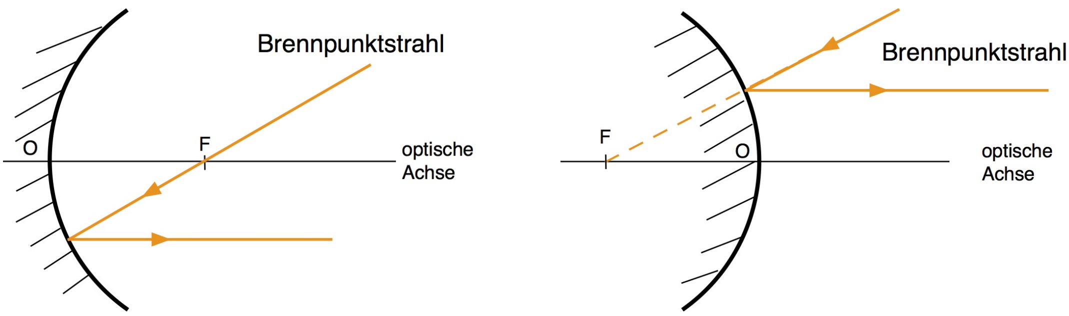
Wichtige Strahlen

Um das Bild bei einem gekrümmten Spiegel zu konstrukieren betrachtet man besondere Strahlen:

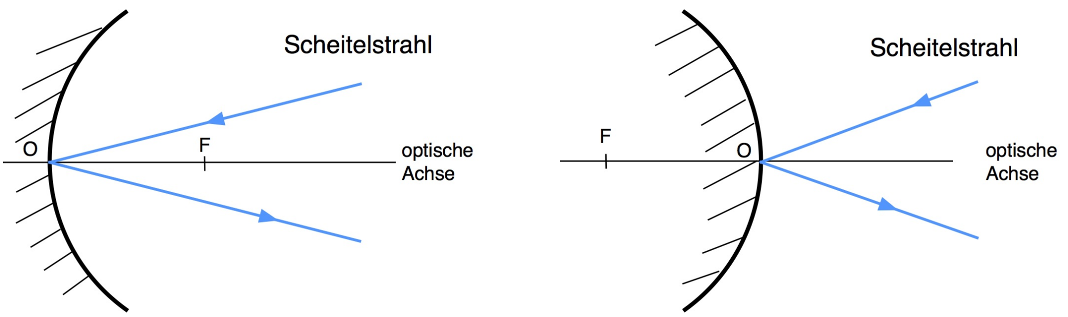
- Parallelstrahl:
  Dieser Strahl verläuft parallel zur optischen Achse und wird durch den Brennpunkt reflektiert.



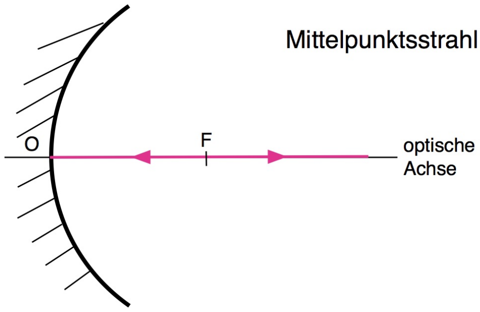
- Brennpunktsstrahl:
  Dieser Strahl verläuft durch den Brennpunkt und wird parallel zur optischen Achse reflektiert.

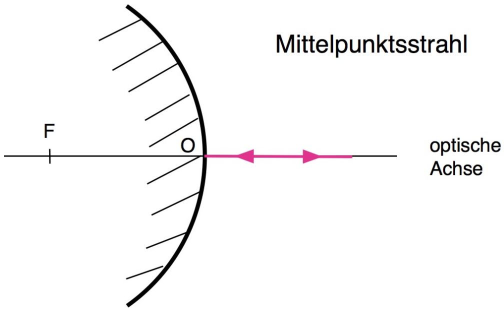


- Scheitelstrahl:
  Dieser Strahl verläuft durch den Scheitepunkt und wird symmetrisch zur optischen Achse reflektiert.



- Mittelpunktsstrahl:
  Dieser Strahl verläuft durch den Mittelpunkt der Kugel und wird in sich selbst zurück reflektiert.





Für die eigentliche Bildkonstruktion sind nur 2 Strahlen notwendig.

Spiegelgleichung

Für die Berechnung des Bildes ist die Spiegelgleichung notwendig

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \qquad \text{und} \qquad B \cdot g = -b \cdot G \tag{4.1}$$

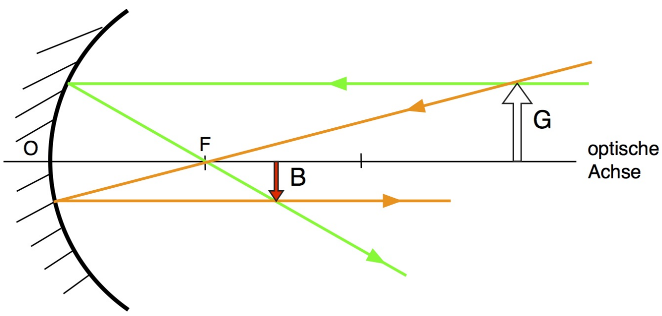
Hier ist
f ... Brennweite
g ... Gegenstandsweiteweite
b ... Bildweite
G ... Gegenstandsgröße
B ... Bildgröße

4.3.1 Abbildung am Konkavspiegel (Hohlspiegel)

Der Gegenstand G (Pfeil) befindet sich im Abstand g (Gegenstandsweite) vom Spiegel entfernt. Der Fußpunkt des Pfeils liegt auf der optischen Achse. Dadurch muss man nur den Bildpunkt der Pfeilspitze konstruieren. Meist verwenden wir den Parallelstrahl und den Brennpunktstrahl. Das Bild B entsteht im Abstand b (Bildweite) vom Spiegel entfernt. Der Brennpunkt F befindet sich im Abstand f (Brennweite) vom Spiegel entfernt.
Wir unterscheiden folgende Bereiche:

1. Gegenstand außerhalb der doppelten Brennweite ($g > 2f$)

Das Bild ist reell, verkehrt und verkleinert.
$g > 0,\ b > 0,\ f > 0$
$B < 0,\ V < 0,\ |V| < 1$



Beispiel (4.1)
Ein Gegenstandspunkt $G(g = 9|G = 0,5)$ wird durch einen Konkavspiegel mit Radius $r = 6$ m abgebildet. Bestimmen Sie das Bild B und die Vergrößerung V!

Lösung

Die Brennweite des Spiegels ist $f = \frac{r}{2} = 3$ m.
Mit der Spiegelgleichung erhält man für die Bildweite

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \\ \frac{1}{b} &= \frac{1}{f} - \frac{1}{g} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{3-1}{9} = \frac{2}{9} \\ b &= \frac{9}{2} = 4,5 \text{ m} \end{aligned}$$

und für die Bildgröße

$$\begin{aligned} B \cdot g &= -b \cdot G \\ B &= -\frac{b \cdot G}{g} = -\frac{4,5 \cdot 0,5}{9} = -0,25 \end{aligned}$$

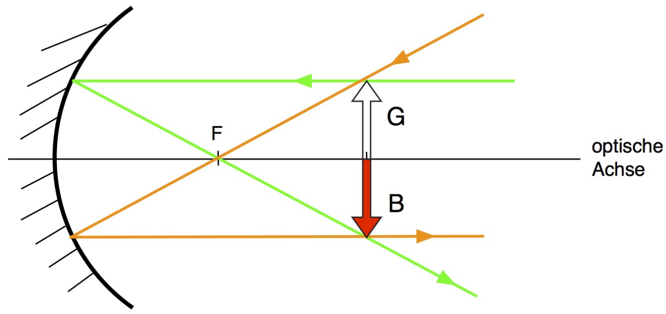
und die Vergrößerung

$$V = \frac{B}{G} = \frac{-0,25}{0,5} = -0,5$$

das bedeutet ein verkehrtes (reelles) und verkleinertes Bild.

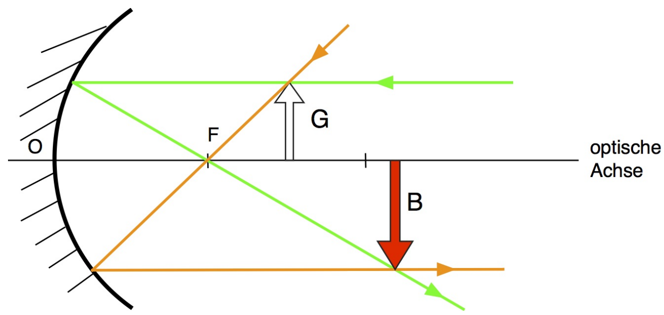
2. Gegenstand genau in der doppelten Brennweite ($g = 2f$)

Das Bild ist reell, verkehrt und gleich groß.
$g > 0$, $b > 0$, $f > 0$
$B = -G$, $V = -1$



3. Gegenstand zwischen einfacher und doppelter Brennweite ($f < g < 2f$)

Das Bild ist reell, verkehrt und vergrößert.
$g > 0$, $b > 0$, $f > 0$
$B < 0$, $V < 0$, $|V| > 1$



Beispiel (4.2)

Ein Gegenstandspunkt $G(g = 5|G = 0,5)$ wird durch einen Konkavspiegel mit Radius $r = 6$ m abgebildet. Bestimmen Sie das Bild B und die Vergrößerung V!

Lösung

Die Brennweite des Spiegels ist $f = \frac{r}{2} = 3$ m.

Mit der Spiegelgleichung erhält man für die Bildweite

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} &= \frac{1}{f} - \frac{1}{g} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{5-3}{15} = \frac{2}{15} \\ b &= \frac{15}{2} = 7,5 \text{ m} \end{aligned}$$

und für die Bildgröße

$$B = -\frac{b \cdot G}{g} = -\frac{7,5 \cdot 0,5}{5} = -0,75$$

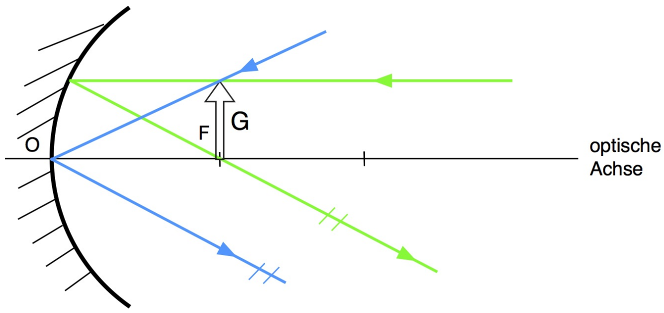
und die Vergrößerung

$$V = \frac{B}{G} = \frac{-0,75}{0,5} = -1,5$$

das bedeutet ein verkehrtes (reelles) und vergrößertes Bild.

4. Gegenstand genau in der einfachen Brennweite ($g = f$)

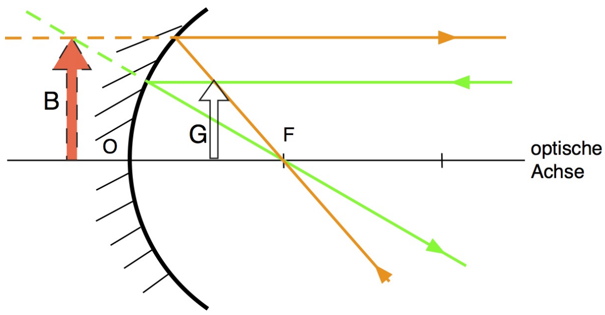
Die Strahlen nach der Reflexion sind parallel und haben keinen Schnittpunkt.
Das Bild ist unendlich groß und je nach Betrachtungsweise entsteht es im + Unendlichen (reelles Bidl) oder im − Unendlichen (virtuelles Bild).
$g > 0,\ f > 0$
$|V| = \infty$



Für das Auge ist es sehr angenehm, parallele Strahlen zu verarbeiten. Es braucht dabei seine Muskulatur nicht anzuspannen.

5. Gegenstand innerhalb der Brennweite ($g < f$)

Das Bild ist virtuell, aufrecht und vergrößert.
$g > 0,\ b < 0,\ f > 0$
$B > 0,\ V > 0,\ |V| > 1$



Diese Art von Spiegel wird bei einem Kosmetikspiegel verwendet.

Beispiel (4.3)

Ein Gegenstandspunkt $G(g = 2|G = 0,5)$ wird durch einen Konkavspiegel mit Radius $r = 6$ m abgebildet. Bestimmen Sie das Bild B und die Vergrößerung V!

Lösung

Die Brennweite des Spiegels ist $f = \frac{r}{2} = 3$ m.
Mit der Spiegelgleichung erhält man für die Bildweite

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} &= \frac{1}{f} - \frac{1}{g} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2-3}{6} = \frac{-1}{6} \\ b &= -6 \text{ m} \end{aligned}$$

und für die Bildgröße

$$B = -\frac{b \cdot G}{g} = -\frac{(-6) \cdot 0,5}{2} = +15$$

und die Vergrößerung

$$V = \frac{B}{G} = \frac{15}{0,5} = +30$$

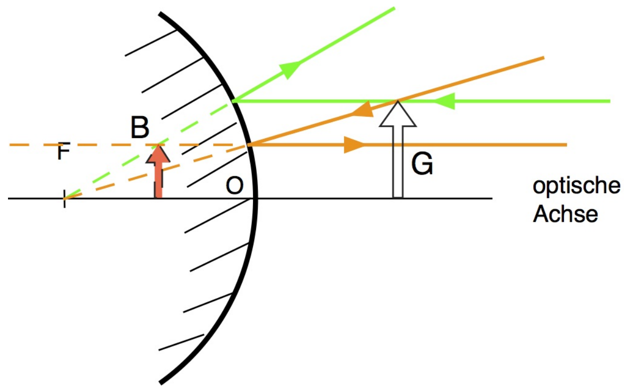
das bedeutet ein aufrechtes (virtuelles) und vergrößertes Bild.

4.3.2 Abbildung am Konvexspiegel (Wölbspiegel)

Der Gegenstand G (Pfeil) befindet sich im Abstand g (Gegenstandsweite) vom Spiegel entfernt. Der Fußpunkt des Pfeils liegt auf der optischen Achse. Dadurch muss man nur den Bildpunkt der Pfeilspitze konstruieren. Wir verwenden den Parallelstrahl und den Brennpunktstrahl. Das Bild B entsteht im Abstand b (Bildweite) vom Spiegel entfernt. Der Brennpunkt F befindet sich im Abstand f (Brennweite) hinter dem Spiegel.

Das Bild ist virtuell, aufrecht und verkleinert.
$g > 0,\ b < 0,\ f < 0$
$B > 0,\ V > 0,\ |V| < 1$

Mit solchen Spiegeln kann man große Gegenstände verkleinern. Sie werden zum Beispiel als Außenspiegel beim Auto benutzt.



Beispiel (4.4)

Ein Gegenstandspunkt $G(g = 2|G = 0,5)$ wird durch einen Konvexspiegel mit Radius $r = 6$ m abgebildet. Bestimmen Sie das Bild B und die Vergrößerung V!

Lösung

Die Brennweite des Konvexspiegels ist $f = -\frac{r}{2} = -3$ m.
Mit der Spiegelgleichung erhält man für die Bildweite

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} &= \frac{1}{f} - \frac{1}{g} = \frac{1}{-3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{-2-3}{6} = \frac{-5}{6} \\ b &= -\frac{6}{5} = -1,2 \text{ m} \end{aligned}$$

und für die Bildgröße

$$B = -\frac{b \cdot G}{g} = -\frac{(-1,2) \cdot 0,5}{2} = +0,3$$

und die Vergrößerung

$$V = \frac{B}{G} = \frac{0,3}{0,5} = +0,6$$

das bedeutet ein aufrechtes (virtuelles) und verkleinertes Bild.

Beispiel (4.5)

Ein Konkavspiegel hat den Krümmungsradius $r = 4$ m. In welchem Punkt muss der Gegenstand liegen, damit das Bild reell und doppelt so groß wie der Gegenstand ist?

Lösung

Die Brennweite ist $f = \frac{r}{2} = 2$ m.
Ein reelles Bild ist immer ein verkehrtes Bild. Die Vergrößerung ist dann negativ. Wir arbeiten mit dem zweiten Teil der Spiegelgleichung

$$V = \frac{B}{G} = -2 = -\frac{b}{g} \quad \rightarrow \quad b = 2 \cdot g$$

und setzten in den ersten Teil der Spiegelgleichung ein

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f} &= \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \\
\frac{1}{2} &= \frac{1}{2g} + \frac{1}{g} = \frac{1+2}{2g} = \frac{3}{2g} \\
2 &= \frac{2g}{3} \\
g &= 3 \text{ m}
\end{aligned}$$

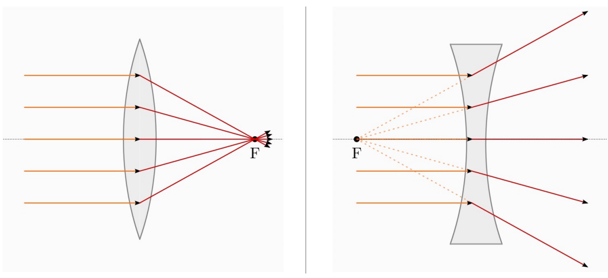
Der Gegenstand muß zwischen einfacher und doppelter Brennweite liegen.

4.4 Dünne Linsen

Eine Linse besteht aus zwei brechenden Kugelflächen, an denen die Strahlen gebrochen werden.
Es gibt zwei Arten von Linsen:

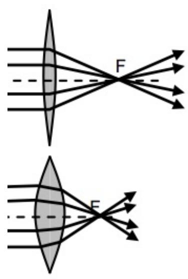
- Konvexlinse (Sammellinse):
  Sie bündeln parallele Strahlen in einem Punkt hinter der Linse, dem Brennpunkt F. Der Abstand des Brennpunktes von der Mittelebene der Linse heißt Brennweite f. Es gilt $f > 0$.

- Konkavlinse (Zerstreuungslinse):
  Sie zerstreuen parallele Strahlen, sodass sie scheinbar von einem Punkt vor der Linse kommen, dem virturellen Brennpunkt F. Der Abstand des Brennpunktes von der Mittelebene der Linse heißt Brennweite f. Es gilt $f < 0$.



Brechkraft

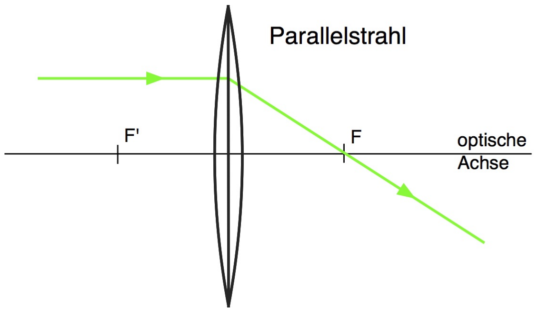
Die Zahl $D = \frac{1}{f}$ nennt man Brechkraft der Linse. Ihre Einheit heißt Dioptrie (1 dpt=1 m^{-1}). Für eine System von zwei dünnen Linsen, die nahe beisammen liegen, gilt $D_{\text{ges}} = D_1 + D_2$.
Je stärker die Linsenkrümmung, desto stärker ist die Brechkraft und desto kleiner ist die Brennweite.

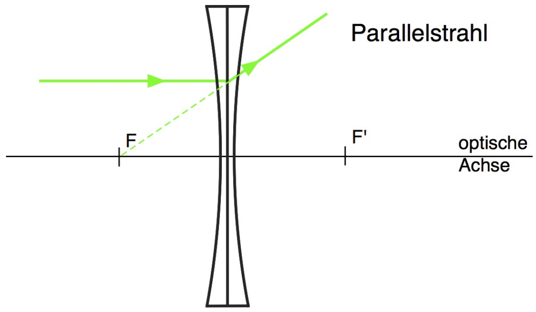


Wichtige Strahlen

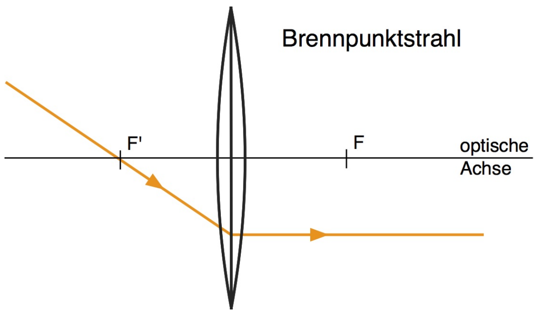
Um das Bild bei einer Linse zu konstrukieren betrachtet man besondere Strahlen:

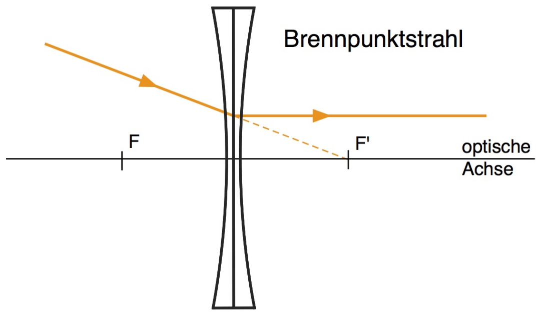
- Parallelstrahl:
  Dieser Strahl verläuft vor der Linse parallel zur optischen Achse. Er läuft nach der Brechung durch den Brennpunkt F.



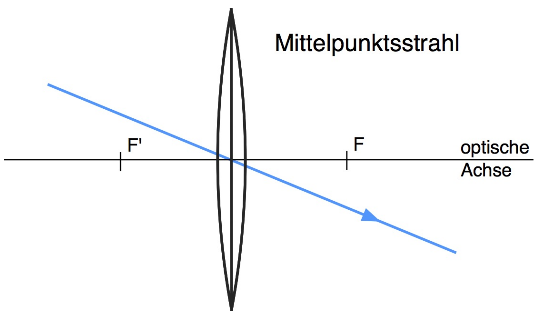


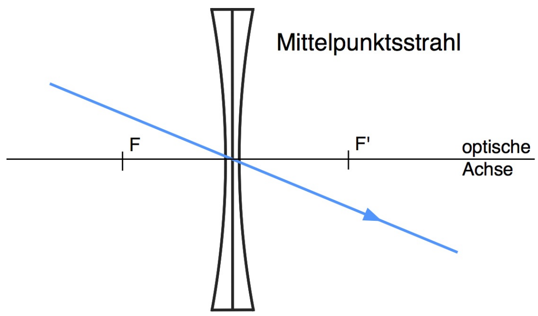
- Brennpunktsstrahl:
  Dieser Strahl verläuft vor der Linse durch den Brennpunkt F'. Nach der Brechung ist er parallel zur optischen Achse.





- Mittelpunktsstrahl:
  Dieser Strahl läuft (fast) ungehindert durch den Mittelpunkt der Linse durch.





Für die eigentliche Bildkonstruktion sind nur 2 Strahlen notwendig.

Linsengleichung

Für die Berechnung des Bildes ist die Linsengleichung notwendig

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} - \frac{1}{g} \qquad \text{und} \qquad B \cdot g = b \cdot G \tag{4.2}$$

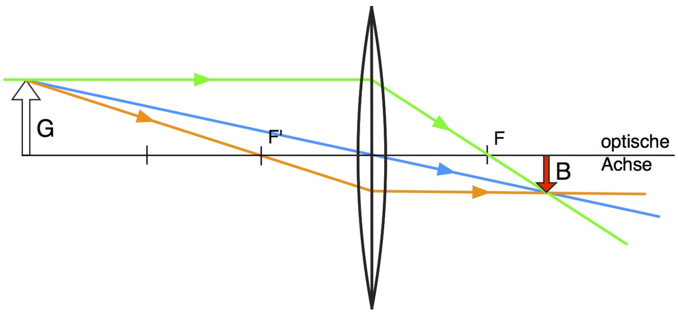
Hier ist
f ... Brennweite
g ... Gegenstandsweiteweite
b ... Bildweite
G ... Gegenstandsgröße
B ... Bildgröße

4.4.1 Abbildung an der Konvexlinse (Sammellinse)

Der Gegenstand G (Pfeil) befindet sich im Abstand g (Gegenstandsweite) von der LInse entfernt. Der Fußpunkt des Pfeils liegt auf der optischen Achse. Dadurch muss man nur den Bildpunkt der Pfeilspitze konstruieren. Meist verwenden wir den Parallelstrahl und den Miitelpunktstrahl. Das Bild B entsteht im Abstand b (Bildweite) von der Linse entfernt. Der Brennpunkt F befindet sich im Abstand f (Brennweite) von der Linse entfernt.
Wir unterscheiden folgende Bereiche:

1. Gegenstand außerhalb der doppelten Brennweite ($g > 2f$)

Das Bild ist reell, verkehrt und verkleinert.
$g < 0,\ b > 0,\ f > 0$
$B < 0,\ V < 0,\ |V| < 1$



Beispiel (4.6)

Ein Gegenstandspunkt $G(g = -6|G = 0,5)$ wird durch eine dünne Linse mit der Brechkraft $D = +0,5$ dpt abgebildet. Bestimmen Sie das Bild B und die Vergrößerung V!

Lösung

Die Brennweite der Linse ist $f = \frac{1}{D} = +2$ m.
Mit der LInsengleichung erhält man für die Bildweite

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= \frac{1}{b} - \frac{1}{g} \\ \frac{1}{b} &= \frac{1}{f} + \frac{1}{g} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3-1}{6} = \frac{2}{6} \\ b &= 3 \text{ m} \end{aligned}$$

und für die Bildgröße

$$\begin{aligned} B \cdot g &= b \cdot G \\ B &= \frac{b \cdot G}{g} = \frac{3 \cdot 0,5}{-6} = -0,25 \end{aligned}$$

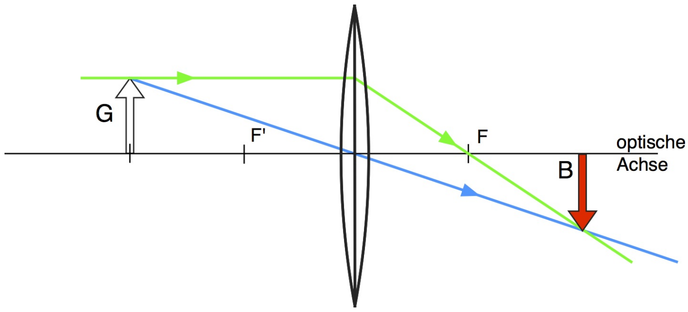
und die Vergrößerung

$$V = \frac{B}{G} = \frac{-0,25}{0,5} = -0,5$$

das bedeutet ein verkehrtes (reelles) und verkleinertes Bild.

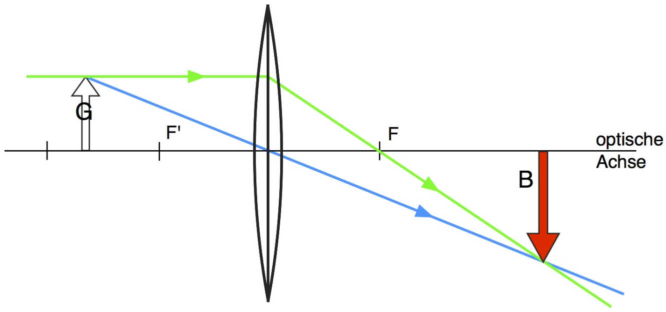
2. Gegenstand genau in der doppelten Brennweite ($g = 2f$)

Das Bild ist reell, verkehrt und gleich groß.
$g < 0,\ b > 0,\ f > 0$
$B = -G,\ V = -1$



3. Gegenstand zwischen einfacher und doppelter Brennweite ($f < g < 2f$)

Das Bild ist reell, verkehrt und vergrößert.
$g < 0,\ b > 0,\ f > 0$
$B < 0,\ V < 0,\ |V| > 1$



Beispiel (4.7)

Ein Gegenstandspunkt $G(g = -3|G = 0,5)$ wird durch eine dünne Linse mit der Brechkraft $D = +0,5$ dpt abgebildet. Bestimmen Sie das Bild B und die Vergrößerung V!

Lösung

Die Brennweite der Linse ist $f = \frac{1}{D} = +2$ m.
Mit der LInsengleichung erhält man für die Bildweite

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} &= \frac{1}{f} + \frac{1}{g} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6} \\ b &= 6 \text{ m} \end{aligned}$$

und für die Bildgröße

$$\begin{aligned} B \cdot g &= b \cdot G \\ B &= \frac{b \cdot G}{g} = \frac{6 \cdot 0,5}{-3} = -1 \end{aligned}$$

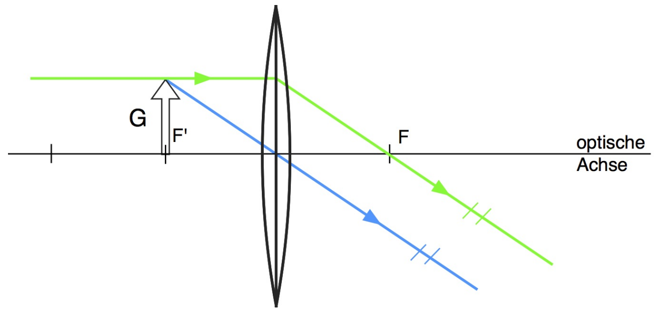
und die Vergrößerung

$$V = \frac{B}{G} = \frac{-1}{0,5} = -2$$

das bedeutet ein verkehrtes (reelles) und vergrößertes Bild.

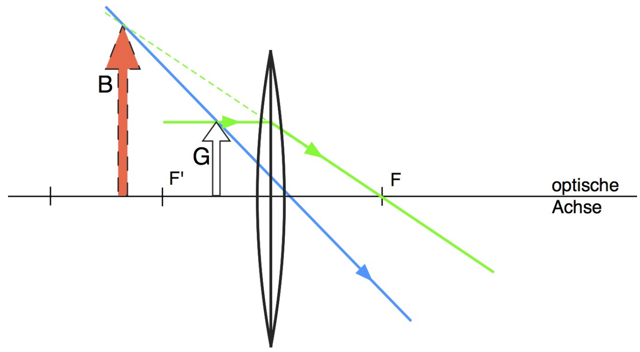
4. Gegenstand genau in der einfachen Brennweite ($g = f$)

Die Strahlen nach der Brechung sind parallel und haben keinen Schnittpunkt.
Das Bild ist unendlich groß und je nach Betrachtungsweise entsteht es im + Unendlichen (reelles Bidl) oder im − Unendlichen (virtuelles Bild).
$g < 0,\ f > 0$
$|V| = \infty$



5. Gegenstand innerhalb der Brennweite ($g < f$)

Das Bild ist virtuell, aufrecht und vergrößert.
$g < 0,\ b < 0,\ f > 0$
$B > 0,\ V > 0,\ |V| > 1$



Beispiel (4.8)

Ein Gegenstandspunkt $G(g = -1|G = 0,5)$ wird durch eine dünne Linse mit der Brechkraft $D = +0,5$ dpt abgebildet. Bestimmen Sie das Bild B und die Vergrößerung V!

Lösung

Die Brennweite der Linse ist $f = \frac{1}{D} = +2$ m.
Mit der LInsengleichung erhält man für die Bildweite

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} &= \frac{1}{f} + \frac{1}{g} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1} = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2} \\ b &= -2 \text{ m} \end{aligned}$$

und für die Bildgröße

$$\begin{aligned} B \cdot g &= b \cdot G \\ B &= \frac{b \cdot G}{g} = \frac{(-2) \cdot 0,5}{-1} = +1 \end{aligned}$$

und die Vergrößerung

$$V = \frac{B}{G} = \frac{+1}{0,5} = +2$$

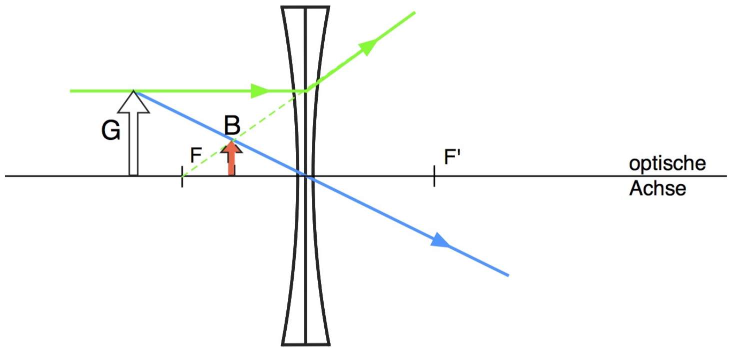
das bedeutet ein aufrechtes (virtuelles) und vergrößertes Bild.

4.4.2 Abbildung an der Konkavlinse (Zerstreuungslinse)

Der Gegenstand G (Pfeil) befindet sich im Abstand g (Gegenstandsweite) von der Linse entfernt. Der Fußpunkt des Pfeils liegt auf der optischen Achse. Dadurch muss man nur den Bildpunkt der Pfeilspitze konstruieren. Wir verwenden den Parallelstrahl und den Brennpunktstrahl. Das Bild B

entsteht im Abstand b (Bildweite) von der LInse entfernt. Der Brennpunkt F befindet sich im Abstand f (Brennweite) vor der Linse.

Das Bild ist virtuell, aufrecht und verkleinert.
$g < 0,\ b < 0,\ f < 0$
$B > 0,\ V > 0,\ |V| < 1$



Beispiel (4.9)

Ein Gegenstandspunkt $G(g = -1|G = 0,5)$ wird durch eine dünne Linse mit der Brechkraft $D = -0,5$ dpt abgebildet. Bestimmen Sie das Bild B und die Vergrößerung V!

Lösung

Die Brennweite der Linse ist $f = \frac{1}{D} = -2$ m.
Mit der LInsengleichung erhält man für die Bildweite

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} &= \frac{1}{f} + \frac{1}{g} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{1} = \frac{-1-2}{2} = -\frac{3}{2} \\ b &= -\frac{2}{3}\ \mathrm{m} \end{aligned}$$

und für die Bildgröße

$$\begin{aligned} B \cdot g &= b \cdot G \\ B &= \frac{b \cdot G}{g} = \frac{(-2/3) \cdot 0,5}{-1} = +\frac{1}{3} \end{aligned}$$

und die Vergrößerung

$$V = \frac{B}{G} = \frac{+1/3}{0,5} = +\frac{2}{3} = +0,667$$

das bedeutet ein aufrechtes (virtuelles) und verkleinertes Bild.

Beispiel (4.10)

Eine Konvexlinse hat $+2$ Dioptrien. In welchem Punkt muss der Gegenstand liegen, damit das Bild reell und doppelt so groß wie der Gegenstand ist?

Lösung

Die Brennweite ist $f = \frac{1}{D} = +0,5$ m.
Ein reelles Bild ist immer ein verkehrtes Bild. Die Vergrößerung ist dann negativ. Wir arbeiten mit dem zweiten Teil der Linsengleichung

$$V = \frac{B}{G} = -2 = \frac{b}{g} \quad \rightarrow \quad b = -2 \cdot g$$

und setzten in den ersten Teil der Linsengleichung ein

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f} &= \frac{1}{b} - \frac{1}{g} \\
\frac{1}{0,5} &= \frac{1}{-2g} - \frac{1}{g} = \frac{-1-2}{2g} = -\frac{3}{2g} \\
0,5 &= -\frac{2g}{3} \\
g &= -0,75 \text{ m}
\end{aligned}$$

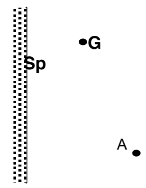
Der Gegenstand muß zwischen einfacher und doppelter Brennweite liegen.

4.5 Aufgaben

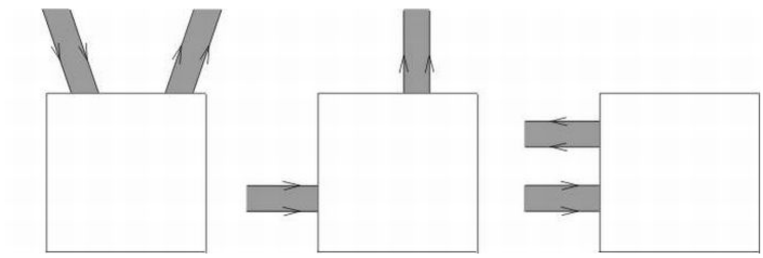
Ebener Spiegel

(4.1) a) Wie lautet das Reflexionsgesetz?
b) Zeichnen Sie den Strahlenverlauf an einem ebenen Spiegel und benennen Sie alle Teile der Skizze! Der Einfallswinkel beträgt 60°.

(4.2) a) Wo entsteht das Bild beim ebenen Spiegel? Handelt es sich um ein reelles oder virtuelles Bild, ist es aufrecht oder verkehrt, verkleinert oder vergrößert?
b) Zeichnen Sie den Verlauf des Lichtstrahls vom Gegenstandspunkt G über den ebenen Spiegel Sp zum Auge A!



(4.3) In den Kästen befinden sich Spiegel. Ergänzen Sie die Strahlenverläufe und zeichnen Sie die Lage der Spiegel ein!



Gekrümmte Spiegel

(4.4) Welche besonderen Strahlen sind für die Abbildung durch gekrümmte Spiegel wichtig?

(4.5) Sie besitzen einen Hohl- und einen Wölbspiegel, die beide den Krümmungsradius $r = 60$ cm haben. Beschreiben Sie Art, Lage und Größe des Bildes, das von einem Gegenstand erzeugt wird, der 20 cm vor dem jeweiligen Spiegel steht. (Rechnung + Konstruktion!)

(4.6) Bestimmen Sie Bildweite, Bildgröße, Vergrößerung und die Art des Bildes für die Abbildung eines Gegenstandes, der sich
a) 40 cm vor einem Hohlspiegel von 30 cm Brennweite befindet!
b) 30 cm vor einem Wölbspiegel von 60 cm Brennweite befindet!
(+ Konstruktion!)

(4.7) Wie weit muß ein Gegenstand von einem Hohlspiegel ($r = 20$ cm) entfernt sein, damit ein 5 mal so großes

a) reeles Bild entsteht?
b) virtuelles Bild entsteht?
Wie groß ist jeweils die Bildweite? (Skizze!)

(4.8) Der Gegenstandspunkt $G = (g = 3|G = 1/2)$ wird durch einen Konkavspiegel mit Krümmungsradius $r = 4$ m abgebildet. Bestimmen Sie den Bildpunkt $B(b|B)$, die Art des Bildes und die Vergrößerung in Zeichnung und Rechnung!

(4.9) Der Gegenstandspunkt $G(g = 1,5|G = 1/2)$ wird durch einen Konkavspiegel mit Krümmungsradius $r = 4$ m abgebildet. Bestimmen Sie den Bildpunkt $B(b|B)$, die Art des Bildes und die Vergrößerung in Zeichnung und Rechnung!

(4.10) Der Gegenstandspunkt $G(g = 1,5|G = 1/2)$ wird durch einen Konvexspiegel mit Krümmungsradius $r = 4$ m abgebildet. Bestimmen Sie den Bildpunkt $B(b|B)$, die Art des Bildes und die Vergrößerung in Zeichnung und Rechnung!

(4.11) Gegeben ist ein Konkavspiegel mit Krümmungsradius $r = 4$ m. In welchem Punkt muss der Gegenstand liegen, damit das Bild reell und drei mal so groß wie der Gegenstand ist?

Linsen

(4.12) Welche besonderen Strahlen sind für die Abbildung durch Linsen wichtig?

(4.13) Was bedeutet Brechkraft? Wie groß ist die Brechkraft eines Systems von zwei Sammellinsen mit 0,5 und 1 Dioptrien? Wie groß ist die Brechkraft eines Systems von einer Sammellinse und einer gleich starken Zerstreuungslinse?

(4.14) Wie kann man mit Hilfe des virtuellen Bildes schnell feststellen, ob man eine Konvex- oder eine Konkavlinse vor sich hat?

(4.15) Gegeben ist eine Konvexlinse mit 2 Dioptrien. In welchem Punkt muss der Gegenstand liegen, damit das Bild reell und dreimal so groß wie der Gegenstand ist? (Konstruktion!)

(4.16) Als Objektiv für einen einfachen Projektor (Beamer) soll eine einzelne dünne Linse verwendet werden. Die Bildweite beträgt 4 m und es soll eine 20 fache Vergrößerung erreicht werden. Berechnen Sie die Brennweite der Linse! (Skizze!)

(4.17) Mit einer Linse der Brennweite 120 mm wird ein Dia (= durchsichtiges Bild zur Projektion) mit der Größe von 6 cm auf einer Projektionswand, die 2,5 m von der Linse entfernt ist, scharf abgebildet.
Berechnen Sie die Größe des Bildes! (Skizze!)

(4.18) Konstruieren Sie den Gegenstand zu einem Bild, das 10 cm nach einer Linse entsteht und das 3 cm hoch ist. Die Brennweite der Sammellinse beträgt 4 cm. Charakterisieren Sie das Bild! Überprüfen Sie die Konstruktion durch eine Berechnung!

(4.19) Der Gegenstandspunkt $G(g = -3|G = 1/2)$ wird durch eine Konvexlinse mit 0,5 Dioptrien abgebildet. Bestimmen Sie den Bildpunkt $B(b|B)$, die Art des Bildes und die Vergrößerung in Zeichnung und Rechnung!

(4.20) Der Gegenstandspunkt $G(g = -1,5|G = 1/2)$ wird durch eine Konvexlinse mit 0,25 Dioptrien abgebildet. Bestimmen Sie den Bildpunkt $B(b|B)$, die Art des Bildes und die Vergrößerung in Zeichnung und Rechnung!

(4.21) Der Gegenstandspunkt $G(g = -1,5|1/2)$ wird durch eine Konkavlinse mit -0,5 Dioptrien abgebildet. Bestimmen Sie den Bildpunkt $B(b|B)$, die Art des Bildes und die Vergrößerung in Zeichnung und Rechnung!

5 Optische Instrumente

5.1 Die Kamera

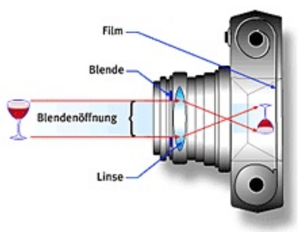
Die Kamera besteht aus einer Linse (Konvexlinse) und einem Film (Rollfilm oder CCD-Chip).
Das Bild von unterschiedlich weit entfernten Gegenständen entsteht an jeweils anderen Punkten. Bei der Kamera muß deshalb der Abstand zwischen Linse und Film entsprechend angepasst und verändert werden.

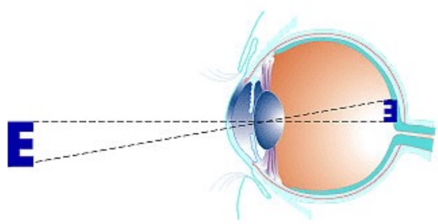
5.2 Das Auge

Das Auge besteht aus einer Linse (Konvexlinse) und einem Film (Netzhaut).

Vergleich Kamera – Auge

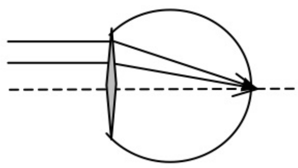
Bei der Kamera ist die Brennweite der Linse fix und die Bildweite (Abstand Linse-Film) variabel.
Beim Auge ist die Brennweite der Linse variabel (Akkommodation) und die Bildweite (Abstand Linse-Netzhaut) fix.



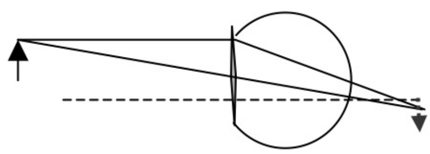


5.2.1 Normalsichtigkeit des Auges

Wenn G ∞ weit (sehr weit) entfernt ist,
sind die Strahlen, die von G ins Auge dringen parallel (fast parallel). Bei einem gesunden, normalsichtigen Auge schneiden sich solche Strahlen genau auf der Netzhaut, ohne daß, das Auge durch Muskelspannung die Linse verändern muß.
Ein normalsichtiges Auge beobachtet sehr weit entfernte (parallele Strahlen) Gegenstände im entspannten Zustand.
Im Auge entsteht ein umgekehrtes reelles Bild des Gegenstandes. (Dass das Bild umgekehrt ist, bemerken wir nicht, da wir seit Geburt daran gewöhnt sind.)

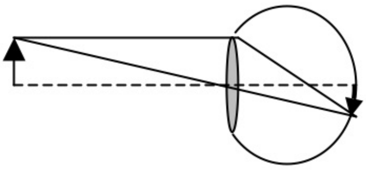


Wenn der Gegenstand näher ans Auge rückt, (wenn er sich in unserer Abbildung nach rechts bewegt), so bewegt sich auch B nach rechts. Bei unveränderter Linse würde dann das Bild hinter der Netzhaut entstehen. Auf der Netzhaut selbst hätte man nur ein unscharfes Bild.



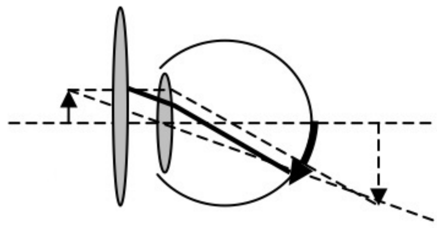
Das Bild muß also näher zur Linse gebracht werden. Das bedeutet, daß der Brennpunkt F näher zur Linse rücken muß. F muß kleiner werden $\Rightarrow$ r muß kleiner werden (weil r proportional zu f ist). Die Linse muß durch Muskelspannung eine stärkere Krümmung bekommen. Die Linse muß akkomodiert werden. Diese Akkommodation ist für g<10 m nötig

Gegenstände in geringer Entfernung beobachtet ein normal sichtiges Auge im Zustand der Muskelspannung. Je näher G ist, desto stärker muß die Linse durch Muskelspannung gekrümmt (akkomodiert) werden.



5.2.2 Das weitsichtige Auge

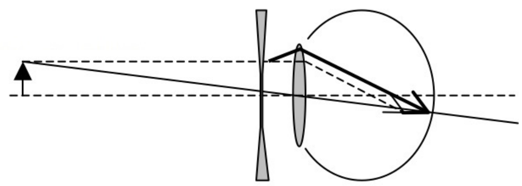
Weitsichtigkeit kann entweder im Alter entstehen (Altersweitsichtigkeit) oder durch einen zu kurzen Augapfel.
Gegenstände in besonders kurzer Entfernung hätten ihr Bild wieder hinter der Netzhaut. Mit einer Sammellinse vor dem Auge kann man das Bild weiter nach vorne bringen. Der gestrichelte Brennstrahl und das gestrichelte Bild hinter dem Auge zeigen die Verhältnisse ohne zusätzliche Linse. Der stark ausgezogene Strahl zeigt die Veränderung durch die Korrekturlinse.



Ein altersweitsichtiges Auge ist zu schwach, um die Linse besonders stark zu krümmen. Weitsichtigkeit kommt fast bei jedem gesunden Auge im Alter vor.

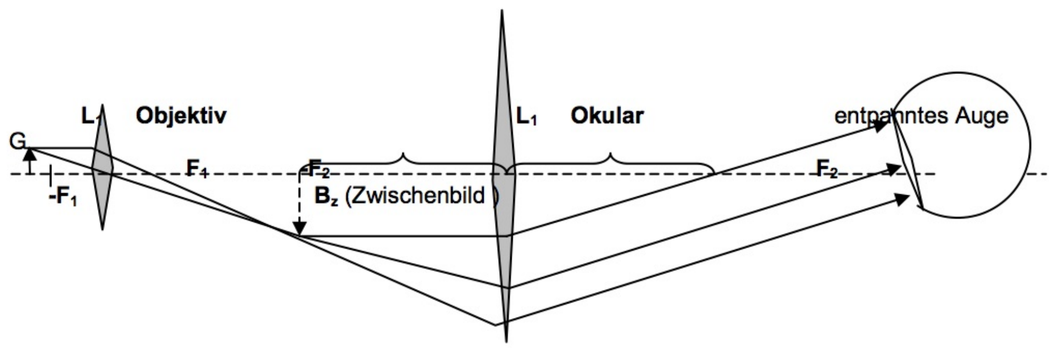
5.2.3 Das kurzsichtige Auge

Bei Kurzsichtigkeit ist der Augapfel ein bisschen zu lang. Hier liegen die Bilder von weit entfernten Gegenständen zwischen Netzhaut und Linse, also zu weit vorne. Nur Gegenstände, die sehr nahe an de Linse liegen, werden noch auf der Netzhaut abgebildet. Akommodation, also Muskelspannung nützt nichts, sie würde die Bilder noch weiter nach vorne bringen. Die Korrektur erfolgt durch eine Zerstreuungslinse. Diese wählt man so stark, daß weit entfernte Gegenstände ohne Akkomodation auf der Netzhaut abgebildet werden und für nahe Gegenstände trotzdem eine Akkomodation nötig ist.



5.3 Das Mikroskop

Es dient der Vergrößerung von sehr kleinen Gegenständen, die nahe am Mikroskop liegen. Ein einfaches Mikroskop besteht aus zwei Linsen (Konvexlinsen).

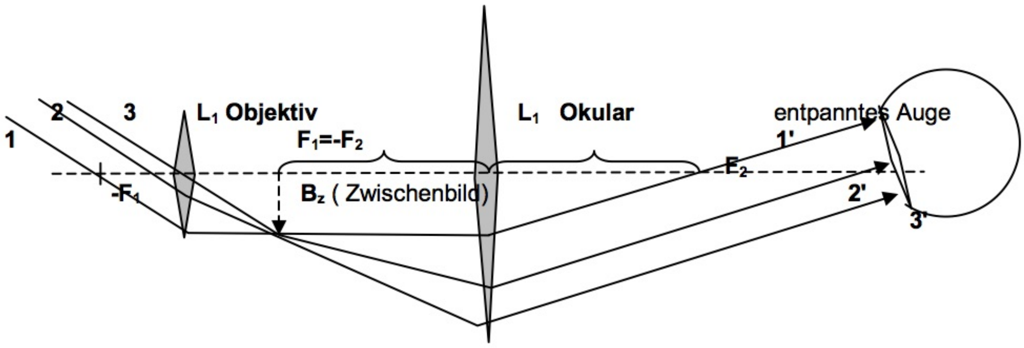


Die erste Linse L_1 heißt Objektivlinse und ist kurzbrennweitig. Sie erzeugt ein stark vergrößertes Zwischenbild B_z des Gegenstandes G. Die zweite Linse L_2 heißt Okularlinse, ist kurzbrennweitig und erzeugt ein Bild des Zwischenbildes. Wenn der Gegenstand mit dem Auge betrachtet werden soll, muß das Zwischenbild genau im Brennpunkt der zweiten Linse liegen, damit die Strahlen nach der Brechung durch L_2 parallel in das Auge gehen. Dies ist notwendig, damit im Auge ohne Muskelspannung scharfe Bilder auf der Netzhaut entstehen.

Die Abbildung zeigt ein Mikroskop mit zwei Sammellinsen. Das Objektiv hat eine kleine Brennweite und vergrößert stark. G liegt außerhalb der Brennweite f_1 des Objektivs. Das Zwischenbild ist reell. Es gibt auch andere Bauarten des Mikroskops. Auch die Verwendung von Spiegeln statt Linsen ist gebräuchlich.

5.4 Das Teleskop (Fernrohr)

Das Fernrohr dient der Vergrößerung von Gegenständen die sehr weit entfernt sind, deren Strahlen also parallel ins Fernrohr einfallen. Es besteht aus zwei Linsen (Konvexlinsen).



Die erste Linse L_1 heißt Objektivlinse und ist langbrennweitig. Sie erzeugt ein Zwischenbild B_z. Die zweite Linse L_2 heißt Objektivlinse und ist kurzbrennweitig. Sie erzeugt ein Bild dieses Zwischenbildes. Wenn es mit entspanntem Auge betrachtet werden soll, müssen die Brennpunkte beider Linsen am Ort des Zwischenbildes zusammen fallen: $F_1 = -F_2$.
Die Vergrößerung eines Teleskops ist $V = \frac{f_1}{f_2}$.

5.5 Aufgaben

Auge, Kamera, Mikroskop, Teleskop

(5.1) Die Brennweite des auf die Ferne eingestellten "optischen Systems Auge" beträgt beim Normalsichtigen ca. 25 mm.
a) Wie groß ist damit der Abstand der Augenlinse zur Netzhaut?
b) Welche Brennweite muss die Augenlinse aufweisen, wenn sie auf einen 35 cm entfernten Gegenstand scharfstellen soll?
c) Durch welche Maßnahme wird die veränderliche Brennweite beim Auge erreicht?

(5.2) Erscheint das Auge einer weitsichtigen Person größer oder kleiner, wenn man ihr durch ihre Brille in die Augen schaut? Wie ist das bei kurzsichtigen Personen?

(5.3) Beim Auge einer Person liegt das Bild weit entfernter Gegenstände vor der Netzhaut. Welche Art von Fehlsichtigkeit liegt vor? Wie ist diese zu korrigieren?

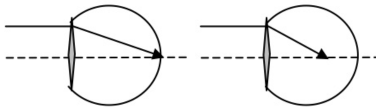
(5.4) Beschreiben Sie kurz die Verhältnisse beim gesunden, beim weitsichtigen und beim kurzsichtigen Auge!

(5.5) Ein bestimmter Patient braucht für die Korrektur seiner Fehlsichtigkeit eine Sammellinse. Welche Art von Fehlsichtigkeit liegt vor? Wo einstehen die Bilder von weit entfernten und von nahen Gegenständen mit und ohne diese Korrekturbrille?

(5.6) Welche Gegenstände (weit entfernte oder nahe) werden im gesunden Auge ungefähr auf der Netzhaut abgebildet? Was muss geschehen, damit auch bei Änderung dieser Entfernung ein scharfes Bild entsteht?

(5.7) Eine kurzsichtige Person hat ihre Brille vergessen. Welche Gegenstände (entfernte oder nahe) sieht sie schlecht? Wird sie besser sehen, wenn sie sich sehr bemüht und versucht, zu akkommodieren?

(5.8) a) Welches der beiden Augen ist normalsichtig, welches ist fehlsichtig?
b) Wie heißt die Fehlsichtigkeit und wie kann sie korrigiert werden?



(5.9) a) Nennen Sie die Gemeinsamkeiten und die Unterschiede zwischen Kamera und Auge!
b) Nennen Sie die Gemeinsamkeiten und die Unterschiede zwischen Mikroskop und Fernrohr!

(5.10) Wo befindet sich der Gegenstandspunkt bei einer Lupe? Welche Art von Bild entsteht dabei wo? In welchem Spannungszustand betrachtet ein gesundes Auge das Bild, das von der Lupe erzeugt wird?

(5.11) a) Beschreiben sie den Strahlengang in einem Mikroskop!
b) Beschreiben sie den Strahlengang in einem Teleskop!

(5.12) Bei einem einfachen Mikroskop hat das Objektiv die Brennweite 12 mm und das Okular die Brennweite 20 mm. Die beiden Linsen sind 20 cm voneinander entfernt.
In welcher Entfernung vor dem Objektiv muß sich der Gegenstand befinden, damit das Endbild im Unendlichen entsteht? (So kann man mit entspanntem Auge in das Mikroskop blicken!) (Skizze!)

6 Wellenoptik

6.1 Die Beugnung von em Wellen

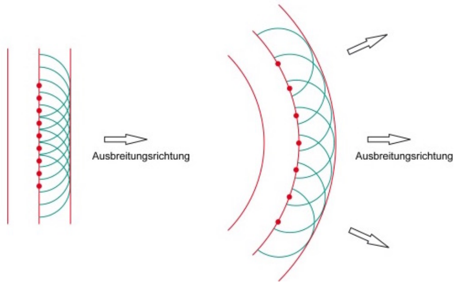
Unter der Beungung einer em Welle versteht man die Änderung der Ausbreitungsrichtung an einem Hindernis.

Das Prinzip von Huygens

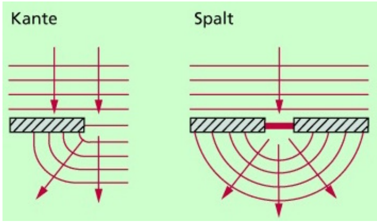
Der niederländische Physiker Christiaan Huygens (1629-1695) entwickelte das nach ihm benannte Prinzip der Ausbreitung von Wellen. Mithilfe des huygensschen Prinzips kann man die Ausbreitung von Wellen, die Reflexion und Brechung sowie die Beugung beschreiben und erklären.

Das Prinzip von Huygens. Jeder Punkt, der von einer Welle getroffen wird, ist Ausgangspunkt einer kugelförmigen Elementarwelle. Die Elementarwellen überlagern sich zu einer neuen Wellenfront.

An jedem Punkt einer Wellenfront eintsteht also eine neue Kugelwelle mit derselben Frequenz und Wellenlänge. Diese Wellen nennt man Elementarwellen. Die neue Welle entsteht dadurch, dass sich diese Elementarwellen überlagern. Die neue Wellenfront ist dann die Einhüllende all dieser Kugelwellen. In der Abbildung ist das für eine ebene Welle und eine Kugelwellen dargestellt.



6.1.1 Die Beugung einer Welle



Bei ebenen Wellen ändert sich normalerweise die Ausbreitungsrichtung nicht. Das Prinzip von Huygens sagt aber, dass bei Hindernissen durch die Entstehung von Kugelwellen an den Ecken neue Ausbreitungsrichtungen hinzukommen. Dies nennt man Beugung der Welle. Man sagt, die Welle wird am Hindernis gebeugt.
Die Beugung tritt bei Ecken und Kanten, aber auch Löchern, Spalten und Blenden auf. Man sagt, die Welle kann auch in den geometrischen Schatten eines Hindernisses eindringen.
Bei der Beugung an Blenden, Löchern oder Spalten darf die Öffnung nicht zu groß sein. Im Allgemeinen muß die Öffnung in der Größenordnung der Wellenlänge des Strahls sein.

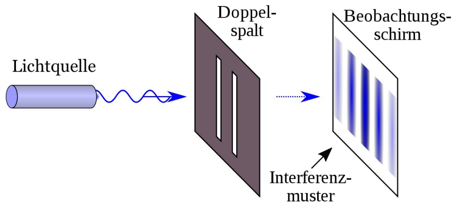
Beispiel

Beugung von Schallwellen:
Schallwellen haben Wellenlängen in der Größenordnung von ≈ 1 m, darum findet Beugung an ebenso großen Objekten statt (z.B. Türen) und man kann "um die Ecke hören"

Beispiel

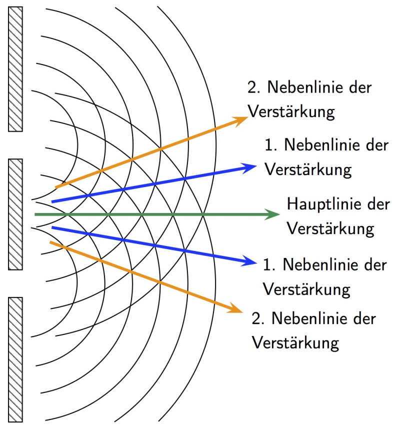
Beugung von Lichtwellen:
Lichtwellen haben Wellenlängen in der Größenordnung von $\approx 1\ \mu$m, darum findet Beugung z.B. an menschlichen Haaren statt und nicht bei makroskopischen Objekten; deshalb kann man nicht "um die Ecke sehen"

6.1.2 Beugung und Interferenz am Doppelspalt



Ein Doppelspalt besteht aus zwei kleinen Spalten oder Löchern. Wenn Licht (oder allgemeiner eine em Welle) auf diesen Doppelspalt fällt, so wird es gebeut. Es entstehen zwei Kugelwellen, die sich überlagern (interferieren). Diese überlagerte Welle kann man auf einem Schirm (z.B. ein Blatt Papier) wieder auffangen. Man sieht dann ein Muster von hellen und dunklen Linien, das Interferenzmuster.
Wenn eine Welle auf einen Doppelspalt trifft, so entstehen an den beiden Öffnungen des Spaltes zwei gleichphasige Kugelwellen. Die Kreise in der Abbildung sollen die Wellenfronten dieser Kugelwellen darstellen. Dort, wo sie zusammentreffen, verstärken sich die Wellen. die Pfeile deuten die Richtungen an, in welchen man Verstärkung erwartet.
Die überlagerten Kugelwellen werden in einer bestimmten Entfernung auf einem Schirm aufgefangen. Dort nimmt man ein Muster (= Interferenzmuster) von abwechselnd hellen und dunklen Streifen wahr.

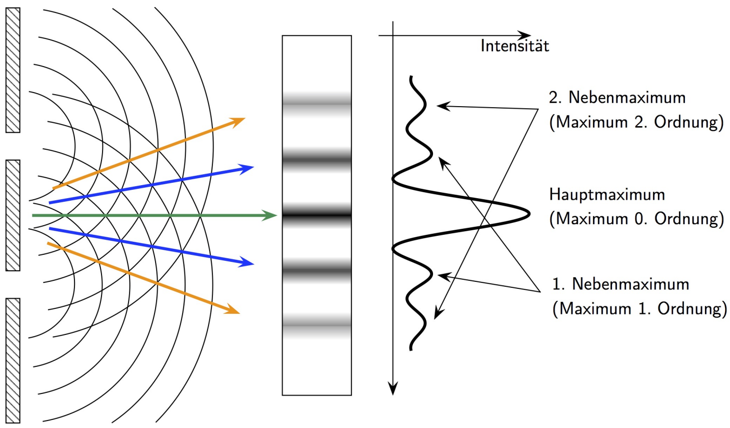
- Die maximale Verstärkung (konstruktive Interferenz) erhält man entlang einer horizontalen Geraden, die vom Mittelpunkt zwischen den beiden Spaltöffnungen ausgeht. Diese Richtung wird Hauptrichtung der Verstärkung genannt.
  Auf einem gegenüberliegenden Schirm ist eine sehr helle Linie zu sehen. Man nennt sie Beugungsmaximum nullter Ordnung.



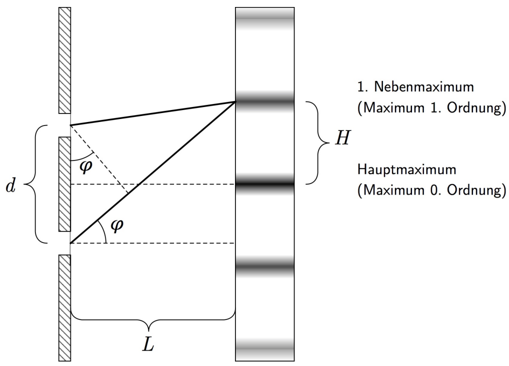
- Unterhalb und oberhalb der Hauptrichtung gibt es wieder je eine Richtung, in welcher sich die Kugelwellen auch verstärken, aber mit etwas weniger Intensität. Diese Richtungen nennt man erste Nebenlinien der Verstärkung.
  Auf einem Schirm kann man dies als helle Nachbarlinien sehen. Man nennt sie Beugungsmaxima erster Ordnung.

- Die nächsten Richtungen weiter außen heißen zweite Nebenrichtung der Verstärkung und die Linien im Beugungsbild nennt man Beugungsmaxima zweiter Ordnung.

- Genau zwischen den Verstärkungsrichtungen treffen je ein Berg der einen Welle und ein Tal der anderen Welle aufeinander, dort löschen sich die beiden Kugelwellen aus und es entsteht eine dunkle Stelle auf dem Schirm (destruktive Interferenz). Man nennt sie Beugungsminium.



Messung der Wellenlänge von em Wellen mit dem Doppelspalt



Das Interferenzmuster wird auf einem Schirm aufgefangen, der die Entfernung L vom Doppelspalt hat. Die beiden Spalte haben den Abstand d voneinander und sind im Vergleich zur Wellenlänge sehr klein.
Das Maximum 0. Ordnung entsteht genau in der Verlängerung des Mittelpunkts der beiden Spalten. Das Maxiumum 1. Ordnung entsteht in einem Abstand H davon. Das Interferenzbild ist in beide Seiten symmetrisch.
Das Maxiumum 1. Ordnung entsteht, wenn sich die beiden eingezeichneten Strahlen konstruktiv überlagern. Dazu muss ihr Wegunterschied genau eine Wellenlänge betragen. Daraus kann man den Winkel φ berechnen.
Es gilt:

$$\sin\varphi = \frac{\lambda}{d} \quad \longrightarrow \quad \lambda = d \cdot \sin\varphi \tag{6.1}$$

$$\tan\varphi = \frac{H + \frac{d}{2}}{L} \tag{6.2}$$

Meist sind die Winkel und Abstände sehr klein.

Dieses Verfahren kann nicht nur für sichtbares Licht verwendet werden. Bei anderen Wellenlängen der em Wellen muß man allerdings die Abmessungen des Doppelspaltes entsprechend anpassen. Für Röntgenstrahlen werden z.B. Kristalle und Gitter dafür benutzt. Damit kann man sowohl die Wellenlänge von Röntgenstrahlen, als auch den Abstand der Gitterpunkte im Kristall messen.

Beispiel (6.1)

Licht wird an einem Doppelspalt mit $d = 0,03$ mm gebeugt. Dabei entsteht auf einem 2 cm entfernten Schirm ein Beugungsmaximum 1. Ordnung, das vom Maximum 0. Ordnung den Abstand 0,4 mm hat. Bestimmen Sie die Wellenlänge des Lichts!

Lösung

Wir verwenden die zweite Formel und berechnen zuerst den Winkel

$$\tan\varphi = \frac{H + \frac{d}{2}}{L} = \frac{0,4 \cdot 10^{-3} + \frac{0,03 \cdot 10^{-3}}{2}}{2 \cdot 10^{-2}} = 0,02075$$
$$\varphi = \arctan 0,02075 = 1,189^\circ$$

mit der ersten Formel können wir jetzt die Wellenlänge bestimmen.

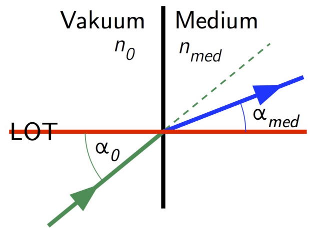
$$\lambda = d \cdot \sin\varphi = 0,03 \cdot 10^{-3} \cdot \sin 1,189^\circ = 6,22 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 0,622\ \mu\text{m}$$

Es handelt sich um sichtbares Licht, das im roten Bereich liegt.

6.2 Die Dispersion von em Wellen

6.2.1 Der Begriff

Bei der Brechung wurde festgestellt:
Der Brechungsindex eines Mediums $n = n_{\text{med}} = \frac{c_0}{c_{\text{med}}}$ ist eine Konstante.
Je größer der Brechungsindex, desto größer ist die Abweichung des Strahls und damit der Unterschied zwischen α_0 im Vakuum und α_{med} im Medium.
Man sagt, je größer n ist, desto stärker ist die Brechung.
Das ist aber nicht ganz richtig. Man stellt nämlich fest:



Der Brechungsindex n eines Mediums hängt auch von der Wellenlänge bzw. der Frequenz der einfallenden Welle ab. Dies nennt man Dispersion.

Es gilt:

- große Frequenz, kleine Wellenlänge:
  großer Brechungsindex, große Abweichung des gebrochenen Strahls, kleine Geschwindigkeit
- kleine Frequenz, große Wellenlänge:
  kleiner Brechungsindex, kleine Abweichung des gebrochenen Strahls, große Geschwindigkeit
- kurzwellige Wellen (blaues Licht) werden stärker gebrochen als langwellige Wellen (rotes Licht)

Beispiel (6.2)

In Glas ist der Brechungsindex von der Frequenz des Lichts abhängig. Zwei kurze Lichtpulse mit den Wellenlängen $\lambda_1 = 500$ nm (grünes Licht) und $\lambda_2 = 700$ nm (rotes Licht) werden gleichzeitig in eine 15 km lange Glasfaser geschickt.
a) Welches Licht ist schneller?
b) Berechnen Sie mit welcher Zeitdifferenz die beiden Pulse am Ende der Glasfaser ankommen, wenn die Brechungsindizes $n_1 = 1,55$ (für λ_1) und $n_2 = 1,5$ (für λ_2) sind!

Lösung

a) Das Licht mit dem kleineren Brechungsindex ist schneller, also das rote Licht (λ_2).

b) Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen ist

$$c_{\text{med}} = \frac{c_0}{n}$$

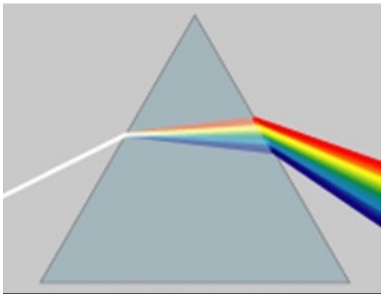
wenn man nun die Zeit t, die das Licht benötigt, ausrechnet

$$t = \frac{L}{c_{\text{med}}} = \frac{L \cdot n}{c_0}$$

so kann man die Zeitdifferenz berechnen

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{L}{c_0}(n_1 - n_2) = \frac{15 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8}(1,55 - 1,5) = 2,5 \cdot 10^{-6}\ \text{s} = 2,5\ \mu s$$

6.2.2 Die Farben des Lichts



Farbe	Wellenlänge [nm]	Frequenz [THz]
rot	~ 790 - 630	~ 379 - 476
orange	~ 630 - 580	~ 476 - 517
gelb	~ 580 - 560	~ 517 - 535
grün	~ 560 - 480	~ 535 - 624
blau	~ 480 - 420	~ 624 - 714
violett	~ 420 - 390	~714 - 769

Wenn weißes Licht auf ein Prisma aus Glas fällt, so wird der Strahl gebrochen und durch die Dispersion in viele verschiedene Farben zerlegt. Man sieht nach dem Prisma die Farben Rot – Orange – Gelb – Grün – Blau – Violett. Es gibt ∞ viele verschiedene Farbtöne, die verlaufend (das heißt ohne Zwischenraum) angeordnet sind. Es entsteht ein kontinuierliches Spektrum. Farben, die auf diese Weise entstehen heißen Spektralfarben. Jeder Spektralfarbe entspricht eine bestimmte Wellenlänge.

Eine Farbe die sich nicht mehr in mehrere Farben zerlegen läßt, nennt man monochromatisches Licht.

Alle Farben zusammen ergeben Weiß.

Die größten Wellenlängen (kleinsten Frequenzen) haben die roten Farben ($\lambda \approx 700$ nm). Sie haben den kleinsten Brechungsindex und werden am wenigsten gebrochen und daher abgelenkt.

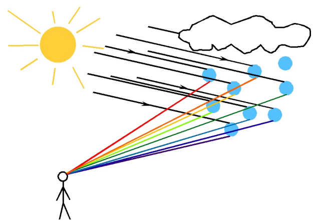
Die kleinsten Wellenlängen (größten Frequenzen) haben die blauen und violetten Farben ($\lambda \approx 400$ nm). Sie haben den größten Brechungsindex und werden am stärksten gebrochen.

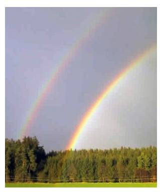
Noch stärker als violettes Licht wird ultraviolettes Licht gebrochen, es hat noch kleinere Wellenlängen, man kann es aber mit dem Auge nicht mehr sehen. Schwächer als rotes Licht wird infrarotes Licht (Wärmestrahlen) gebrochen. Es ist ebenfalls für das Auge unsichtbar und hat noch größere Wellenlängen als rotes Licht.

Weißes Licht läßt sich in alle Farben zerlegen. Umgekehrt läßt sich weißes Licht durch Zusammenwirken aller Farben erzeugen.

Beispiel

Bei der Entstehung eines Regenbogens spielt die Dispersion eine große Rolle. Das Sonnenlicht wird hier durch die feinen Wassertröpfchen in der Luft in die Spektralfarben zerlegt. Manchmal kann man auch einen zweiten Regenbogen beobachten. Dieser kommt durch eine zusätzliche Reflexion in den Wassertröpfchen zustande. Daher sind die Farben hier umgekehrt und die Intensität ist auch geringer.

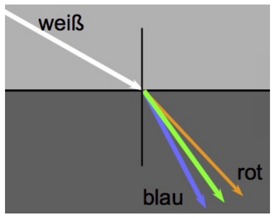




Beispiel (6.3)

Ein weißer Lichtstrahl fällt auf eine Wasseroberfläche und bildet mit dem Lot einem Winkel von 30°. Für rotes Licht ist die Brechzahl $n_{\text{rot}} = 1,33115$ und für blaues Licht $n_{\text{blau}} = 1,33712$.
a) Was passiert mit dem weißen Lichtstrahl beim Übergang ins Wasser?
b) Unter welchem Öffnungswinkel tritt der Lichtstrahl in das Wasser ein? Berechnen Sie dazu die Brechungswinkel für die beiden Farben!

Lösung



a) Das Licht wird beim Übergang ins Wasser gebrochen. Es tritt hier Dispersion auf, das heißt der Lichtstahl wird aufgespaltet. Der rote Strahl wird nicht so stark gebrochen wie der blaue Strahl.
b) Wir berechnen mit dem Brechungsgesetz den Brechungswinkel α_{rot} für den roten Strahl und α_{blau} für den blauen Strahl

$$\frac{\sin\alpha_0}{\sin\alpha_{\text{med}}} = \frac{n_{\text{med}}}{n_0}$$
$$\sin\alpha_{\text{med}} = \frac{\sin\alpha_0 \cdot n_0}{n_{\text{med}}}$$
$$\sin\alpha_{\text{rot}} = \frac{\sin\alpha_0 \cdot n_0}{n_{\text{rot}}} = \frac{\sin 30° \cdot 1}{1,33115} = 0,3756 \quad \longrightarrow \quad \alpha_{\text{rot}} = 22,06°$$
$$\sin\alpha_{\text{blau}} = \frac{\sin\alpha_0 \cdot n_0}{n_{\text{blau}}} = \frac{\sin 30° \cdot 1}{1,33712} = 0,3739 \quad \longrightarrow \quad \alpha_{\text{blau}} = 21,96°$$

Der Öffnungwinkel des Lichtstrahls ist daher

$$\Delta\alpha = \alpha_{\text{rot}} - \alpha_{\text{blau}} = 22,06° - 21,96° = 0,1°$$

Das ist ein sehr kleiner Winkel, der im Normalfall nicht wahrgenommen wird.

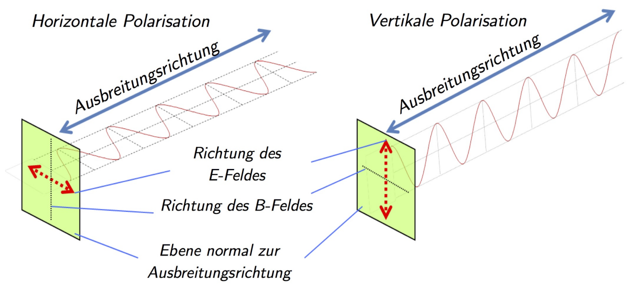
6.3 Die Polarisation von em Wellen

Elektromagnetische Schwingungen (also auch Licht) breiten sich in ihrer Wellenbewegung in beliebigen Schwingungsebenen aus. Elektromagnetische Schwingungen mit nur einer ausgezeichneten Schwingungsebene nennt man polarisiert. Polarisation ist nur bei Transversalwellen möglich.

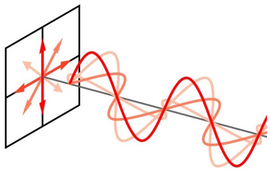
Transversalwelle – Longitudinalwelle

Bei der Transversalwelle sind die Schwingungrichtung und die Ausbreitungsrichtung jeweils normal aufeinander (z.B. em Welle). Bei der Longitudinalwelle sind die Schwingungsrichtung und die Ausbreitungsrichtung parallel zueinander (z.B. Schallwelle).

6.3.1 Die Polarisationsrichtung von em Wellen



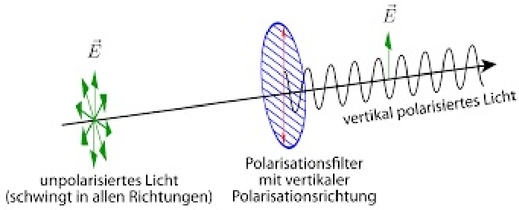
Die Polarisation bzw. die Polarisationsrichtung der em Welle beschreibt, in welcher Richtung die Welle schwingt. Dabei bezieht man sich meist auf die Richtung des E-Feldes. Das B-Feld schwingt entsprechend immer senkrecht zur Polarisationsrichtung. Wenn die Richtung des E-Feldes immer gleich bleibt, so spricht man von linearer Polarisation.
Meist wird die Polarisationsrichtung relativ zu einer Referenzrichtung angegeben als horizontale Polarisation und vertikale Polarisation.



Bei einer unpolarisierten Welle schwingt das E-Feld zugleich in mehrere Richtungen. Diese Welle kann man sich aus allen möglichen Schwingungrichtungen zusammengesetzt denken. Also eine Mischung aus horizontal polarisierten Wellen, vertikal polarisierten Wellen und schief polarisierten Wellen.
Sonnenlicht oder das Licht von Lampen ist meistens nicht polarisiert. Das heißt, jeder Wellenzug des Lichtes schwingt zufällig in eine Raumrichtung. Laserlicht und das Licht von Computerdisplays ist hingegen polarisiert.

6.3.2 Erzeugung von linearer Polarisation durch Polarisationsfilter

Um aus unpolarisiertem Licht polarisiertes Licht zu machen, werden Polarisationsfilter (kurz: Polfilter) verwendet. Ein idealer Polarisationsfilter lässt nur den Anteil des Lichtes passieren, der parallel zur sog. optischen Achse des Filter schwingt. Alle anderen Anteile werden vom Filter absorbiert. Die Intensität des Lichtes nimmt daher beim Durchgang durch einen Polfilter meist ab. Die rote Richtung wird auch als optische Achse des Polfilters bezeichnet.



Die Wirkung eines Polarisationsfilters

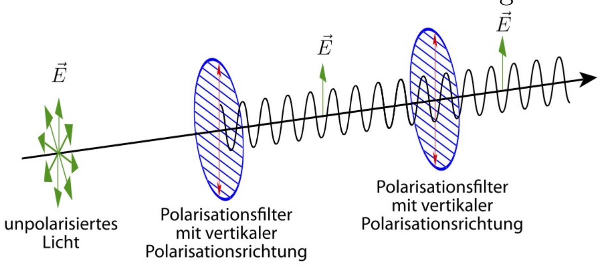
Polarisationsfilter bestehen meist aus langen Kettenmolekülen, die parallel zueinander ausgerichtet sind. Ihre Ausrichtung entspricht entspricht den in den Grafiken blau dargestellten Linien der Polfilter. Eine elektromagnetische Welle, deren E-Feld-Vektor in Richtung dieser Stege schwingt, kann mit diesen gut Wechselwirken und hierin in dieser Richtung sehr einfach Schwingungen anregen. Daher wird die Welle von Filter absorbiert. Eine Welle, deren E-Feld hingegen senkrecht zur Richtung der langen Kettenmoleküle schwingt, kann hingegen kaum Schwingungen anregen. Diese Welle passiert den Filter.

Trifft eine unpolarisierte em Welle der Intensität I_0 auf einen Polarisationsfilter, so wird die Intensität durch den Polarisationsfilter auf $I = \frac{I_0}{2}$ reduziert.

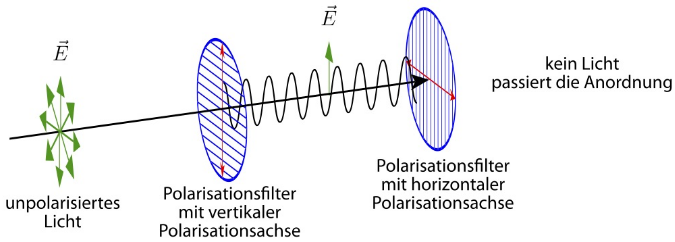
Die Wirkung von zwei Polsarisationsfiltern

Wenn man eine em Welle durch zwei Polarisationsfilter hintereinander laufen lässt, so bestimmt die Ausrichtung der Polarisationsfilter zueinander, welcher Teil der Welle die Anordnung passiert. Der erste Filter wird meist Polarisator genannt, und der zweite Filter wird Analysator genannt.

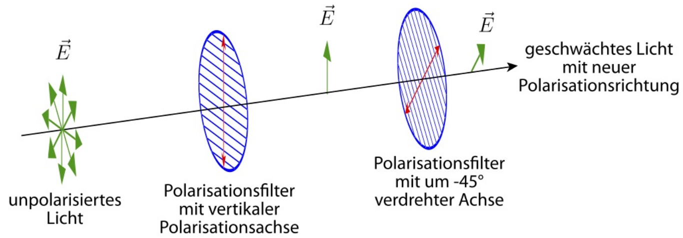
- Polarisationsfilter parallel zueinander:
  Wenn die beiden Polarisationsfilter parallel zueinander ausgerichtet sind, dann hat der zweite Filter keinerlei Auswirkungen mehr. Die Welle, die durch den ersten Filter polarisiert wurde, kann auch den zweiten Filter vollständig und unverändert passieren.



- Polarisationsfilter normal zueinander:
  Wenn die beiden Polarisationsfilter normal zueinander ausgerichtet sind (man sagt auch die Filter sind gekreuzt), dann kann keine Welle die Anordnung passieren. Ist die Polarisationsachse des ersten Filters vertikal ausgerichtet, so ist die Welle hinter dem Filter vertikal polarisiert und besitzt keinen horizontal polarisierten Anteil mehr. Somit kann kein Teil dieser Welle den zweiten Filter passieren.



- Polarisationsfilter verdreht zueinander
  Sind die beiden Polarisationsfilter verdreht zueinander ausgerichtet, so passiert ein Teil der Welle auch den zweiten Polarisationsfilter. Das E-Feld der auftreffenden Welle wird dabei in einen Teil parallel und einen Teil senkrecht zur optischen Achse des Filters zerlegt. Der parallele Teil kann den Filter passieren. Entsprechend ist die Welle im Anschluss auch in der Richtung der Polarisationsachse des zweiten Filters polarisiert.

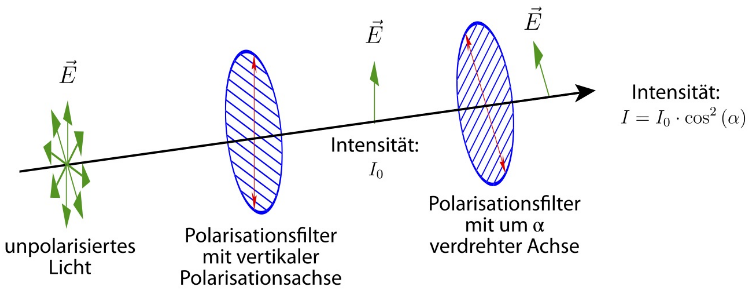


Gesetz von Malus

Eine unpolarisierte em Welle passiert einen Polarisationsfilter. Dadurch wird die Welle linear polarisiert und hat dann die Intensität I_0. Nun passiert sie einen zweiten linearen Polarisationsfilter, der gegenüber dem ersten um den Winkel α verdreht ist.
Für die Intensität I des Lichtes nach Passieren des zweiten Polarisationsfilters gilt dann das Gesetz von Malus:

$$I = I_0 \cdot \cos^2 \alpha \tag{6.3}$$

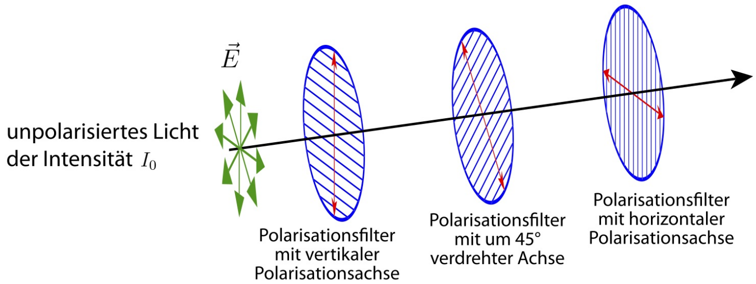
wobei I_0 die Intensität vor dem zweiten Filter ist. Die Welle hinter dem zweiten Polarisationsfilter ist dann in der Richtung der optischen Achse des zweiten Polarisationsfilters polarisiert.



Beispiel (6.4)

Eine em Welle läuft durch drei hintereinander liegende Polarisationsfilter (siehe Bild). Die optischen Achsen der drei Filter sind dabei je um 45° zueinander verdreht, sodass der erste und

letzte Filter zueinander normal sind. Auf den ersten Filter wird nun unpolarisiertes Licht der Intensität I_0 gestrahlt.
Berechnen Sie die Intensitäten des Lichtes nach jedem Filter!



Lösung

Nach Filter 1:
Unpolarisiertes Licht hat nach dem Durchgang durch einen linearen Polfilter noch die Hälfte seiner Intensität. Somit ist

$$I_1 = \frac{I_0}{2}$$

Nach Filter 2:
Der Filter ist um 45° gegenüber der Polarisationsrichtung des Lichtes gedreht. Daher folgt

$$I_2 = I_1 \cdot \cos^2(45°) = \frac{I_1}{2} = \frac{I_0}{4}$$

Nach Filter 3:
Der Filter ist wiederum um45° gegenüber der Polarisationsrichtung des Lichtes gedreht. Es folgt

$$I_3 = I_2 \cdot \cos^2(45°) = \frac{I_2}{2} = \frac{I_1}{4} = \frac{I_0}{8}$$

Die Intensität des Lichts hat sich also auf 1/8 reduziert.

6.3.3 Erzeugung von linearer Polarisation durch Reflexion

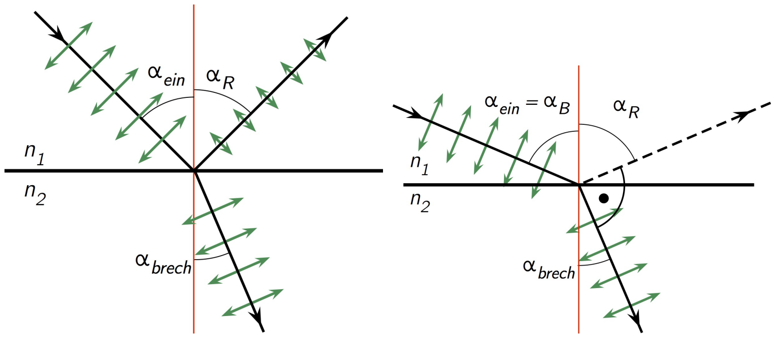
Jeder Lichtstrahl, der an einem Medium (z.B. Glas, Wasser, Kunststoff, Luft) reflektiert wird, ist danach je nach Einfallswinkel teilweise oder sogar vollständig linear polarisiert. Bei einem bestimmten Winkel, dem Brewsterwinkel α_B, ist der reflektierte Strahl sogar vollständig linear polarisiert. In diesem Fall gilt das

Brewstersche Gesetz:
Das reflektierte Licht ist senkrecht zur Einfallsebene vollständig linear polarisiert, wenn es von einem Medium mit dem Brechungsindex n_1 unter dem Einfallswinkel $\alpha_{\text{ein}} = \alpha_B$ auf ein Medium mit dem Brechungsindex n_2 trifft. Der Brewster-Winkel ist

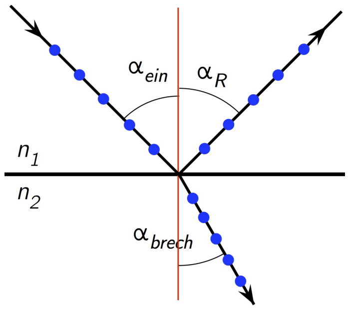
$$\tan \alpha_B = \frac{n_2}{n_1} \tag{6.4}$$

Für den Übergang vom Vakuum in ein Medium n gilt: $\tan \alpha_B = n$.
Wenn der Einfallswinkel genau dem Brewster-Winkel entspricht, dann ist der Winkel zwischen dem reflektierten Strahl und dem gebrochenen Strahl genau 90°. Die Polarisationsrichtung des reflektierten Strahls ist dabei senkrecht zur Einfallsebene.
Eine unplarisierte em Welle besteht aus zwei Komponenten, die unterschiedlich auf die Reflexion reagieren:

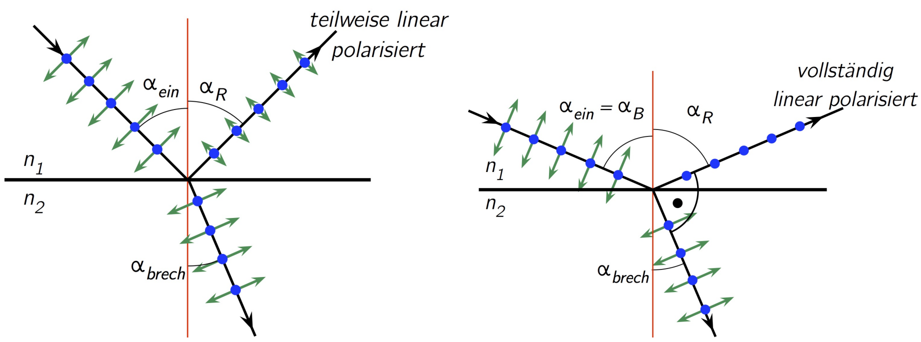
- Polarisationsrichtung des Einfallsstrahls parallel zur Einfallsebene:
  Ein Strahl dessen Polarisationsebene parallel zur Einfallsebene ist, wird bei der Reflexion stark geschwächt (erstes Bild) oder sogar ausgelöscht (zweites Bild). Die Schwächung hängt vom Einfallswinkel ab. Wenn der Einfallswinkel so gewählt wird, daß reflektierter Strahl und gebrochener Strahl zueinander normal sind, so wird der reflektierte Strahl ausgelöscht. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Einfallswinkel α_{ein} so groß ist wie der Brewster-Winkel α_B.



- Polarisationsrichtung normal zur Einfallsebene:
  Bei einem Strahl, dessen Polarisationsrichtung normal zur Einfallsebene ist, bleibt die Stärke des reflektierten Strahles unabhängig von seinem Einfallswinkel erhalten.

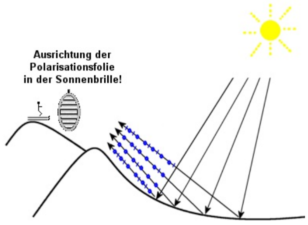


- Unpolarisierter Strahl:
  Der unpolarisierte Strahl ist eine Mischung aus beiden Anteilen. Wenn der Strahl jetzt in einem beliebigem Winkel einfällt, dann ist der reflektierte Strahl nur teilweise polarisiert, weil noch beide Anteile da sind, aber der parallele Anteil abgeschwächt ist (erstes Bild). Wenn der Strahl aber genau im Brewster-Winkel einfällt, dann bleibt im reflektierten Strahl nur mehr der normale Anteil übrig, der reflektierte Strahl ist vollständig linear polarisiert in die Richtung normal zur Einfallsebene (zweites Bild).



Man kann sich nun jeden unpolarisierten Strahl zusammengesetzt denken aus Komponenten die normal zur Reflexionsebene und solchen die parallele zur Reflexionsebene polarisiert sind. Die ersten werden geschwächt, die zweiten bleiben fast zur Gänze erhalten. Dies führt dazu, dass reflektierte Strahlen teilweise oder zur Gänze parallel zur Reflexionsebene polarisiert sind.

Anwendungen



Dies benutzt man bei den sogenannten Polaroidbrillen und den Filtern von Polaroidkameras: Der größte Teil des Sonnenlichtes wird an Ebenen reflektiert, die horizontal sind oder wenigstens eine horizontale Richtung enthalten.
Das unpolarisierte Sonnenlicht wird dabei zum Teil horizontal polarisiert (sein elektrisches Feld schwingt horizontal). Polaroidbrillen und -Filter sind so gebaut, daß sie dieses Licht nicht durchlassen.
Auf dem Meer oder beim Schifahren schützt man seine Augen vor der grellen Sonne. Gute Sonnenbrillen besitzen dafür Gläser aus polarisierendem Material, die nur vertikal polarisiertes Licht passieren lassen. Die von der weitgehend horizontalen Wasserfläche bzw. Schneefläche reflektierte Intensität ist hauptsächlich senkrecht zur Einfallsebene des Sonnenlichtes polarisiert. Diese wird hier als vertikal angesehen. Das reflektierte Licht schwingt also horizontal zum Betrachter. Die Sonnenbrille mit einem Polfilter blockiert nun genau diesen Horizontalanteil.
Fotografen benutzen auch Polarisationsfilter, um den Kontrast von Bilder zu erhöhen oder um Spiegelungen auf Fensterscheiben zu vermeiden.

Herleitung des Brewster-Winkels

Als Brewster-Winkel wird der Einfallswinkel bezeichnet, unter dem von unpolarisiertem Licht nur der senkrecht zur Einfallsebene polarisierte Anteil reflektiert wird. Dabei bilden reflektierter und gebrochener Strahl einen rechten Winkel. Mithilfe von Reflexions- und Brechungsgesetz kann der Brewster-Winkel ermittelt werden. Für einen im Brewster-Winkel einfallenden Strahl gilt: $\alpha_{\text{ein}} = \alpha_B = \alpha_R$. Für den gebrochenen Strahl gilt $\alpha_{\text{brech}} = 90° - \alpha_B$. Einsetzen in das Brechungsgesetz liefert

$$\begin{aligned}
\frac{\sin \alpha_{\text{ein}}}{\sin(90 - \alpha_B)} &= \frac{n_2}{n_1} \\
\frac{\sin \alpha_B}{\cos \alpha_B} &= \frac{n_2}{n_1} \\
\tan \alpha_B &= \frac{n_2}{n_1}
\end{aligned}$$

Beispiel (6.5)

Das Sonnenlicht, das von der Oberfläche eines völlig stillen Sees ($n = \frac{4}{3}$) reflektiert wurde, ist vollständig polarisiert. Unter welchem Winkel ist das Licht auf die Oberfläche des Sees getroffen?

Lösung

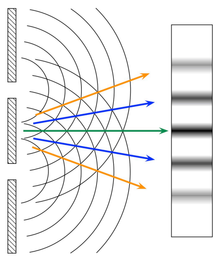
Da das reflektierte Licht vollständig polarisiert ist, weiß man, dass der Einfallswinkel gleich dem Brewster-Winkel ist $\alpha_{\text{ein}} = \alpha_B$

$$\begin{aligned}
\tan \alpha_B &= \frac{n_2}{n_1} = \frac{\frac{4}{3}}{1} \\
\alpha_B &= \alpha_{\text{ein}} = 53,13°
\end{aligned}$$

6.4 Aufgaben

Beugung

(6.1) Licht wird an einem Doppelspalt mit $d = 0,04$ mm gebeugt. Dabei entsteht auf einem 3 cm entfernten Schirm ein Maximum erster Ordnung, das vom Maximum nullter Ordnung den Abstand von $0,5$ mm hat.
a) Erklären Sie den Begriff der Beugung einer Welle!
b) Erklären Sie die dargestellte Versuchsanordnung! Zeichnen Sie die Intensitätsverteilung des Lichts am Schirm! Was ist ein Maximum erster Ordnung und ein Maximum nullter Ordnung?
c) Bestimmen Sie die Wellenlänge des Lichts! Ist es sichtbares Licht?

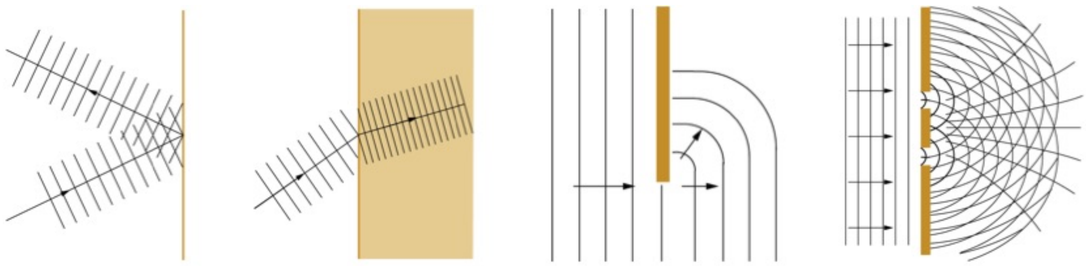


(6.2) Die Spalte eines Doppelspalts befinden sich in einem Abstand von 0,4 mm und werden mit Licht der Wellenlänge $\lambda = 600$ nm beleuchtet. Wie weit ist das Maximum nullter Ordnung vom Maximum erster Ordnung entfernt, wenn der Schirm in einer Entfernung von 50 cm steht?

(6.3) Die Spalte eines Doppelspalt befinden sich in einem Abstand von $0,4$ mm und 1 m von einem Schirm entfernt. Mit welcher Wellenlänge wurde der Spalt beleuchtet, wenn sich das erste Maximum 1 mm vom zentralen Maximum entfernt befindet? Skizzieren Sie das entstehende Interferenzmuster!

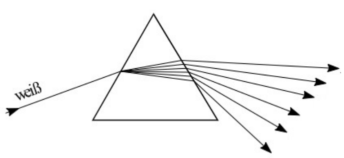
(6.4) Eine Flüssigkeitswelle breitet sich geradlinig mit $c = 2$ m/s und $\lambda = 25$ cm aus. Normal zur Ausbreitungsrichtung taucht ein unbewegliches Brett in die Flüssigkeit. Es hat zwei Spalten im Abstand $d = 50$ cm.
Welchen Abstand haben die ersten Beugungsmaxima in einer Entfernung von 1m hinter dem Brett voneinander? Berechnen Sie die Frequenz der Flüssigkeitswelle!

(6.5) a) Beschreiben Sie die dargestellten Wellenerscheinungen! Was passiert mit der einfallenden Welle?
b) Geben Sie für jede Wellenerscheinung Gesetzmäßigkeiten und Besonderheiten an!



Dispersion

(6.6) a) Was versteht man unter Dispersion?
b) Welches Licht (rot/blau, große/kleine Wellenlänge) wird stärker gebrochen?
c) Weißes Licht tritt in ein Prisma aus Glas ein und wird aufgespaltet. Ordnen Sie den Pfeilen im Bild folgende Farben richtig zu:
violett, rot, grün, orange, blau, gelb
d) Welche Wellenlängen passen zu den Farben?
435 nm, 495 nm, 570 nm, 590 nm, 630 nm, 770nm



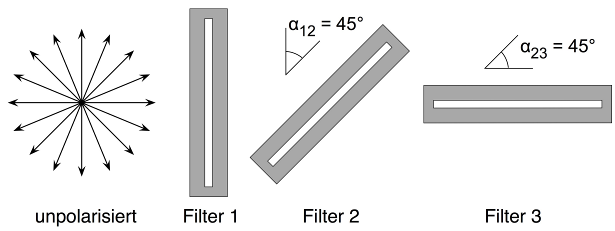
(6.7) Ein weißer Lichtstrahl fällt unter einem Winkel von 45° auf eine Wasseroberfläche. Für rotes Licht ist die Brechzahl $n_{\mathrm{rot}} = 1,33115$ und für blaues Licht $n_{\mathrm{blau}} = 1,33712$.
a) Was passiert mit dem weißen Lichtstrahl beim Übergang ins Wasser?
b) Unter welchem Öffnungswinkel tritt der Lichtstrahl in das Wasser ein? Berechnen Sie dazu die Brechungswinkel für die beiden Farben!

(6.8) Von einem bestimmten Glas kennt man zwei Brechungszahlen $n_{\mathrm{Farbe1}} = 2$ und $n_{\mathrm{Farbe2}} = 2,02$. Eine der beide Farben ist ein bestimmtes Rot, die andere ein bestimmtes Blau.
a) Bestimmen Sie, welche Farbe rot und welche blau ist!
b) Wie groß sind Wellenlänge und Ausbreitungsgeschwindigkeit des roten Lichts im Glas?

Polarisation

(6.9) a) Ist Licht eine Transversalwelle oder eine Longitudinalwelle? Beschreiben Sie den Unterschied!
b) Wie ist die Polarisation von Licht gegeben?
c) Welche verschiedenen Arten der Polarisation gibt es?
d) Nennen Sie zwei Arten linear polarisiertes Licht zu erzeugen!

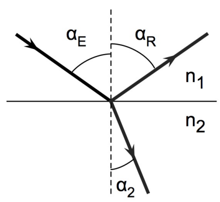
(6.10) In der Abbildung ist ein System aus drei Polarisationsfiltern mit den Winkeln $\alpha_{12} = \alpha_{23} = 45°$ für eine elektromagnetische Welle dargestellt.
a) Erklären Sie den Begriff der Polarisation!
b) Wie funktioniert ein Polarisationsfilter?
c) Welcher Anteil der eingehenden unpolarisierten Welle mit der Intensität I_0 gelangt durch die Anordnung und in welche Richtung ist die Welle polarisiert?
d) Was passiert, wenn man den Filter 2 aus der Anordnung entfernt?



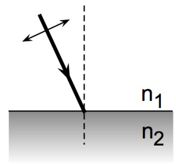
(6.11) a) Wie wirkt ein Polarisationsfilter?
b) Ein Lichtstrahl tritt durch zwei Polarisationsfilter hintereinander, deren Polarisationsrichtungen um 60° gegeneinander verdreht sind. Die Intensität der unpolarisierten Welle vor dem ersten Filter ist I_0.
a) Berechnen Sie die Intensität der Welle nach jedem Polarisationsfilter!
b) In welche Richtung ist die Welle nach jedem Polarisationsfilter polarisiert?

(6.12) Zwei um 90° gedrehte Polarisationsfilter lassen kein Licht hindurch. Was passiert, wenn man zwischen die beiden Polarisationsfilter ein drittes setzt, welches gegenüber den anderen beiden jeweils um 45° gedreht ist? (es passiert nichts / es kommt wieder etwas Licht hindurch) Begründen Sie Ihre Antwort!

(6.13) Ein unpolarisierter Lichtstrahl läuft unter dem Einfallswinkel von $\alpha_E = 57°$ vom Vakuum ($n_1 = 1$) in Glas ($n_2 = 1,54$) und wird dort teilweise reflektiert und gebrochen.
a) Berechnen Sie den Winkel α_R und α_2!
b) Was können Sie über die Polarisationsrichtung des reflektierten Strahls sagen?



(6.14) Der abgebildete Lichtstrahl ist parallel zur Einfallsebene polarisiert und bildet mit der Reflexionsoberfläche einen Winkel von 70°. Die Brechzahlen der Medien sind $n_1 = 1$ und $n_2 = 1,4$.
a) Bestimmen Sie den Brechungswinkel und den Reflexionswinkel!
b) Wird der Strahl wegen seiner Polarisation wie gewöhnlich reflektiert, stark geschwächt oder ausgelöscht?



(6.15) Das Sonnenlicht, das von der Oberfläche eines völlig stillen Sees (n = 4/3) reflektiert wurde, ist vollständig polarisiert. Unter welchem Winkel ist das Licht auf die Oberfläche des Sees getroffen?

(6.16) Bestimmen Sie den Brewster-Winkel für Wasser ($n = 1,33$), Flintglas ($n = 1,76$) und Diamant ($n = 2,42$). Was gibt dieser Winkel an?

7 Die Absorption von em Wellen in einem Medium

7.1 Die Intensität einer em Welle im Vakuum

Wir wissen schon aus Abschnitt 3:
Die Intensität S einer Welle an einem bestimmten Ort ist die Energie ΔE, die dort pro Zeit Δt durch den Querschnitt A transportiert wird. Die Intensität entspricht daher auch der Leistung P pro Fläche A. Die Intensität hängt aber auch mit der Energiedichte ρ_E und der Ausbreitungsgeschwindigkeit c zusammen. Wir haben die Formeln

$$S = \frac{\Delta E}{\Delta t \cdot A} = \frac{P}{A} = \rho_E \cdot c \tag{7.1}$$

Einheit: $[S] = [\frac{P}{A}] = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s \cdot m}^2}$ Watt pro Quadratmeter

Die Intensität einer Welle hängt mit der Größe der Amplitude einer Welle zusammen. Bei sichtbarem Licht nennt man die Intensität auch Helligkeit.
Die Intensität einer Welle im Vakuum hängt von der speziellen Form der Welle ab:

- Ebene Wellen:
  Die Intensität ist immer gleich groß und verändert sich mit dem Abstand nicht.
  $$S = \frac{P}{A} = \text{const} \tag{7.2}$$
  Die Intensität einer ebenen Welle ist unabhängig vom Abstand vom Sender.

- Kreiswellen:
  Eine Kreiswelle breitet sich von einem punktförmigen Zentrum in 2 Dimensionen aus. Im Abstand r gilt
  $$S = \frac{P}{A} = \frac{P}{2\pi \cdot r} = \frac{\text{const}}{r} \tag{7.3}$$
  Die Intensität einer Kreiswelle ist umgekehrt proportional zum Abstand vom Sender.

- Kugelwellen:
  Eine Kugelwelle breitet sich von einem punktförmigen Zentrum in 3 Dimensionen aus. Im Abstand r gilt
  $$S = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi \cdot r^2} = \frac{\text{const}}{r^2} \tag{7.4}$$
  Die Intensität einer Kugelwelle ist umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes vom Sender.

7.2 Die Intensität einer ebenen em Welle im Medium

Der Energieverlust durch Absorption

Wenn eine em Welle durch ein Medium läuft, so wird bei jedem Teilchen des Mediums ein Teil der Energie der Welle für die Schwingung dieses Teilchens abgegeben. Die Menge der verlorenen Energie oder Leistung hängt dabei von der eintreffenden Energie oder Leistung ab. Daraus ergibt sich eine exponentielle Abnahme. Diese Abnahme nennt man Absorption. Die Energie wird vom Medium absorbiert.
Wenn sich die Energie verändert, dann verändert sich natürlich auch die Intensität. Wir betrachten im Folgenden nur ebene Wellen (Parallelwellen), da man hier den Intensitätsverlust durch Absorption am leichtesten sieht.

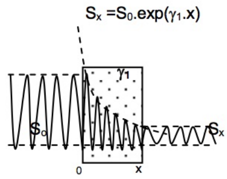
Der Intensitätsverlust durch Absorption bei ebenen Wellen

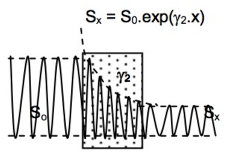
Die Intensität einer ebenen Welle sinkt exponentiell ab, wenn sie durch ein Medium durchgeht.
Es gilt

$$S(x) = S_0 \cdot e^{-\gamma \cdot x} \tag{7.5}$$

wobei $S(x)$ die Intensität der Welle nach dem Durchlaufen der Länge x im Medium, S_0 die Anfangsintensität der Welle beim Eintritt ins Medium und γ der Absorptionskoeffizient ist. Der Absorptionskoeffizient ist eine Materialkonstante, die ein Maß für die Stärke der Absorption in einem bestimmten Medium ist.

Einheit: $[\gamma] = [\frac{1}{x}] = \frac{1}{\mathrm{m}}$ pro Meter





Die Abbildung zeigt wie eine ebene elektromagnetische Welle mit der Anfangsintensität S_0 aus dem Vakuum kommend auf zwei verschiedene Medien mit den Absorptionskoeffizienten γ_1 und γ_2 trifft.
Beim Durchlaufen der Länge x im Medium sinkt die Intensität exponentiell ab und hat beim Verlassen des Mediums die Intensität $S(x)$, die sich im Vakuum nicht mehr ändert und konstant bleibt.
Das Medium mit dem Absorptionskoeffizienten γ_2 in der unteren Abbildung zeigt eine schwächere Absorption als das Medium mit dem Absorptionskoeffizienten γ_1 in der oberen Abbildung.
Daher gilt: $\gamma_2 < \gamma_1$.

Wenn die beiden Medien hintereinander angeordnet sind, so ist die genaue Reihenfolge egal. Es kommt nur auf die jeweilige Dicke der Medien an. Man kann die Medien auch zerschneiden und abwechselnd anordnen. Das hat auch keinen Einfluss auf die gesamte Intensitätsabnahme.

Beispiel (7.1)

Die Intensität eines Lichtstrahls nimmt beim Durchgang durch ein 4 cm dickes Glas um 30% ab. Bestimmen sie den Absorptionskoeffizienten dieses Glases!

Lösung

Wenn die Intensität um 30% abnimmt, so sind noch 70% der Anfangsintentsität vorhanden

$$S(x) = S_0 \cdot 0,7$$

Wir können auch die Formel für die Absorption verwenden

$$S(x) = S_0 \cdot e^{-\gamma \cdot x}$$

und beide gleichsetzen

$$\begin{aligned} S_0 \cdot 0,7 &= S_0 \cdot e^{-\gamma \cdot x} \quad | : S_0 \\ 0,7 &= e^{-\gamma \cdot x} \quad | \ln \\ \ln 0,7 &= -\gamma \cdot x \\ \gamma &= -\frac{\ln 0,7}{x} = -\frac{\ln 0,7}{0,04} = 8,92 \text{ m}^{-1} \end{aligned}$$

Man sieht hier, dass es von der Anfangsintensität S_0 nicht abhängt, sondern nur auf die relative Abnahme ankommt.

Beispiel (7.2)

Eine ebene elektromagnetische Welle läuft zuerst durch ein $x_1 = 5$ cm dickes Glas und verliert dabei 20% seiner Intensität. Danach läuft die Welle durch ein 12 cm breites Vakuum und danach wieder durch eine $x_2 = 10$ cm dicke Schicht desselben Glases. Wie viel % seiner ursprünglichen Intensität sind am Ende noch vorhanden?

Lösung

Die lange Methode:
Wir berechnen zuerst den Absorptionskoeffizienten des Glases:

$$\begin{aligned} S_0 \cdot 0,8 &= S_0 \cdot e^{-\gamma \cdot x_1} \quad | : S_0 \\ 0,8 &= e^{-\gamma \cdot x_1} \quad | \ln \\ \ln 0,8 &= -\gamma \cdot x_1 \\ \gamma &= -\frac{\ln 0,8}{x_1} = -\frac{\ln 0,8}{0,05} = 4,46 \text{ m}^{-1} \end{aligned}$$

Damit kann dann die Abschwächung im zweiten Medium berechnet werden, wobei die Anfangsintensität hier gleich $S_1 = 0,8 \cdot S_0$ nach dem ersten Medium ist (das Vakuum trägt nicht zur Abschwächung bei)

$$S_2 = S_1 \cdot e^{-\gamma \cdot x_2} = 0,8 \cdot e^{-4,46 \cdot 0,10} \cdot S_0 = 0,8 \cdot 0,64 \cdot S_0 = 0,512 \cdot S_0$$

Am Ende ist noch 51,2% der ursprüngichen Intensität vorhanden. Die Welle wurde also um $(100 - 51,2) = 48,8\%$ abgeschwächt.

Die kurze Methode:
Die Welle wird immer nach 5 cm Dicke um 20% abgeschwächt. Da das zweite Stück Glas genau doppelt so dick ist wie das erste Stück, gilt

$$S_2 = 0,8 \cdot 0,8 \cdot S_1 = 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 \cdot S_0 = 0,8^3 \cdot S_0 = 0,512 \cdot S_0$$

7.3 Aufgaben

(7.1) a) Gegeben ist eine Kugelwelle im Vakuum. Wie hängt ihre Intensität vom Abstand vom Sender ab? Wie ist dies bei der Kreiswelle und beim parallelen Wellenbündel?
b) Wie sinkt die Intensität einer elektromagnetischen Welle beim Durchgang durch ein Medium?

(7.2) Die Intensität einer elektromagnetischen Welle sinkt beim Durchgang durch ein 2cm dickes Medium um 20%.
a) Wie ist die Intensität einer Welle definiert? Zu welchen Größen ist sie proportional?
b) Berechnen sie den Absorptionskoeffizienten γ!

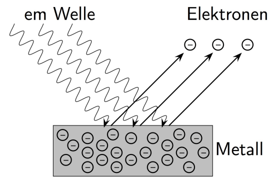
(7.3) Eine ebene elektromagnetische Welle läuft zuerst durch ein 4 cm dickes Glas und verliert dabei 30% seiner Intensität. Danach läuft die Welle durch ein 20 cm breites Vakuum und danach wieder durch eine 8 cm dicke Schicht desselben Glases. Wie viel % seiner ursprünglichen Intensität sind am Ende noch vorhanden?

(7.4) Ein Röntgenstrahl dringt zuerst durch das vier Zentimeter dicke Medium 1 (γ_1) und verliert dabei 30% seiner Inensität. Unmittelbar danach läuft der Strahl durch das 5 cm dicke Medium 2 (γ_2) und verliert dabei nochmals 10% seiner Intensität.
a) Bestimmen Sie die beiden Absorptionskoeffizienten!
b) Wie viel Prozent seiner Intensität verliert der Strahl insgesamt beim Durchgang durch beide Medien? Ist es gleichgültig, ob man die Medien vertauscht?

(7.5) Ein Röntgenstrahl dringt zuerst durch ein 3 cm dickes Medium1 (γ_1) und danach durch ein 2 cm dickes Medium2 (γ_2) und verliert dabei insgesamt 55% seiner Intensität.
a) Bestimmen Sie die beiden Absorptionskoeffizenten!
b) Um wie viel sinkt die Intensität, wenn der Strahl abwechselnd durch je eine 1cm dicke Schicht von Medium1, dann Medium2, dann wieder Medium1 usw läuft?

8 Die Quantentheorie des Lichts

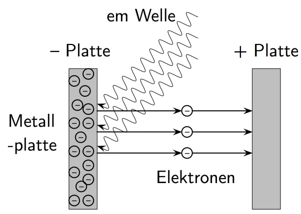
8.1 Der Photoeffekt



Der Photoeffekt wurde im Jahre 1887 von Heinrich Hertz entdeckt und von Wilhelm Hallwachs, einem seiner Schüler, sowie von Philip Lenard weiter untersucht.
Die richtige Deutung des Photoeffektes gelang aber erst Albert Einstein in einer seiner Arbeiten aus dem Jahr 1905. Dafür erhielt er im Jahre 1921 den Nobelpreis für Physik.

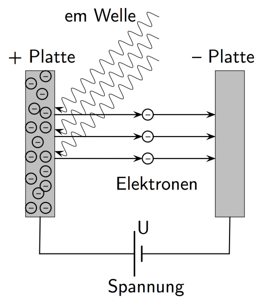
Die Ablösung von Elektronen aus Metallen durch Licht (em Wellen) nennt man Photoeffekt (Lichtelektrischer Effekt, photoelektrischer Effekt).

Das Experiment



Eine Metallplatte wird mit Licht einer bestimmten Wellenlänge (meist UV-Licht) bestrahlt. Dabei stellt man fest, dass dadurch Elektronen aus dem Metall herausgelöst werden. Die Elektronen haben nach der Ablösung noch eine bestimmte Geschwindigkeit (kinetische Energie). Diese Ablösung wird als Photoeffekt bezeichnet. Die Elektronen werden als Photoelektronen bezeichnet und bilden den sogenannten Photostrom.
Der Photostrom kann durch die Spannung, die zwischen der bestrahlten Metallplatte (negative Platte) und einer zweiten Platte (positve Platte) entsteht, gemessen werden.

Die Gegenfeldmethode



Der Photostrom kann mit der Gegenfeldmethode analysiert werden. Dazu wird an die beiden Platten eine Gegenspannung U angelegt, die dem Photostrom entgegen gerichtet ist. Die bestrahlte Platte hat dann das hohe Potential und ist positiv geladen, die zweite Platte hat das tiefe Potential und ist negativ geladen. Es entsteht ein elektrisches Gegenfeld, das von der positiven Platte zur negativen Platte zeigt. Die abgelösten Elektronen bewegen sich jetzt in Richtung des elektrischen Gegenfeldes und werden dadurch abgebremst und verlieren ihre kinetische Energie. Die Gegenspannung U wird so lange verändert, bis kein Photostrom mehr fließt. Die Elektronen werden dabei so stark abgebremst, bis sie die zweite Platte nicht mehr erreichen können. Diese Spannung bezeichnen wir als Grenzspannung U_{grenz}. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{kin}} + \Delta E_{\text{pot}} &= 0 \\ \frac{m \cdot v^2}{2} + \Delta U \cdot Q &= 0 \\ \frac{m \cdot v^2}{2} - U_{\text{grenz}} \cdot Q_e &= 0 \end{aligned}$$

Die Änderung der kinetischen Energie $\Delta E_{\text{kin}} < 0$ ist hier negativ, da die Elektronen abgebremst werden (die Ladung der Elektronen $Q_e < 0$ wird mit negativem Vorzeichen eingesetzt). Wenn wir aber von der kinetischen Energie E_{kin} der Elektronen bei der Ablösung sprechen, dann geben wir nur den Betrag dieser Größe an

$$E_{\text{kin}} = |U_{\text{grenz}} \cdot Q_e|$$

Beispiel (8.1)

Berechnen Sie die kinetischen Energie eines Elektrons beim Photoeffekt, wenn die Grenzspannung $U_{\text{grenz}} = 2$ V beträgt! Geben Sie das Ergebnis in Joule und eV an!

Lösung

Die kinetischen Energie bei der Ablösung ist

$$E_{\text{kin}} = |U_{\text{grenz}} \cdot Q_e| = 2 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19}) = 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

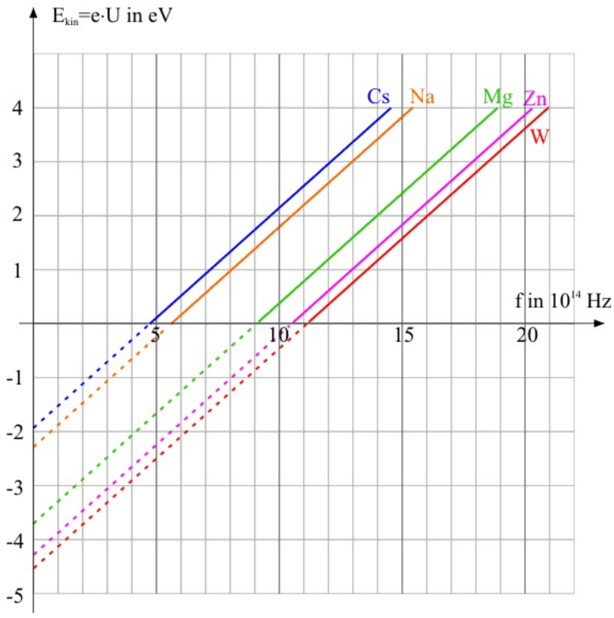
Bei der Umrechnung in eV kann man entweder durch den Umrechnungsfaktor 1 J $= 1,6 \cdot 10^{-19}$ eV dividieren, oder gleich in den richtigen Einheiten (Volt und Vielfache der Elementarladung Q_e) in die Formel einsetzen:

$$E_{\text{kin}} = (2 \text{ V}) \cdot (1\ Q_e) = 2 \text{ eV}$$

Die gemessene kinetische Energie als Funktion der Frequenz

In der Abbildung ist der Verlauf der kinetischen Energie E_{kin} der abgelösten Elektronen (aufgetragen in eV) als Funktion der eingestrahlten Frequenz f (in 10^{14} Hz) der elektromagnetischen Welle für verschiedene Materialien (Cs - Cäsium, Na - Natrium, Mg - Magnesium, Zn - Zink, W - Wolfram) dargestellt.
Die kinetische Energie der Elektronen wurde jeweils mit der Gegenfeldmethode gemessen, indem man die Grenzspannung für jede Frequenz f bestimmt, bei der kein Photostrom mehr fließt.
Man stellt fest:

- die kinetische Energie E_{kin} hängt linear von der Frequenz f ab und
- die Geraden sind für alle Materialien parallel (sie haben gleiche Steigung)



Experimentelle Ergebnisse

Genauere Experimente ergeben folgende Zusammenhänge:

- Der Photostrom (die Ablösung von Elektronen) beginnt erst ab einer bestimmten Grenzfrequenz der elektromagnetischen Strahlung zu fließen. Wenn die Frequenz größer als die Grenzfrequenz ist, so gibt es sofort (ohne Verzögerung) einen Photostrom. Die Grenzfrequenz ist vom verwendeten Material abhängig.
- Die kinetische Energie der Elektronen wächst linear mit der Frequenz der elektromagnetischen Strahlung und ist unabhängig von der Intensität der elektromagnetischen Strahlung. (Die Intensität der em Strahlung kann man z.B. durch den Abstand der Platte zur Strahlungsquelle verändern.)
- Die Größe des Photostroms wächst mit der Intensität der elektromagnetischen Strahlung. Aber unterhalb der Grenzfrequenz gibt es auch bei hoher Intensität keinen Photostrom.

Erklärungsprobleme mit der Wellentheorie der elektromagnetischen Strahlung

Im Wesentlichen ergeben sich zwei Probleme, wenn man versucht den Photoeffekt mit der Wellentheorie der elektromagnetischen Strahlung zu erklären.

- Die Energie einer Welle ist proportional zur Frequenz zum Quadrat.

  Wir erinnern uns, dass man eigentlich nur räumlich begrenzten Wellen eine Energie zuordnen kann. Diese Energie entspricht der Energie, die man dem schwingenden System am Anfang zuführt. Die Gesamtenergie einer harmonischen Schwingung ist aber

  $$E_{\text{ges}} = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot y_0^2 = 2\pi^2 \cdot m \cdot f^2 \cdot y_0^2$$

  und damit sieht man die Abhängigkeit von f^2

  $$E \propto f^2$$

  Wir erwarten also eine quadratische Funktion, eine Parabel. Wenn man beim Photoeffekt aber die Abhängigkeit der Energie von der Frequenz ansieht, dann ist es eindeutig ein linearer Zusammenhang

  $$E \propto f$$

  Dieser Widerspruch lässt sich in der klassischen Wellentheorie nicht auflösen.

- Bei geringer Intensität der Welle erwartet man ein langsames Einsetzen des Photostromes.

  Wenn die Intensität der Welle sehr gering ist, so müsste man nach klassischer Vorstellung einfach länger warten, bis die Welle genügend Energie an die Elektronen übertragen hat und die Elektronen dadurch das Metall verlassen können. Das sollte unabhängig von der Frequenz der em Strahlung sein.

  Man beobachtet aber, dass unterhalb der Grenzfrequenz kein Photoeffekt statt findet, auch wenn man lange wartet.

  Dieser Widerspruch lässt sich mit der klassichen Wellentheorie nicht auflösen.

Erklärung des Photeffekts mit der Quantentheorie

Einstein konnte die Widersprüche lösen, indem er folgende Annahme traf (Photonenhypothese):

Elektromagnetische Strahlung der Frequenz f enthält Energie nur in (unteilbar) kleinen Portionen (Quanten) der Größe

$$E_{\text{photon}} = h \cdot f \tag{8.1}$$

wobei $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Js das Planck'sche Wirkungsquantum ist. Die Energiequanten werden als Lichtquanten oder Photonen bezeichnet.

Der Photoeffekt wird dann folgendermaßen erklärt:

- Jedes Photon mit genügend hoher Frequenz f löst genau ein Elektron aus dem Metall ab.

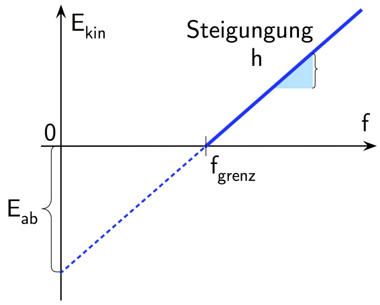
  Die Energie eines Photons E_{photon} teilt sich auf die Ablöseenergie E_{ab} und die kinetische Energie E_{kin} des Elektrons auf

  $$E_{\text{photon}} = E_{\text{ab}} + E_{\text{kin}} \tag{8.2}$$

Die Ablöseenergie (Ablösearbeit) E_{ab} ist die Energie, die man braucht, um ein Elektron aus dem Metall zu entfernen. (Zwischen den Teilchen des Metalls und in Atomen gibt es anziehende Kräfte, die man überwinden muß, um ein Elektron "zu befreien".) Die Ablöseenergie ist vom Material abhängig.

- Wenn man die Intensität der Strahlung erhöht, so erhöht sich dadurch die Anzahl der Photonen, nicht aber die Energie. Dadurch können mehr Elektronen abgelöst werden, aber die kinetische Energie der Elektronen bleibt gleich.
- Der Photoeffekt setzt ab der Grenzfrequenz f_{grenz} ein, da für kleinere Frequenzen die Energie der Photonen nicht ausreicht, um ein Elektron aus dem Metall abzulösen.

Die zentrale Formel des Photoeffekts (8.2) kann jetzt dazu verwendet werden, um die Abhängigkeit der kinetischen Energie von der Frequenz zu verstehen und graphisch zu deuten. Wir formen dazu die Gleichung um



$$\begin{aligned} E_{\text{photon}} &= E_{\text{ab}} + E_{\text{kin}} \\ E_{\text{kin}} &= E_{\text{photon}} - E_{\text{ab}} \\ E_{\text{kin}} &= h \cdot f - E_{\text{ab}} \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung beschreibt mathematisch gesehen eine Gerade der Form $y = k \cdot x + d$ wobei k die Steigung ist und d der sogenannte Achsenabschnitt (der Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse). Beim Photoeffekt ist die Steigung aller Geraden gegeben durch das Planck'sche Wirkungsquantum h und der Achsenabschnitt entspricht der Ablöseenergie E_{ab}. Dies erklärt, warum …

- …die Geraden für verschiedene Materialien parallel sind bzw. dieselbe Steigung haben, da sie der Konstanten h entsprechen
- …die Achsenabschnitte für verschiedene Materialien unterschiedlich sind, da sie der jeweiligen Ablöseenergie E_{ab} entsprechen
- …die Grenzfrequenzen f_{grenz} für verschiedene Materialien unterschiedlich sind, da hier die Photonenenergie gleich der Ablöseenergie ist

$$E_{\text{ab}} = h \cdot f_{\text{grenz}} = \frac{h \cdot c}{\lambda_{\text{grenz}}}$$

Tabelle mit den Ablöseenergien für verschiedene Materialien

Material	Pt	Ni	Au	Ag	W	Cu	Zn	Ta	Mo
E_{ab} [in eV]	5,32	5,0	4,8	4,6	4,5	4,3	4,3	4,2	4,2
λ_{grenz} [in μm]	0,23	0,25	0,26	0,27	0,28	0,29	0,29	0,30	0,30

Material	Al	Na	K	Li	Rb	Ba	Cs
E_{ab} [in eV]	3,0	2,28	2,25	2,2	2,13	1,8	1,7
λ_{grenz} [in μm]	0,41	0,54	0,55	0,56	0,58	0,69	0,73

Beispiel (8.2)

Auf eine bestimmte Metallplatte treffen Photonen mit der Energie 5 eV. Dabei werden Elektronen abgelöst. Die Ablöseenergie beträgt 2 eV.
a) Erklären Sie den hier dargestellten physikalischen Effekt!
b) Berechnen Sie die Wellenlänge des eingestrahlten Lichts! Welche Art von Licht ist das?
c) Berechnen Sie die kinetische Energie der Elektronen! Wie groß muß die Grenz-Spannung bei der Gegenfeldmethode sein, damit der Photostrom verschwindet?
d) Was geschieht, wenn man die Lichtquelle entfernt und dadurch "weniger Licht" auf die Platte trifft?

Lösung

a) Es handelt sich hier um den Photoeffekt. Die Metallplatte wird mit em Wellen (Licht) bestrahlt und dabei lösen sich Elektronen aus dem Metall ab.
b) Die Wellenlänge des eingestrahlten Lichts wird mit der Photonenhypothese berechnet (die gegebene Photonen-Energie muß aber in Joule umgerechnet werden)

$$E_{\text{photon}} = h \cdot f$$
$$f = \frac{E_{\text{photon}}}{h} = \frac{5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{6,62 \cdot 10^{-34}} = 1,2 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$
$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,2 \cdot 10^{15}} = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 0,25 \ \mu\text{m}$$

Das ist UV-Licht.
c) Wir verwenden die Formel für den Photeffekt und berechnen damit die kinetische Energie der Elektronen

$$E_{\text{photon}} = E_{\text{ab}} + E_{\text{kin}}$$
$$E_{\text{kin}} = E_{\text{photon}} - E_{\text{ab}} = 5 - 2 = 3 \text{ eV} = 4,8 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Die kinetische Energie in Elektronenvolt (eV) gibt auch die Grenzspannung bei der Gegenfeldmethode an

$$U_{\text{grenz}} = 3 \text{ V}$$

d) Wenn man die Lichtquelle entfernt, so sinkt die Intensität des Lichts ab. Das bedeutet im Bild der Photonen, dass einfach weniger Photonen die Platte erreichen, und dadurch weniger Elektronen aus dem Metall abgelöst werden. Die kinetische Energie der Photonen bleibt aber die gleiche.

Beispiel (8.3)

a) Wie viel Energie (in eV) müssen Photonen mindestens haben, damit sie aus einer Kupferplatte (Cu) Elektronen ablösen können?
b) Wir verwenden nun Licht mit doppelt so viel Energie als für die Ablöse notwendig ist.
Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der abgelösten Elektronen!
c) Wie groß muß die Gegenspannung sein, damit kein Phototstrom mehr fließt? Bewegen sich die Elektronen dabei in Feldrichtung oder gegen die Feldrichtung?

Lösung

a) Wir suchen in der Tabelle den Wert der Grenzwellenlänge für Kupfer $\lambda_{\text{grenz}} = 0,29 \ \mu$m. Damit kann man die Ablöseenergie berechnen

$$E_{\text{ab}} = h \cdot f_{\text{grenz}} = \frac{h \cdot c}{\lambda_{\text{grenz}}} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{0,29 \cdot 10^{-6}} = 6,848 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 4,28 \text{ eV}$$

b) Die Photonenenergie ist daher

$$E_{\text{photon}} = 2 \cdot 4,28 = 8,56 \text{ eV}$$

und die kinetische Energie der Elektronen ist

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{photon}} - E_{\text{ab}} = 8,56 - 4,28 = 4,28 \text{ eV} = 6,848 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

das entspricht einer Geschwindigkeit von

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{\text{kin}}}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,848 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 1,23 \cdot 10^6 \text{ m/s} = 0,004 \cdot c$$

das sind 0,4% der Lichtgeschwindigkeit.
c) Die Grenzspannung für die Gegenfeldmethode ist dann

$$U_{\text{grenz}} = 4,28 \text{ V}$$

Die Elektronen bewegen sich hier in Richtung des elektrischen Feldes, da sie durch das Feld abgebremst werden.

8.2 Die Röntgenstrahlung

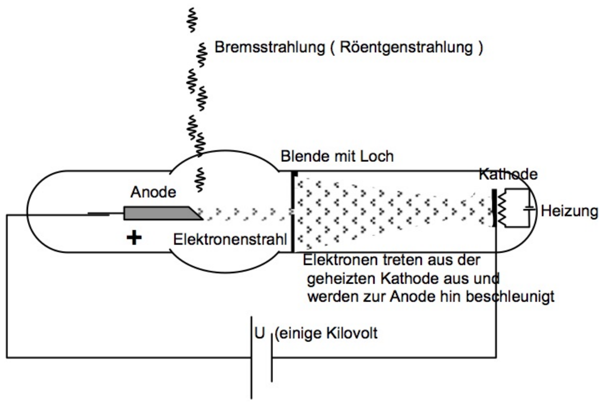
1895 entdeckte der Physiker Wilhelm Conrad Röntgen (1845-1923) eine neue Art von Strahlung, die er als X-Strahlen bezeichnete und die wir heute als Röntgenstrahlen kennen. In englischsprachigen Ländern ist die Bezeichnung X-rays üblich. Röntgen erhielt 1901 den ersten Nobelpreis für Physik. Röntgenstrahlung besteht aus sehr energiereichen elektromagnetischen Wellen mit den Wellenlängen zwischen 10 pm und 1 nm (Frequenz zwischen $3 \cdot 10^{17}$ Hz und $3 \cdot 10^{19}$ Hz).

Technisch werden Röntgenstrahlen in speziellen Röntgenröhren erzeugt. Es entsteht die Röntgenstrahlung durch die Abbremsung von schnellen Elektronen an einem Material (der Anode), und man nennt diese Röntgenstrahlung deshalb auch Bremsstrahlung.

8.2.1 Die Entstehung von Röntgenstrahlung in der Röntgenröhre

Der Aufbau

Die Abbildung zeigt den prinzipiellen Aufbau einer Röntgenröhre. Die gesamte Anordnung befindet sich in einem Glasgefäß mit Hochvakuum.
Der negative Pol (Kathode) besteht aus Metall und wird elektrisch geheizt. Dabei treten Elektronen aus dem Metall aus und werden im elektrischen Feld zwischen Kathode und Anode (positiver Pol) durch die Beschleunigungsspannung U (Hochspannung) beschleunigt. Die maximale Geschwindigkeit der Elektronen, die dadurch erreicht wird, kann durch den Energieerhaltungssatz bestimmt werden



$$\Delta E_{\text{kin}} + \Delta E_{\text{pot}} = 0$$

$$\frac{m \cdot v^2}{2} + U \cdot Q_e = 0$$

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{-2 \cdot U \cdot Q_e}{m}}$$

Die Änderung der kinetischen Energie $\Delta E_{\text{kin}} > 0$ ist hier positiv, da die Elektronen durch die Spannung beschleunigt werden (die Ladung der Elektronen $Q_e < 0$ wird mit negativem Vorzeichen eingesetzt). Die Elektronen bewegen sich gegen das elektrische Feld.
Beim Auftreffen der schnellen Elektronen auf der Anode wird die kinetische Energie der Elektronen in drei verschiedene Energien umgewandelt:

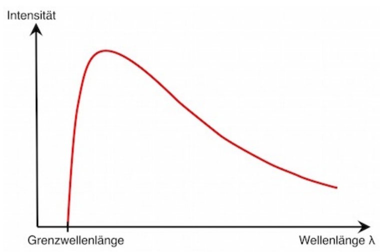
- Bremssstrahlung:
  Das ist die eigentliche und wichtige Röntgenstrahlung. Sie entsteht durch die Abbremsung der schnellen Elektronen an der Anode und wird meist normal zur Bewegungsrichtung der Elektronen abgestrahlt.

- Sekundärstrahlung:
  Die beschleunigten Elektronen können Elektronen der Hülle des Anodenmaterials herausschlagen. Diese Lücken werden dann von anderen Elektronen in der Hülle aufgefüllt. Dabei entstehen bestimmte elektromagnetische Wellen (Röntgen- und UV-Strahlung). Die Wellenlängen dieser "charakteristischen Strahlung" hängen vom Anodenmaterial ab.

- Wärmeenergie:
  Die beschleunigten Elektronen erwärmen das Anodenmaterial, das gekühlt werden muß.

Das Spektrum der Röntgenstrahlen

Wenn man die entstehende Bremsstrahlung der Röntgenröhre untersucht, stellt man fest, dass die Strahlung aus vielen verschiedenen Wellenlängen besteht. Man nennt das ein kontinuierliches Spektrum. Trägt man die Intensität der entstehenden Röntgenstrahlung in Abhängigkeit von der Wellenlänge auf, so ergibt sich das nebenstehende Diagramm.
Das kontinuierliche Spektrum beginnt ab einer bestimmten Wellenlänge λ_{grenz}. Unterhalb dieser Grenzwellenlänge wird keine Strahlung ausgesendet.



Die Grenzwellenlänge ist umso kleiner, je größer die Anodenspannung ist (also je größer die kinetische Energie der Elektronen ist). Sie hängt nicht vom Anodenmaterial ab. Sie hängt nur von der Beschleunigungsspannung ab.

Die Erklärung der Grenzwellenlänge mit der Quantentheorie

Diese Zusammenhänge lassen sich mit der Wellentheorie der elektromagnetischen Strahlung nicht erklären. Wir verwenden daher wieder die Photonenhypothese, die annimmt, dass die elektromagnetische Strahlung nur aus kleinen Energieportionen, den Photonen, besteht $E_{\text{photon}} = h \cdot f$.
Die Elektronen erhalten ihre kinetische Energie durch die Beschleunigung im elektrischen Feld

$$E_{\text{kin}} = |U \cdot Q_e|$$

In der Röntgenröhre entstehen dann durch den Aufprall der Elektronen Röntgenphotonen der Energie $E_{\text{photon}} = h \cdot f$. Jedes abgebremste Elektron erzeugt genau ein Röntgenphoton. Die Elektronen geben dabei unterschiedlich große Anteile ihrer kinetischen Energie ab. Das entstehende Röntgenphoton kann also höchstens die gleiche Energie besitzen, die ein Elektron vor dem Abbremsen hatte

$$\begin{aligned} E_{\text{photon}} &\leq E_{\text{kin}} \\ h \cdot f &\leq |U \cdot Q_e| \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Grenzfrequenz

$$f_{\text{grenz}} = \frac{|U \cdot Q_e|}{h}$$

und die Grenzwellenlänge

$$\lambda_{\text{grenz}} = \frac{c}{f_{\text{grenz}}} = \frac{h \cdot c}{|U \cdot Q_e|}$$

Die Beschleunigungsspannung bestimmt also die maximale Frequenz der Röntgenphotonen. Je höher die Frequenz der Röntgenstrahlung ist, umso besser durchdringt sie Materie.
Die Helligkeit der Röntgenstrahlung wird durch die Heizspannung der Kathode eingestellt. Diese bestimmt, wie viele Elektronen ausgesendet werden und damit, wie viele Röntgenphotonen entstehen. Je größer die Anzahl der Photonen, umso größer ist die Intensität.

Beispiel (8.4)

In einer Röntgenröhre werden Elektronen durch die Spannung von 1000 V beschleunigt.
a) Erklären Sie die Entstehung von Röntgenstrahlen in der Röntgenröhre!
b) Berechnen Sie die kinetische Energie der Elektronen! Geben Sie das Ergebnis in J und in eV an!
c) Auf welche Geschwindigkeit werden die Elektronen beschleunigt? Geben Sie das Ergebnis in Prozent der Lichtgeschwindigkeit c an!
d) Berechnen Sie die größtmögliche Frequenz und die kleinstmögliche Wellenlänge der Bremsstrahlung!

Lösung

a) Röntgenstrahlen entstehen, wenn die Elektronen am Anodenmaterial der Röntgenröhre abgebremst werden. Dabei wird auch Wärmeenergie und Sekundärstrahlung erzeugt.
b) Wir verwenden den Energieerhaltungssatz um die kinetische Energie zu berechnen

$$\Delta E_{\text{kin}} = -\Delta E_{\text{pot}} = -U \cdot Q_e = -1 \cdot 10^3 \cdot (-1,6 \cdot 10^{-19}) = 1,6 \cdot 10^{-16}\ \text{J} = 10^3\ \text{eV}$$

c) Die maximale Geschwindigkeit ergibt sich aus der Formel

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{kin}} &= \frac{m \cdot v^2}{2} \\ v_{\max} &= \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta E_{\text{kin}}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-16}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 1,875 \cdot 10^7\ \text{m/s} = 0,0625 \cdot c\end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit v entspricht 6,25% der Lichtgeschwindigkeit.
d) Die Grenzfrequenz ergibt sich, wenn die Elektronen alle Energie an die Röntgenphotonen abgeben

$$\begin{aligned}h \cdot f_{\text{grenz}} &= |U \cdot Q_e| \\ f_{\text{grenz}} &= \frac{|U \cdot Q_e|}{h} = \frac{10^3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{6,62 \cdot 10^{-34}} = 1,96 \cdot 10^{17}\ \text{Hz} \\ \lambda_{\text{grenz}} &= \frac{c}{f_{\text{grenz}}} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,96 \cdot 10^{17}} = 1,53 \cdot 10^{-9}\ \text{m} = 1,53\ \text{nm}\end{aligned}$$

8.2.2 Die Eigenschaften der Röntgenstrahlung

- Röntgenstrahlen sind elektromagnetische Wellen mit hoher Energie.
- Röntgenstrahlen können gestreut (reflektiert, gebrochen) und polarisiert werden. Sie können am Gitter von Kristallen gebeugt werden.
- Röntgenstrahlen werden in Materie absorbiert. Dabei nimmt die Intensität beim Eindringen exponentiell ab.
- Röntgenstrahlen durchdringen Atome mit kleiner Ordnungszahl, und werden von Atomen mit großer Ordnungszahl abgeschwächt oder absorbiert.
- Röntgenstrahlen werden nach ihrere Energie in harte Strahlen (hohe Energie) und weiche Strahlen (wenig Energie) unterteilt. Harte Strahlen haben eine große Eindringtiefe, weiche Strahlen haben eine geringe Eindringtiefe.
- Röntgenstrahlen können Gase ionisieren, das heißt, die Gasmoleküle verlieren durch Röntgenstrahlung ein Elektron und werden selbst zum positiven Kation. Dadurch werden Gase zu elektrischen Leitern.
- Röntgenstrahlen können Fotoplatten oder einen fotographischen Film schwärzen.
- Röntgenstrahlen werden weder in elektrischen noch in magnetischen Feldern abgelenkt.
- Röntgenstrahlen regen bestimmte Stoffe zur Lichtabgabe an ("Fluoreszenz").

8.3 Licht doch keine Welle, sondern Teilchen?

Die neuen Erkenntnisse aus dem Photoeffekt und dem Röntgenspektrum dürfen nicht dazu führen, Licht auf einmal als ein Teilchenphänomen zu betrachten. Man kann schließlich Phänomene wie Beugung und Interferenz nicht mit Teilchen erklären.
Es zeigt sich jedoch, dass die Wellentheorie allein keine ausreichende Beschreibung für das Wesen des Lichts liefert.
Auch Einstein selbst betonte, dass Photonen nicht als "Lichtteilchen" verstanden werden sollen, sondern als Energieportionen oder Quanten einer Lichtwelle mit neuartigen Quanteneigenschaften. Man bezeichnet dies als Welle-Teilchen-Dualismus.

Welle-Teilchen-Dualismus: Photonen sind weder Welle noch Teilchen sondern ein neue Art von Objekt (Quantenobjekt), das sich einmal als Welle zeigt und einmal als Teilchen.

Es stellte sich auch heraus, dass man "normale" Teilchen (z.B. Elektronen) auch als Quantenobjekte sehen muß, die manchmal als Teilchen und manchmal als Welle in Erscheinung treten.

8.4 Aufgaben

Photoeffekt

(8.1) Nennen Sie die Versuchsergebnisse beim Photoeffekt, welche mit der Wellenvorstellung des Lichtes unvereinbar sind!

(8.2) Auf eine bestimmte Metallplatte treffen Photonen mit der Energie 4 eV. Dabei werden Elektronen abgelöst. Die Ablöseenerige beträgt 3 eV.
a) Erklären Sie den hier dargestellten physikalischen Effekt!
b) Berechnen Sie die Wellenlänge des eingestrahlten Lichts! Berechnen Sie die kinetische Energie der Elektronen!
c) Erklären Sie die Gegenfeldmethode! Wie groß muß die dabei verwendete Spannung sein?
d) Was geschieht, wenn man die Lichtquelle entfernt und dadurch “weniger Licht” auf die Platte trifft?

(8.3) Eine Metallplatte wird mit Licht der Wellenlänge $\lambda = 0,3103125\mu$m bestrahlt. Dadurch werden Teilchen aus dem Metall abgelöst die in einem Feld so stark gebremst werden, dass sie nach Durchfliegen der Spannung $U = 1$V zum Stillstand kommen.
a) Um welche Teilchen und um welche Art von Feld handelt es sich? Wie heißt der physikalische Effekt?
b) Wie groß ist die kinetische Energie dieser Teilchen nach der Ablösung (in eV und J)?
c) Was versteht man unter Photonen und wie groß ist ihre Energie (in eV und J) hier?
d) Was versteht man unter der Ablöseenergie und wie groß ist sie hier?

(8.4) a) Wie viel Energie müssen Photonen (in eV) haben, damit sie aus einer Zinkplatte (Zn) Elektronen ablösen können?
b) Wir verwenden nun Licht mit doppelt so viel Energie als für die Ablöse notwendig ist. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der abgelösten Elektronen!
c) Wie groß muß die Gegenspannung sein, damit kein Photostrom mehr fließt? Bewegen sich die Elektronen dabei in Feldrichtung oder gegen die Feldrichtung?

(8.5) Um Elektronen aus einem bestimmten Metall abzulösen, braucht man Licht, das mindestens so viel Energie transportiert, wie Licht mit der Wellenlänge $\lambda = 0,620625\,\mu$m.
a) Berechnen Sie die Ablöseenergie des Metalls!
b) Wie groß muss die Grenzspannung bei der Gegenfeldmethode sein, damit der Photostrom gleich Null ist?
c) Ist das verwendete Licht für das menschliche Auge sichtbar? Werden auch Elektronen aus dem Metall abgelöst, wenn man Licht mit der halben Wellenlänge verwendet?

(8.6) Um Elektronen aus einer Magnesiumschicht (Mg) abzulösen, darf das Licht höchstens die Wellenlänge $\lambda = 370$ nm haben. Auf eine Magnesiumplatte fällt Licht der Wellenlänge $\lambda = 250$ nm.
a) Berechnen Sie die Ablöseenergie des Magnesiums!
b) Wie groß ist die Geschwindigkeit der austretenden Elektronen?
c) Welche Gegenspannung ist erforderlich, damit kein Photostrom mehr fließt?

(8.7) Die Kathode einer Photozelle hat die Grenzwellenlänge 639 nm. Sie wird mit Licht der Wellenlänge 540 nm bestrahlt. Es entsteht ein Photostrom.
a) Welche Energie hat ein eintreffendes Photon?
b) Welche Energie hat ein ausgelöstes Elektron?

(8.8) Eine Wolfram-Platte (W) wird mit elektromagnetischen Wellen beleuchtet. Bei Wolfram beträgt die Ablöseenergie 4,57 eV.

a) Kann mit Licht der Wellenlänge 589 nm ein Fotostrom ausgelöst werden?
b) Welche maximale Geschwindigkeit haben die Elektronen bei Bestrahlung mit Licht der Wellenlänge 236 nm?
c) Welche Gegenspannung ist bei Bestrahlung mit Licht der Wellenlänge 236 nm erforderlich, damit der Photostrom gleich Null ist?

(8.9) Aus einem Metall werden bei einer Frequenz $f = 1,66 \cdot 10^{15}$ Hz Photoelektronen der Energie 2,4 eV ausgelöst.
a) Berechnen Sie die Ablöseenergie des Metalls!
b) Wie groß muss die Frequenz mindestens sein, damit noch Elektronen ausgelöst werden können?

(8.10) Auf eine Silberplatte (Ag), die sich in einer Photozelle befindet, fällt Licht der Frequenz $f = 1,5 \cdot 10^{15}$ Hz. Die Ablöseenergie beträgt $E_{\text{ab}} = 4,70$ eV.
a) Mit welcher Geschwindigkeit verlassen die Photoelektronen das Silber?
b) Wie groß muß die Grenzspannung bei der Gegenfeldmethode sein?

(8.11) Eine Kaliumplatte (K) wird mit Licht der Wellenlänge $\lambda = 0,4\ \mu$m bestrahlt.
a) Es lösen sich Elektronen ab. Warum weiß man das sofort?
b) Welche Energie haben die eingestrahlten Photonen und die abgelösten Elektronen?
c) Welche Potentialdifferenz können die Elektronen überwinden?
d) Wie groß ist ihre Anfangsgeschwindigkeit? e) Welchen Einfluß hat die Intensität auf die Ablösung von Elektronen beim Photoeffekt.

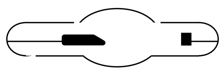
(8.12) Bei welchen Metallen der Tabelle genügt sichtbares Licht, um Elektronen abzulösen?

Röntgenstrahlung

(8.13) a) Wie ist eine Röntgenröhre aufgebaut?
b) Welche Wirkungen beobachtet man an der Anode?
c) Welche Form von Energie verwandelt sich in elektromagnetische Strahlungsenergie?
d) Geben sie wichtige Eigenschaften der Röntgenstrahlen an!
e) Vergleichen Sie die Wellenlänge der Röntgenstrahlen mit der Wellenlänge sichtbaren Lichts!

(8.14) a) Erklären Sie mit Hilfe einer Skizze, wie man Röntgenstrahlung erhalten kann!
b) Wie entsteht das Spektrum der Bremsstrahlung und wie sieht es aus?
c) Wie entsteht die charakteristische Röntgenstrahlung?

(8.15) a) Welches Gerät zeigt die Abbildung?
Zeichnen Sie die fehlenden Teile ein!



b) In diesem Gerät entstehen mehrere Arten von elektromagnetischen Wellen. Welche sind das?
c) Welche der entstehenden elektromagnetischen Wellen ist die Wichtigste? Was sind ihre Eigenschaften?

(8.16) In einer Röntgenröhre wird ein Elektron von $v_0 = 0$ m/s durch die Spannung von 5000 V beschleunigt.
a) Wie groß ist dabei die Änderung der kinetischen Energie (in eV und in J)?
b) Welche Geschwindigkeit erreicht das Elektron nach Durchlaufen dieser Spannung?
c) Berechnen Sie die größtmögliche Frequenz und die kleinstmögliche Wellenlänge der entstehenden Bremsstrahlung!

(8.17) a) Erklären Sie die kurzwellige Grenze des Röntgenspektrums mit Hilfe der Photonenhypothese.
b) Welche Grenzwellenlängen der Röntgenbremsstrahlung wird durch Elektronen der Geschwindigkeit $v = 0,3 \cdot c$ ausgelöst?

(8.18) In einer Röntgen-Röhre werden Röntgenstrahlen mit der Wellenlänge $1 \cdot 10^{-10}$ m erzeugt.
a) Berechnen Sie wie viel Prozent der Lichtgeschwindigkeit die Geschwindigkeit der Elektronen dafür betragen muss!
b) Wie groß muß die angelegte Spannung sein, damit die Elektronen auf diese Geschwindigkeit beschleunigt werden?

(8.19) An einer Röntgen-Röhre liegt die Spannung 12 kV an.
a) Bestimmen Sie die kurzwellige Grenze des Röntgenspektrums dieser Röhre!
b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit, mit der die Elektronen auf die Anode prallen!

(8.20) Berechnen Sie die Beschleunigungsspannung einer Röntgen-Röhre, mit der man Wellenlängen von 1pm erzeugt!

(8.21) a) Welche Geschwindigkeit müssen die Elektronen in einer Röntgen-Röhre erreichen, damit die erzeugten Röntgenstrahlen die Wellenlänge $\lambda = 10^{-10}$ m haben?
b) Wie viel Prozent der Lichtgeschwindigkeit beträgt die Geschwindigkeit der Elektronen?
c) Wie groß muss die angelegte Spannung sein, damit die Elektronen auf diese Geschwindigkeit beschleunigt werden?