Vorstudienlehrgang der Wiener Universitäten VWU

Skriptum

Physik-Kurs

Abschnitt 3: Weiterführende Mechanik

Katharina Durstberger-Rennhofer

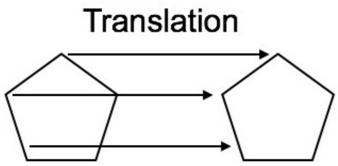
Version Jänner 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Die Rotation

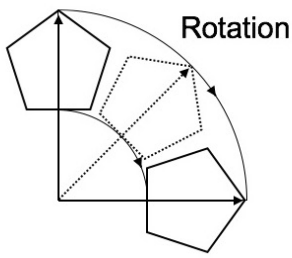
1.1 Grundbegriffe

Die Translation



- Die Translation ist die gewöhnliche Art der Bewegung eines Körpers.
- Alle Punkte des Körpers bewegen sich auf gleich langen und gleich geformten (kongruenten) Wegen.
- Alle Punkte sind gleich schnell.
- Die Richtung des Körpers bleibt gleich.

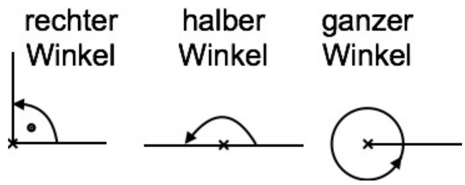
Die Rotation



- Bei der Rotation eines starren Körpers bewegen sich verschiedene Punkte auf konzentrischen Kreisen. (= Kreise mit gemeinsamem Mittelpunkt)
- Der Kreismittelpunkt ist der Drehpunkt (Drehzentrum).
- Alle Punkte drehen sich in gleichen Zeiten um denselben Winkel.
- Außenpunkte sind schneller als Innenpunkte.
- Die Richtung des Körpers dreht sich ebenfalls.

Der Winkel

Winkel können auf zwei Arten angegeben werden:



- im Gradmaß: $\beta \in [0°; 360°]$
  in Grad (°)
- im Bogenmaß: $\varphi \in [0; 2\pi]$
  in Radiant (rad)

Der Winkel im Bogenmaß entspricht der Länge eines Kreisbogens mit dem Radius 1 (Einheitskreisbogen).
Die Einheit des Winkels ist keine physikalische Einheit. Grad (°) und Radiant (rad) werden nur geschrieben, um das gewählte Maß anzuzeigen. Die physikalsiche Einheit des Winkels ist 1, er hat also keine physikalsiche Einheit sondern ist eine dimensionslose Zahl.

Winkelmaß	rechter Winkel	halber Winkel	ganzer Winkel
Gradmaß	$90°$	$180°$	$360°$
Bogenmaß	$\frac{\pi}{2} \approx 1,57$	$\pi \approx 3,14$	$2\pi \approx 6,28$

Die Umrechnung zwischen den beiden Maßen erfolgt mit dieser Formel

$$\varphi = \frac{2\pi}{360°} \cdot \beta \qquad \text{und} \qquad \beta = \frac{360°}{2\pi} \cdot \varphi$$

Die Länge eines Kreisbogens

Der Vorteil des Bogenmaßes ist, dass die Länge des Kreisbogens leicht zu berechnen ist, es gilt:

$$s = \varphi \cdot r$$

Beispiel (1.1)

Der Winkel ist $\beta = 25°$, der Radius beträgt $r = 100$ m. Wie lang ist der Kreisbogen?

Lösung

Zuerst müssen wir den Winkel ins Bogenmaß umrechnen

$$\varphi = \frac{2\pi}{360°} \cdot \beta = \frac{2\pi}{360°} \cdot 25 = 0,436\ rad$$

und damit können wir die Länge des Kreisbogens ausrechnen

$$s = \varphi \cdot r = 0,436 \cdot 100 = 43,6 \text{ m}$$

Beispiel (1.2)

Auf einer Uhr vergeht die Zeit von 0:00 Uhr bis 2:10 Uhr.
a) Berechnen Sie den Winkel, der vom Minutenzeiger übertrichen wird!
b) Berechnen Sie den Winkel, der vom Stundenzeiger überstrichen wird!
c) Welchen Weg legt die Spitze des Stundenzeigers zurück, wenn er 2 m lang ist?

Lösung

a) Der Minutenzeiger legt zwei volle Umdrehungen zurück und dann noch den Winkel von der Ziffer 12 zur Ziffer 2, was einem $\frac{1}{6}$ einer vollen Umdrehung entspricht:

$$\begin{aligned}\beta_{\text{m}in} &= 2 \cdot 360 + \frac{360}{6} = 780° \\ \varphi_{\text{min}} &= \frac{2\pi}{360°} \cdot \beta = \frac{2\pi}{360°} \cdot 780 = 13,613\ rad\end{aligned}$$

b) Der Stundenzeiger bewegt sich 12 Mal langsamer als der Minutenzeiger:

$$\begin{aligned}\beta_{std} &= \frac{\beta_{\text{m}in}}{12} = \frac{780}{12} = 65° \\ \varphi_{std} &= \frac{\varphi_{\text{min}}}{12} = \frac{13,613}{12} = 1,134\ rad\end{aligned}$$

c) Die Bogenlänge des Stundenzeigers ist

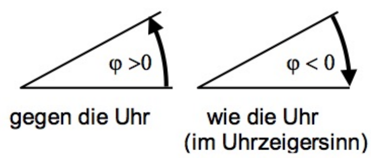
$$s = \varphi_{std} \cdot r = 1,134 \cdot 2 = 2,268 \text{ m}$$

Der Drehwinkel

Der Drehwinkel φ wird meist im Bogenmaß angegeben.

Der Drehwinkel kann positiv und negativ sein, je nach dem in welche Richtung die Drehung statt findet. Es gilt:

- $\varphi > 0$: bei einer Drehung gegen den Uhrzeigersinn
- $\varphi < 0$: bei einer Drehung im Uhrzeigersinn



Die Winkelgeschwindigkeit und die Bahngeschwindigkeit

Die Winkelgeschwindigkeit ω ist die änderung des Winkels $\Delta\varphi$ pro Zeiteinheit Δt

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \tag{1.1}$$

Einheit: $[\omega] = [\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}] = \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{1}{\text{s}}$

Die Bahngeschwindigkeit v ist die Wegänderung Δs pro Zeiteinheit Δt

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{r \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} = r \cdot \omega \tag{1.2}$$

Einheit: $[v] = [r \cdot \omega] = \text{m} \cdot \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Beispiel (1.3)

Ein Körper, der 6 m vom Drehzentrum entfernt ist, rotiert in 3 Sekunden um 25° . Berechnen Sie die Winkelgeschwindigkeit ω und die Bahngeschwindigkeit v!

Lösung

Der Winkel muss zuerst ins Bogenmaß umgerechnet werden $\varphi = \frac{2\pi}{360°} \cdot \beta = \frac{2\pi}{360°} \cdot 25 = 0,436$ rad. Dann kann man die Winkelgeschwindigkeit berechnen

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{0,436}{3} = 0,145 \text{ rad/s}$$

Für die Bahngeschwindigkeit ergibt sich

$$v = r \cdot \omega = 6 \cdot 0,145 = 0,872 \text{ m/s}$$

Die Umlaufzeit und die Frequenz

Die Umlaufzeit T ist die Zeit, die ein Körper für eine volle Umdrehung (360°) braucht.

Einheit: $[T] = \text{s}$

Die Frequenz f ist die Anzahl der (vollen) Umdrehungen pro Sekunde. Es gilt:

$$f = \frac{1}{T} \tag{1.3}$$

Einheit: $[f] = [\frac{1}{T}] = \frac{1}{\text{s}} = \text{Hz}$ Hertz

Es gibt auch noch einen Zusammenhang zwischen Frequenz f und Winkelgeschwindigkeit ω

$$\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T} \tag{1.4}$$

Beispiel (1.4)

Ein Rad mit Radius $r = 0,4$ m fährt mit der Geschwindigkeit $v = 20$ m/s.
a) Wie lange dauert eine Drehung?
b) Wieviele Umdrehungen pro Sekunde macht das Rad?

Lösung

a) aus der Bahngeschwindigkeit v berechnet man die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{20}{0,4} = 50 \text{ rad/s}$$

daraus kann die Periode T berechnet werden, die die Dauer einer Umdrehung angibt

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{50} = 0,126 \text{ s}$$

b) die Anzahl der Umdrehungen pro Sekunde erhält man mit der Frequenz

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{50}{2\pi} = 7,96 \text{ Hz}$$

Die Winkelbeschleunigung und die Bahnbeschleunigung

Rotationen können gleichförmig sein, dann rotiert der Körper pro Zeiteinheit immer um denselben Winkel und die Winkelgeschwindigkeit ω ist konstant. Die Winkelgeschwindigkeit kann sich aber auch mit der Zeit ändern, dann ist die Rotation beschleunigt. Statt Winkelbeschleunigung sagt man auch Drehbeschleunigung oder Rotationsbeschleunigung.

Die Winkelbeschleunigung α ist die änderung der Winkelgeschwindigkeit $\Delta\omega$ pro Zeit Δt

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \tag{1.5}$$

Einheit: $[\alpha] = [\frac{\Delta\omega}{\Delta t}] = \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} = \frac{1}{\text{s}^2}$

Die Bahnbeschleunigung a ist die änderung der Bahngeschwindigkeit Δv pro Zeiteinheit Δt

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{r \cdot \Delta\omega}{\Delta t} = r \cdot \alpha \tag{1.6}$$

Einheit: $[a] = [r \cdot \alpha] = \text{m} \cdot \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Beispiel (1.5)

Bei einem rotierenden Rad werden zu verschiedenen Zeitpunkten die Drehwinkel gemessen (siehe Tabelle).
a) Berechnen Sie die mittleren Winkelgeschwindigkeiten in den Zeitintervallen!
b) Berechnen Sie die Winkelbeschleunigung!

Zeit t in s	Winkel β in °
$t_1 = 0$	0
$t_2 = 0,5$	5
$t_3 = 1$	15
$t_4 = 1,5$	30

Lösung

Wir rechnen zuerst die Winkel ins Bogenmaß um (siehe Tabelle).

Zeit t in s	Winkel β in °	Winkel φ in rad
$t_1 = 0$	0	0
$t_2 = 0,5$	5	0,0872
$t_3 = 1$	15	0,2618
$t_4 = 1,5$	30	0,5236

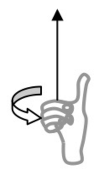
a) im ersten Intervall zwischen t_1 und t_2 gilt:
$\omega_{12} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi_2-\varphi_1}{t_2-t_1} = \frac{0{,}0872-0}{0{,}5-0} = 0,1744$ rad/s
im zweiten Intervall zwischen t_2 und t_3 gilt:
$\omega_{23} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi_3-\varphi_2}{t_3-t_2} = \frac{0{,}2618-0{,}0872}{1-0{,}5} = 0,3492$ rad/s
im dritten Intervall zwischen t_3 und t_4 gilt:
$\omega_{34} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi_4-\varphi_3}{t_4-t_3} = \frac{0{,}5236-0{,}2618}{1{,}5-1} = 0,5236$ rad/s

b) die Beschleunigung vom ersten auf das zweite Intervall beträgt
$\alpha_1 = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_{23}-\omega_{12}}{\Delta t} = \frac{0{,}3492-0{,}1744}{0{,}75-0{,}25} = 0,3496$ rad/s^2
die Beschleunigung vom zweiten auf das dritte Intervall beträgt
$\alpha_2 = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_{34}-\omega_{23}}{\Delta t} = \frac{0{,}5236-0{,}3492}{1{,}25-0{,}75} = 0,3488$ rad/s^2
die beiden Werte sind bis auf Rundungsfehler gleich, d.h. es handelt sich hier um eine gleichmäßig beschleunigte Rotation

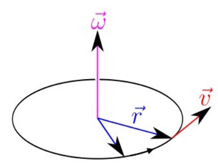
Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung als Vektor

Drehbewegungen können verschiedene Richtungen haben. Es ist daher von Vorteil, die Drehgrößen durch Vektoren darzustellen.

- Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ ist ein Vektor in Richtung der Drehachse.
Rechte-Hand-Schraubenregel: Die Finger der rechten Hand werden gekrümmt und ihre Krümmung wird der gegebenen Drehrichtung angepasst. Dann zeigt der ausgestreckte Daumen in Richtung des Vektors $\vec{\omega}$.



- Die Bahngeschwindigkeit $\vec{v}$ ist ein Vektor, der normal auf die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und den Radiusvektor $\vec{r}$ steht.
Die Bahngeschwindigkeit ist das Vektorprodukt $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.
Die Bahngeschwindigkeit $\vec{v}$ ist immer tangential an die Bahnkurve.



- Die Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha}$ ist ein Vektor in Richtung der Drehachse.

- Die Bahnbeschleunigung $\vec{a}$ ist ein Vektor, der sich in der Bahnebene befindet. Man kann ihn in einen Tangentialen Teil a_T und einen radialen Teil a_r zerlegen.

1.2 Die Dynamik von Drehbewegungen

1.2.1 Allgemeines

bei der Translation gilt:

- Die Kraft F ist die Ursache für Beschleunigungen a.
- Die Masse m (Trägheit) ist der Widerstand gegen Beschleunigungen.

$$a = \frac{F}{m}$$

- Die resultierende Kraft ist die Vektorsumme der Einzelkräfte auf einen Körper.
- Wenn die Gesamtkraft verschwindet, so gibt es keine Bewegung (dies nennt man Stillstand) oder eine gleichförmige Bewegung.
- Die Kraft ist die zeitliche änderung des Impulses $p = m \cdot v$.

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

bei der Rotation gilt:

- Das Drehmoment M ist die Ursache für Winkelbeschleunigungen α.
- Das Trägheitsmoment Θ (Trägheit) ist der Widerstand gegen Winkelbeschleunigungen.

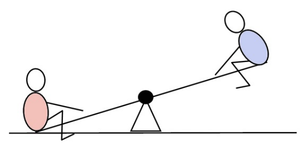
$$\alpha = \frac{M}{\Theta}$$

- Das resultierende Drehmoment ist die Vektorsumme der Einzeldrehmomente auf einen Körper.
- Wenn das Gesamtdrehmoment verschwindet, so gibt es keine Drehbewegung (dies nennt man Gleichgewicht) oder eine gleichförmige Drehbewegung.
- Das Drehmoment ist die zeitliche änderung des Drehimpulses $L = \Theta \cdot \omega$.

$$M = \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

1.2.2 Das Drehmoment

Das Hebelgesetz



Ein Hebel ist z.B. eine Wippe oder eine Waage. In der Praxis dienen Hebel dazu, an einem Drehpunkt mit verhältnismäßig geringer Kraft eine große Wirkung zu erzielen. Gute Beispiele für Hebel sind Flaschenöffner, Brechstangen oder Schraubenschlüssel.
Die Bewegung eines Hebels hängt von der Masse (bzw. der Kraft) auf beiden Seiten ab und vom Abstand der Massen vom Auflagepunkt (Drehpunkt). Diesen Abstand nennt man Kraftarm. Für eine Gleichgewichtssituation gibt es keine (Dreh-) Bewegung des Hebels mehr und es gilt das Hebelgesetz.

Das Hebelgesetz (für Gleichgewicht):
Kraft mal Kraftarm ist gleich Last mal Lastarm.

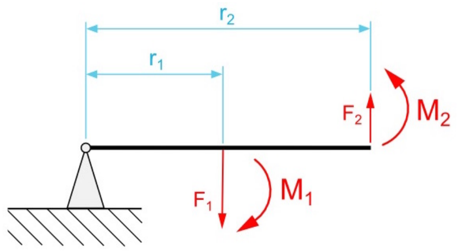
$$r_1 \cdot F_1 = r_2 \cdot F_2 \qquad \text{oder} \qquad M_1 = M_2$$

Das Produkt "Kraft mal Kraftarm" nennt man Drehmoment M.

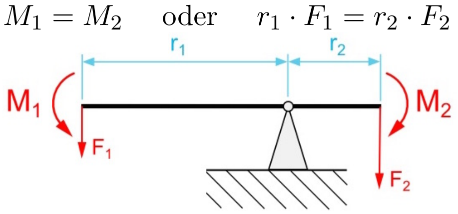
Einheit: $[M] = [r \cdot F] = \mathrm{m} \cdot \mathrm{N}$ Newtonmeter

Es gibt einseitige und zweiseitige Hebel:

- einseitiger Hebel:
  beide Kräfte greifen auf derselben Seite vom Drehpunkt an, wirken aber in verschiedene Richtungen, es gilt:
  $M_1 = M_2$ oder $r_1 \cdot F_1 = r_2 \cdot F_2$

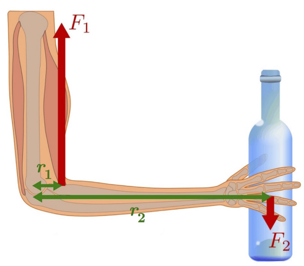


- zweiseitiger Hebel:
  beide Kräfte greifen auf verschiedenen Seiten vom Drehpunkt an, wirken aber in dieselbe Richtung, es gilt:
  $M_1 = M_2$ oder $r_1 \cdot F_1 = r_2 \cdot F_2$



Beispiel (1.6)

Der menschliche Unterarm kann als einseitiger Hebel gesehen werden. Der Ellbogen wirkt als Drehachse, die Gewichtskraft des zu tragenden Gegenstands wirkt nach unten, die Muskelkraft des Biceps nach oben.
Eine Person hält eine $m = 1$ kg schwere Flasche in der Hand. Der Anriffspunkt des Biceps-Muskels ist $r_1 = 5$ cm vom Drehpunkt im Ellbogen entfernt, der Abstand der Hand zum Drehpunkt beträgt $r_2 = 35$ cm.



Welche Kraft F_1 muss der Muskel aufbringen, um den Unterarm in horizontaler Position zu halten?

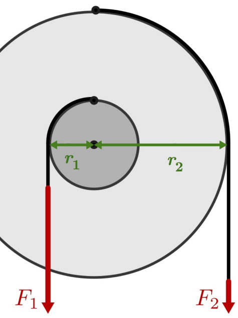
Lösung

Es soll ein Gleichgewicht am Hebel herrschen und daher müssen die beiden Drehmomente gleich groß sein.

$$\begin{aligned} M_1 &= M_2 \\ r_1 \cdot F_1 &= r_2 \cdot F_2 = r_2 \cdot m \cdot g \\ F_1 &= \frac{r_2 \cdot m \cdot g}{r_1} = \frac{0,35 \cdot 1 \cdot 10}{0,05} = 70 \text{ N} \end{aligned}$$

Beispiel (1.7)

Ein Wellrad besteht aus (mindestens) zwei verschieden großen und miteinander verbundenen Rädern, die fest auf einer Achse ("Welle") sitzen. Es handelt sich auch hier um einen Hebel, bei dem die Kraft und der Kraftarm normal aufeinander stehen. Wellräder finden ihre Anwendung als Kurbeln.
Ein Wellrad mit einem Radius von $r_2 = 25$ cm wird mit einer Kraft von $F_2 = 100$ N angetrieben. Wie groß ist die Kraft F_1, die dadurch auf ein Antriebsrad mit dem Radius $r_1 = 5$ cm wirkt?



Lösung

Das Hebelgesetz gilt:

$$\begin{aligned} M_1 &= M_2 \\ r_1 \cdot F_1 &= r_2 \cdot F_2 \\ F_1 &= \frac{r_2 \cdot m \cdot g}{r_1} = \frac{0,25 \cdot 100}{0,05} = 500 \text{ N} \end{aligned}$$

Auch in diesem Fall bewirkt eine kleine Kraft am großen Rad (Kurbel) eine große Kraft am kleinen Antriebsrad.

Das allgemeine Drehmoment

Beim einfachen Hebel ist der Kraftarm normal zur Kraft. Es gibt jedoch auch die Möglichkeit, dass der Kraftarm nicht normal zur Kraft ist. Dann gilt allgemein:

Das Drehmoment M ist gegeben durch die Kraft F, den Kraftarm r (Abstand des Angriffpunkts der Kraft vom Drehpunkt) und dem Winkel β zwischen F und r

$$M = \pm r \cdot F \cdot \sin \beta$$

Vorzeichen:
+ für ein Drehmoment, das zu einer Drehung gegen den Uhrzeigersinn führt
− für ein Drehmoment, das zu einer Drehung im Uhrzeigersinn führt

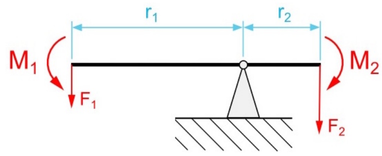
Einheit: $[M] = [r \cdot F \cdot \sin \beta] = \text{m} \cdot \text{N}$ Newtonmeter

Eine allgemeine Gleichgewichtssitutation ist gegeben durch

$$M_{ges} = M_1 + M_2 + \ldots = 0 \qquad (1.7)$$

Manchmal kann es für die Berechnung des Drehmomentes wichtig sein, den sogenannten Normalkraftarm $r_n = r \cdot \sin \beta$ zur Berechnung zu verwenden, $M = \pm r_n \cdot F$.

Beispiel (1.8)



Ein zweiseitiger Hebel befindet sich in der waagrechten Anfangsposition mit $F_1 = 4$ N, $r_1 = 5$ m, $F_2 = 10$ N und $r_2 = 2$ m.
Prüfen Sie, ob der Hebel im Gleichgewicht ist!

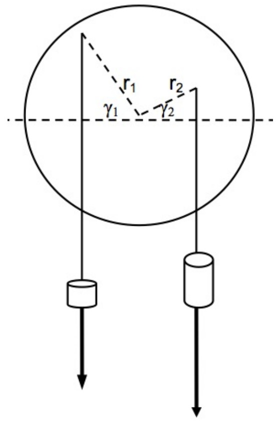
Lösung

Wir berechnen das gesamte Drehmoment

$$\begin{aligned} M_{ges} &= M_1 + M_2 \\ &= +F_1 \cdot r_1 \cdot \sin(90°) - F_2 \cdot r_2 \cdot \sin(90°) \\ &= +4 \cdot 5 - 10 \cdot 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dieser Hebel ist im Gleichgewicht und wird sich nicht aus seiner Lage wegbewegen.

Beispiel (1.9)



Auf einer drehbar gelagerten Scheibe sind wie in der Abbildung zwei Gewichte mit den Massen $m_1 = 8$ kg und $m_2 = 10$ kg im Abstand $r_1 = 7$ m und $r_2 = 5$ m vom Drehpunkt (Mittelpunkt) aufgehängt. Die Scheibe wird in einer Position so gehalten, dass $\gamma_1 = 50°$ und $\gamma_2 = 30°$.
a) In welche Drehrichtung bewegt sich das System, wenn es losgelassen wird?
b) Wie muss die Masse m_1 verändert werden, damit sich das System in der derzeiten Position im Gleichgewicht befindet?

Lösung

a) Dazu muss man das gesamte Drehmoment bestimmen

$$\begin{aligned} M_{ges} &= M_1 + M_2 \\ &= +m_1 \cdot g \cdot r_1 \cdot \sin(90° - \gamma_1) - m_2 \cdot g \cdot r_2 \cdot \sin(90° - \gamma_2) \\ &= +8 \cdot 10 \cdot 7 \cdot \sin 40° - 10 \cdot 10 \cdot 5 \cdot \sin 60° \\ &= +360 - 433 = -73 \text{ Nm} \end{aligned}$$

Das Minus bedeutet eine Drehung der Scheibe im Uhrzeigersinn.
b) Für das Gleichgewicht muß das gesamte Drehmoment gleich Null sein.

$$\begin{aligned} M_{ges} = 0 &= M_1 + M_2 \\ &= +m_1 \cdot g \cdot r_1 \cdot \sin(90° - \gamma_1) - m_2 \cdot g \cdot r_2 \cdot \sin(90° - \gamma_2) \\ &= +m_1 \cdot 10 \cdot 7 \cdot \sin 40° - 10 \cdot 10 \cdot 5 \cdot \sin 60° \\ &= +m_1 \cdot 45 - 433 \\ m_1 &= \frac{433}{45} = 9,6 \text{ kg} \end{aligned}$$

Das Drehmoment als Vektor

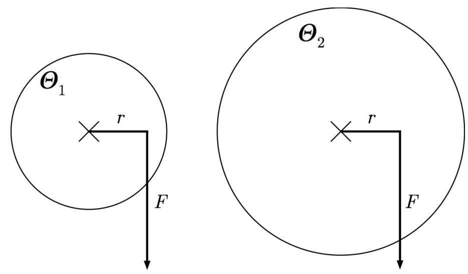
Das Drehmoment $\vec{M}$ ist ein Vektor, der normal auf den Kraftarm $\vec{r}$ und auf die Kraft F steht und durch das Kreuzprodukt gegeben ist

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Die Richtung des Drehmoments $\vec{M}$ ist parallel zur Richtung der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$.
Sehr nützlich ist die vektorielle Darstellung des Drehmoments, wenn ein Körper um mehrere Achsen gedreht wird. Dann ergibt sich das Gesamtdrehmoment als Vektorsumme der Einzeldrehmomente.

1.2.3 Das Trägheitsmoment

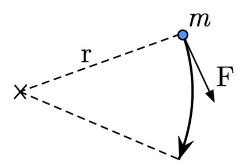
Jedes Drehmoment erzeugt eine Rotation (eigentlich eine Winkelbeschleunigung). Verschiedene Körper reagieren aber unterschiedlich auf das selbe Drehmoment. Zum Beispiel zwei verschieden große Räder, die durch das gleiche Drehmoment $M = r \cdot F$ in Rotation versetzt werden. Das kleinere Rad wird aber dadurch stärker beschleunigt als das größere Rad. Der Unterschied liegt in der sogenannten Trägheit der beiden Räder. Physikalisch spricht man vom Trägheitsmoment Θ (sprich: theta). Es gilt hier $\Theta_1 < \Theta_2$.



Das Trägheitsmoment Θ beschreibt den Widerstand gegen Drehbewegungen bzw. Winkelbeschleunigungen.

Berechnung des Trägheitsmomentes für einen Massenpunkt

Auf einen Massenpunkt m, der sich im Abstand r von einem Drehpunkt befindet, wirkt eine Kraft F, die zu einer Drehbewegung führt. Wir bestimmen das Drehmoment und verwenden dann das 2. Axiom von Newton sowie einige Grundlegende Definitionen von Bewegungsgrößen.



$$\begin{aligned} M &= r \cdot F = r \cdot m \cdot a = r \cdot m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} = \\ &= r \cdot m \cdot \frac{\Delta (r \cdot \omega)}{\Delta t} = r^2 \cdot m \cdot \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = r^2 \cdot m \cdot \alpha = \Theta \cdot \alpha \end{aligned}$$

Hier ist α die Winkelbeschleunigung und $\Theta = m \cdot r^2$ das Trägheitsmoment.
Man sieht hier bereits, dass das Trägheitsmoment vom Abstand zum Drehpunkt abhängt. Das Trägheitsmoment sagt uns, wie schwer es ist, dem Massenpunkt m eine Winkelbeschleunigung zu geben. Sie informiert uns über die Trägheit des Körpers, über seinen Widerstand gegen Winkelbeschleunigungen.

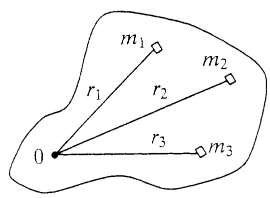
Für einen Massenpunkt ist das Trägheitsmoment $\Theta = m \cdot r^2$, wobei m die Masse und r der Abstand zum Drehpunkt (Drehachse) ist.

Einheit: $[\Theta] = [m \cdot r^2] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$

Das Trägheitsmoment ist ein Skalar.

Das Trägheitsmoment eines starren Körpers

Ein starrer Körper besteht aus vielen Massenpunkten m_1, m_2, m_3, … mit den Abständen r_1, r_2, r_3, …. Das gesamte Trägheitsmoment ist die Summe der einzelnen Trägheitsmomente



$$\Theta = \sum_i \Theta_i = \sum_i m_i \cdot r_i^2$$

Diese Summe ist im allgemeinen kompliziert zu berechnen. Für bestimmte Körper lässt sich aber mit Hilfe der Integralrechnung ein Ergebnis finden. Wir verwenden diese Formeln ohne Herleitung.

Dünner Ring (Reifen)	$\Theta = m \cdot r^2$
Voll-Zylinder (Voll-Rad)	$\Theta = \frac{1}{2} m \cdot r^2$
Kugel	$\Theta = \frac{2}{5} m \cdot r^2$

1.2.4 Der Drehimpuls

Für die Translation gilt:

- Der Impuls p ist das Produkt aus Masse m und Geschwindigkeit v: $p = m \cdot v$.
- Die Kraft F ist die zeitliche änderung des Impulses p: $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$.
- Wirkt auf ein System keine äußere Kraft (= abgeschlossenes System, $F_{\text{aussen}} = 0$), so bleibt der Gesamtimpuls erhalten ($\Delta p = 0$). (Impulserhaltungssatz)

Für die Rotation gelten analoge Gesetze:

Der Drehimpuls L ist das Produkt aus Trägheitsmoment Θ und Winkelgeschwindigkeit ω

$$L = \Theta \cdot \omega \tag{1.8}$$

Einheit: $[L] = [\Theta \cdot \omega] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Der Drehimpuls $\vec{L}$ ist eigentlich ein Vektor, der parallel zur Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ ist.

Beispiel (1.10)

Ein Voll-Zylinder (Masse $m = 10$ kg, Radius $r = 20$ cm) dreht sich 120 mal pro Minute. Berechnen Sie den Drehimpuls L!

Lösung

Die Frequenz ist $f = 120\frac{\text{Umdrehungen}}{\text{Minute}} = 120\frac{\text{Umdrehungen}}{\text{60Sekunden}} = 2$ Hz
damit ergibt sich für die Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 2 = 4\pi = 12,56$ rad/s
das Trägheitsmoment für einen Voll-Zylinder ist $\Theta = \frac{1}{2}m \cdot r^2 = \frac{1}{2}10 \cdot 0,2^2 = 0,2$ kg·m^2
damit ist der Drehimpuls $L = \Theta \cdot \omega = 0,2 \cdot 12,56 = 2,8$ kg·m^2/s^2

Das Drehmoment M ist die zeitliche änderung des Drehimpulses L

$$M = \frac{\Delta L}{\Delta t} \tag{1.9}$$

Dies kann einfach gezeigt werden:

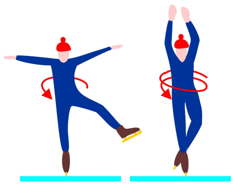
$$M = \Theta \cdot \alpha = \Theta \cdot \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

Drehimpulserhaltungssatz:
In einem abgeschlossenen System wirkt kein äußeres Drehmoment ($M_{\text{aussen}} = 0$) und der gesamte Drehimpuls ist erhalten:

$$L_{\text{ges}} = \text{const}, \qquad \Delta L_{\text{ges}} = 0 \tag{1.10}$$

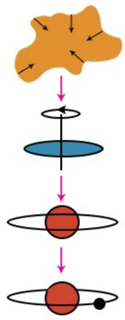
Beispiel

Im Sport (z.B. Eiskunstlaufen, Kunstspringen, Turnen) sind schnelle Drehungen wichtig. Bei (näherungsweise) konstantem Drehimpuls bewirkt eine Verkleinerung des Trägheitsmomentes durch Anziehen von Armen und Beinen eine Vergrößerung der Winkelgeschwindigkeit. Umgekehrt bewirkt ein Ausstrecken von Armen und Beinen eine Vergrößerung des Trägheitsmomentes und damit eine Verkleinerung der Winkelgeschwindigkeit.



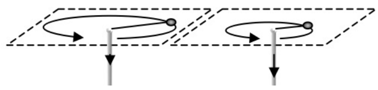
Beispiel

Ein anderes Beispiel ist die Entstehung von Sternen und Planetensystemen aus riesigen Gas- und Staubwolken. Diese besitzen einen bestimmten Drehimpuls. Verringert sich aufgrund der Gravitation zwischen den Teilchen die Größe der Wolke, so dreht sie sich immer schneller um ihren Schwerpunkt und bildet eine Scheibe. Es kommt zu Masseansammlungen, aus denen die Planeten entstehen. Auch unser Sonnensystem hat sich auf diese Weise gebildet, denn alle Planeten bewegen sich im gleichen Drehsinn und ungefähr in einer Ebene um die Sonne.



Beispiel (1.11)

Ein Massenpunkt m rotiert in einer horizontalen Ebene an einem Faden der Länge $r_1 = 10$ cm mit der Frequenz $f_1 = 4$ Hz (linkes Bild). Wie verändert sich die Rotation, wenn man den Faden auf $r_2 = 4$ cm verkürzt (rechtes Bild)? Berechnen Sie die Frequenz f_2!



Lösung

In diesem Beispiel ist der Drehimpuls erhalten und es gilt

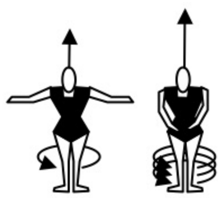
$$
\begin{aligned}
L_1 &= L_2 \\
\Theta_1 \cdot \omega_1 &= \Theta_2 \cdot \omega_2 \\
m \cdot r_1^2 \cdot 2\pi \cdot f_1 &= m \cdot r_2^2 \cdot 2\pi \cdot f_2 \\
r_1^2 \cdot f_1 &= r_2^2 \cdot f_2 \\
r_1 > r_2 &\implies f_1 < f_2
\end{aligned}
$$

Das heißt die Masse rotiert schneller.

$$f_2 = \frac{r_1^2 \cdot f_1}{r_2^2} = \frac{10^2 \cdot 4}{4^2} = 25 \text{ Hz}$$

Beispiel (1.12)

Die Pirouette beim Eistanzen:
Linkes Bild: Eine Eisläuferin dreht sich mit ausgebreiteten Armen mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 um ihre vertikale Achse.
Rechtes Bild: Die Eisläuferin zieht ihre Arme zum Körper. Sie dreht sich jetzt mit der Winkelgeschwindigkeit ω_2.
a) Welche physikalische Größe ist in beiden Bildern erhalten geblieben? Welche physikalische Größe ist kleiner geworden? Welche ist größer geworden?



b) Berechnen Sie die Winkelgeschwindigkeit ω_2 der Eisläuferin, wenn das Trägheitsmoment um 30% kleiner geworden ist und $\omega_1 = 6,28 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$!

Lösung

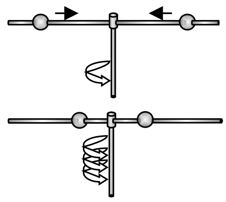
a) Der Drehimpuls ist in beiden Bildern (ungefähr) gleich groß. Das Trägheitsmoment Θ wird kleiner, da die Massenpunkte der Arme dann kleinere Radien haben. Dadurch wird die Winkelgeschwindigkeit ω größer, da der Drehimpuls erhalten bleibt. Die Drehbewegung wird von selbst schneller.

b) Wenn das Trägheitsmoment um 30% kleiner wird, so sind noch 70% von Θ_1 übrig, das heißt: $\Theta_2 = 0,7 \cdot \Theta_1$.

$$\begin{aligned} L_1 &= L_2 \\ \Theta_1 \cdot \omega_1 &= \Theta_2 \cdot \omega_2 \\ \omega_2 &= \frac{\Theta_1 \cdot \omega_1}{\Theta_2} = \frac{\Theta_1 \cdot 6,28}{0,7 \cdot \Theta_1} = 8,97\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Beispiel (1.13)

Zwei schwere Kugeln mit der Masse m sind auf einer horizontalen Stange symmetrisch zur vertikalen Achse verschiebbar. Man versetzt die Anordnung mit $\omega_1 = 15\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ in Rotation. Dabei sind die Kugeln im Abstand $r_1 = 0,3$ m von der vertikalen Achse haben. Danach wird der Abstand der Kugeln von der Achse während der Rotation durch einen Mechanismus auf $r_2 = 0,1$ m verkürzt. Berechnen Sie ω_2!



Lösung

Der Drehimpuls bleibt erhalten:

$$\begin{aligned} L_1 &= L_2 \\ \Theta_1 \cdot \omega_1 &= \Theta_2 \cdot \omega_2 \\ 2 \cdot m \cdot r_1^2 \cdot \omega_1 &= 2 \cdot m \cdot r_2^2 \cdot \omega_2 \\ \omega_2 &= \frac{r_1^2 \cdot \omega_1}{r_2^2} = \frac{0,3^2 \cdot 15}{0,1^2} = 135\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{aligned}$$

1.2.5 Die Rotationsenergie

Wir definieren in Analogie zur Translation:

Die Rotationsenergie E_{rot} ist die Energie, die man braucht, um einen Körper von der Winkelgeschwindigkeit $\omega_0 = 0$ auf die Winkelgeschwindigkeit ω zu beschleunigen.

$$\Delta E_{\text{rot}} = \frac{\Theta \cdot \omega^2}{2} \tag{1.11}$$

Beispiel (1.14)

Ein Rad mit der Masse $m = 2$ kg und dem Radius $r = 0,5$ m ist um eine unbeweglichen Achse drehbar und wird von Null auf $\omega = 4$ rad/s beschleunigt. Wie groß ist die Energie, die dazu nötig ist?

Lösung

Das Trägheitsmoment des Rades (Reifen) ist $\Theta = m \cdot r^2 = 2 \cdot 0,5^2 = 0,5$ kg·m^2

Das Rad bekommt die Rotationsenergie

$$\Delta E_{\text{rot}} = \frac{\Theta \cdot \omega^2}{2} = \frac{0,5 \cdot 4^2}{2} = 4\ \text{J}$$

Beispiel (1.15)

Ein Rad (Masse $m = 2$ kg, Radius $r = 0,5$ m) wird auf einer ebenen Straße reibungsfrei von der Geschwindigkeit Null auf die Geschwindigkeit $v = 3$ m/s beschleunigt. Wie groß ist die Energie, die dazu nötig ist?

Lösung

Das Trägheitsmoment des Rades (Reifen) ist $\Theta = m \cdot r^2 = 2 \cdot 0,5^2 = 0,5$ kg·m^2. Dann muß man die Winkelgeschwindigkeit berechnen

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{3}{0,5} = 6 \text{ rad/s}$$

Das Rad bekommt die Rotationsenergie ΔE_{rot} (für die Rotation) und die kinetische Energie ΔE_{kin} (für die Translation)

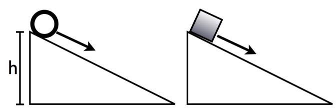
$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{rot}} &= \frac{\Theta \cdot \omega^2}{2} = \frac{0,5 \cdot 6^2}{2} = 8 \text{ J} \\ \Delta E_{\text{kin}} &= \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{2 \cdot 3^2}{2} = 9 \text{ J} \end{aligned}$$

Die Gesamtenergie ist dann

$$\Delta E_{\text{ges}} = \Delta E_{\text{rot}} + \Delta E_{\text{kin}} = 8 + 9 = 17 \text{ J}$$

Beispiel (1.16)

Ein Reifen (Radius $r = 2$ m, Masse $m = 10$ kg) rollt (reibungsfrei) auf einer schiefen Ebene (Höhenunterschied $h = 4$ m) zu Boden. Parallel dazu gleitet ein Quader (Masse $m = 10$ kg) (ebenfalls reibungsfrei) auf derselben Ebene zu Boden.
Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Reifens und des Quaders am Boden!



Lösung

Wir verwenden hier den Energieerhaltungssatz

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{ges}} = 0 &= \Delta E_{\text{pot}} + \Delta E_{\text{kin}} + \Delta E_{\text{rot}} \\ 0 &= m \cdot g \cdot \Delta h + \frac{m \cdot v^2}{2} + \frac{\Theta \cdot \omega^2}{2} \\ m \cdot g \cdot h &= \frac{m \cdot v^2}{2} + \frac{\Theta \cdot v^2}{2 \cdot r^2} \end{aligned}$$

Wir verwenden $\Delta h = -h$ und $\omega = \frac{v}{r}$.
Für den Reifen gilt jetzt $\Theta = m \cdot r^2$ und es ergibt sich

$$\begin{aligned} m \cdot g \cdot h &= \frac{m \cdot v^2}{2} + \frac{m \cdot r^2 \cdot v^2}{2 \cdot r^2} \qquad | : m \\ g \cdot h &= \frac{v^2}{2} + \frac{v^2}{2} = v^2 \\ v_{\text{reifen}} &= \sqrt{g \cdot h} = \sqrt{10 \cdot 4} = 6,32 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Für den Quader gilt: $\Theta = 0$ (es gibt keine Rotation)

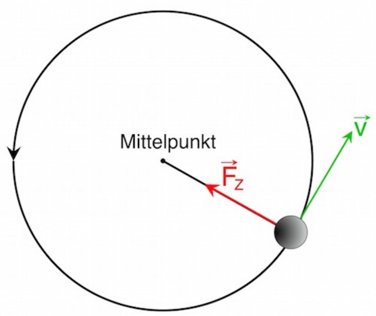
$$\begin{aligned} m \cdot g \cdot h &= \frac{m \cdot v^2}{2} + 0 \qquad | : m \\ g \cdot h &= \frac{v^2}{2} \\ v_{\text{quader}} &= \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 4} = 8,94 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Das Reifen bewegt sich langsamer als der Quader, weil sich seine potentielle Energie nicht nur in kinetische Energie sondern auch in Rotationsenergie verwandelt.

1.2.6 Übersicht Vergleich Translation – Rotation

Translation	Rotation	
Ort s	Winkel φ	$s = \varphi \cdot r$
(Bahn-) Geschwindigkeit $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$	Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$	$v = \omega \cdot r$
(Bahn-) Beschleunigung $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	Winkelbeschleunigung $\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$	$a = \alpha \cdot r$
Kraft F	Drehmoment M	$M = F \cdot r$
Masse m	Trägheitsmoment Θ	$\Theta \propto m \cdot r^2$
kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{m \cdot v^2}{2}$	Rotationsenergie $E_{\text{rot}} = \frac{\Theta \cdot \omega^2}{2}$	
Impuls $p = m \cdot v$	Drehimpuls $L = \Theta \cdot \omega$	
Newton Axiom $F = m \cdot a$	$T = \Theta \cdot \alpha$	

1.3 Die Zentripetalkraft



Wenn auf einen Körper keine Kraft wirkt, so bewegt er sich gleichförmig und geradlinig (1. Axiom von Newton). Wenn ein Körper auf einer Kreisbahn rotiert, muss es also eine Kraft geben, die den Körper von der Geraden auf die Kreisbahn (Kurve) zwingt. Diese Kraft heißt Zentripetalkraft und ist immer auf den Mittelpunkt der Kreisbewegung gerichtet.
Lässt man zum Beispiel einen Körper an einem Faden um einen Mittelpunkt herum kreisen, so muss man diesen aktiv zum Mittelpunkt ziehen. Reißt der Faden, so kann keine Kraft mehr auf den Körper wirken. Der Körper bewegt sich dann geradlinig und tangential zur Kreisbahn weiter in Richtung der momentanen Bahngeschwindigkeit v.

Die Zentripetalkraft F_{zp} ist die Kraft, die einen Körper auf einer Kreisbahn hält. Sie ist stets zum Mittelpunkt der Kreisbahn gerichtet und steht immer normal auf die Richtung der Bahngeschwindigkeit v. Die Größe der Zentripetalkraft ist

$$F_{zp} = m \cdot \omega^2 \cdot r = m \cdot \frac{v^2}{r} \tag{1.12}$$

wobei r der Radius der Kreisbahn ist.

Die Rotation ist eine beschleunigte Bewegung (auch wenn die Winkelgeschwindigkeit ω konstant ist). Es wirkt die Zentripetalbeschleunigung

$$\alpha_{zp} = \omega^2 \cdot r = \frac{v^2}{r} \tag{1.13}$$

die zum Mittelpunkt der Kreisbahn zeigt.

Damit sich ein Körper auf einer Kreisbahn bewegen kann, muss auf ihn eine Zentripetalkraft wirken, die stets zum Mittelpunkt der Kreisbahn gerichtet ist. Wer diese Kraft aufbringt, hängt vom jeweiligen Beispiel ab.

- Bei der Bewegung des Mondes um die Erde wirkt die Gravitationskraft (Massenanziehung zwischen Mond und Erde) als Zentripetalkraft.
- Bei dem am Faden kreisenden Körper wird die Zentripetalkraft vom Faden (bzw. von der Hand, die diesen festhält) aufgebracht.
- Im Karussell wird die Zentripetalkraft von den Sitzen bzw. vom Sicherungssystem aufgebracht.
- Bei der Kurvenfahrt eines Autos wird die Zentripetalkraft von der Reibungskraft zwischen Reifen und Straße aufgebracht.

Beispiel (1.17)

Die Masse $m = 0,5$ kg rotiert an einem Faden mit der Länge $r = 0,8$ m mit 120 Drehungen pro Minute. Der Faden reißt bei einer maximalen Zug-Kraft von $F_{\text{zug,max}} = 100$ N.
Kann dieser Faden die rotierende Masse auf der Kreisbahn halten oder reißt er?

Lösung

In diesem Fall wird die Zentripetalkraft von der Haltekraft des Fadens aufgebracht. Der Faden reißt nicht, wenn die Haltekraft kleiner ist als die maximale zulässige Zugkraft

$$F_{\text{halte}} = F_{\text{zp}} \leq F_{\text{zug,max}}$$

Die Frequenz ist

$$f = 120\,\frac{1}{\text{min}} = 120\,\frac{1}{60\text{s}} = 2\,\frac{1}{\text{s}} = 2\text{ Hz}$$

und die Winkelgeschwindigkeit (Kreisfrequenz) ist

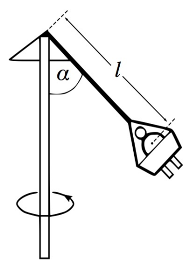
$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 2 = 4 \cdot \pi = 12,56\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Damit ist die Zentripetalkraft gleich

$$F_{zp} = m \cdot \omega^2 \cdot r = 0,5 \cdot 12,56^2 \cdot 0,8 = 63,1\text{ N}$$

Um die Masse auf einer Kreisbahn zu halten, braucht man nur die Kraft $F_{\text{halte}} = F_{\text{zp}} = 63,1$ N. Der Faden ist daher stark genug.

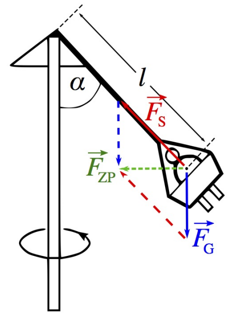
Beispiel (1.18)



Ein Kettenkarussell dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. Die Länge der Kette (bis zum Körperschwerpunkt) ist $l = 15$ m. Der Winkel zwischen der Drehachse und der Kette ist $\alpha = 56°$. Die Person auf dem Karussell hat die Masse $m = 75$ kg.
a) Zeichnen Sie die auf die Person wirkenden Kräfte ein!
b) Berechnen Sie die Winkelgeschwindigkeit ω und die Bahngeschwindigkeit v der Person!

Lösung

Auf den Mann und die Gondel mit Kette wirken zwei Kräfte. Nach unten hin die Gewichtskraft F_g und durch das Seil die Zugkraft F_S. Die Resultierende der beiden Kräfte ist die Zentripetalkraft F_{zp}, die die Gondel auf ihrer Kreisbahn hält.



b) Aus einer Betrachtung der Winkel am Kräftediagramm ergibt sich

$$\tan\alpha = \frac{F_{\text{zp}}}{F_g} = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot r}{m \cdot g} = \frac{\omega^2 \cdot r}{g}$$

Der Winkel ist also unabhängig von der Masse der Person.

Der Abstand der Person von der Drehachse ergibt sich als

$$r = l \cdot \sin\alpha = 15 \cdot \sin 56 = 12,44 \text{ m}$$

Damit können wir die Winkelgeschwindigkeit berechnen

$$\omega = \sqrt{\frac{\tan\alpha \cdot g}{r}} = \sqrt{\frac{\tan 56 \cdot 10}{12,44}} = 1,09 \text{ rad/s}$$

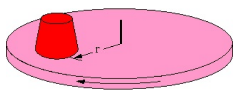
Damit ist die Bahngeschwindigkeit

$$v = r \cdot \omega = 12,44 \cdot 1,09 = 13,6 \text{ m/s}$$

Beispiel (1.19)

Auf einer rotierenden Scheibe (Winkelgeschwindigkeit ω) liegt im Abstand $r = 0,5$ m vom Mittelpunkt ein Körper mit der Masse $m = 3$ kg (Haftreibungszahl $\mu_H = 0,8$).

Berechnen Sie, wie groß die Frequenz maximal sein darf, damit der Körper noch stehen bleibt und nicht umkippt oder auf der Scheibe zu gleiten beginnt.



Lösung

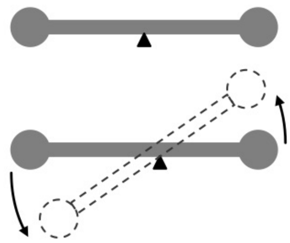
Die Haftreibungskraft sorgt hier für die nötige Haltekraft $F_{\text{halte}} = F_{\text{HR}} = \mu_H \cdot m \cdot g$. Der Körper bleibt also stehen, wenn die Haltekraft größer ist als die Zentripetalkraft

$$\begin{aligned} F_{\text{halte}} &\geq F_{\text{zp}} \\ \mu_H \cdot m \cdot g &\geq m \cdot \omega^2 \cdot r \\ \omega &\leq \sqrt{\frac{\mu_H \cdot g}{r}} = \sqrt{\frac{0,8 \cdot 10}{0,5}} = 4\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} &\leq \frac{4}{2 \cdot \pi} = 0,63 \text{ Hz} \end{aligned}$$

Der Körper bleibt auf der Scheibe stehen, solange die Frequenz kleiner ist als $0,63$ Hz.

1.4 Der Schwerpunkt

1.4.1 Allgemeines

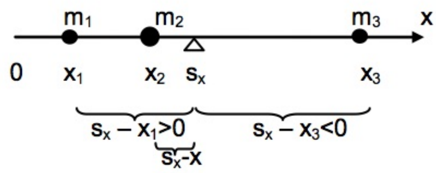


Unterstützt man den abgebildeten Körper in seinem "Mittelpunkt", so heben sich das positive Drehmoment (erzeugt durch die Schwerkraft F_1) und das negative Drehmoment (erzeugt durch F_2) auf und das gesamte Drehmoment verschwindet. Der Körper erhält keine Winkelbeschleunigung und bleibt im Gleichgewicht.
Unterstützt man den Körper jedoch in einem anderen Punkt, so entsteht eine Winkelbeschleunigung. Dieser spezielle "Mittelpunkt" des Körpers heißt Schwerpunkt oder Massenmittelpunkt. Es gilt:

> Schwerpunktsatz:
> Unterstützt man einen Körper genau im Schwerpunkt S (Massenmittelpunkt), so ist das gesamte Drehmomente aller Massenpunkte bezüglich der Schwerkraft gleich Null. Der Körper befindet sich im Gleichgewicht und damit in Ruhe.
>
> $$M_{\text{ges}} = 0 \tag{1.14}$$

Bei regelmäßig geformten Körpern aus einem Stoff liegt der Schwerpunkt in der Körpermitte. Bei unregelmäßig geformten Körpern kann man den Schwerpunkt rechnerisch und experimentell bestimmen.

1.4.2 Berechnung des Schwerpunkts für Massenpunkte



Die Abbildung zeigt drei verschiedene Massenpunkte m_1, m_2 und m_3 auf einer gemeinsamen Geraden an den Orten x_1, x_2 und x_3. Die Gerade (x-Achse) steht normal zur Schwerkraft F_g. Wir denken uns einen Körper aus den 3 Massenpunkten aufgebaut. Wir wollen den Körper genau im Schwerpunkt s_x unterstützen, sodass das gesamte Drehmoment gleich Null ist.

$$M_1 + M_2 + M_3 = 0$$
$$m_1 \cdot g \cdot r_1 + m_2 \cdot g \cdot r_2 - m_3 \cdot g \cdot r_3 = 0$$
$$m_1 \cdot g \cdot (s_x - x_1) + m_2 \cdot g \cdot (s_x - x_2) + m_3 \cdot g \cdot (s_x - x_3) = 0$$

Daraus kann man die Koordinate des Schwerpunktes berechnen

$$s_x = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + x_3 \cdot m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Wenn die Massenpunkte nicht alle auf einer Geraden liegen, so muss man x-Koordinate, y-Koordinate und z-Koordinate des Schwerpunkts getrennt bestimmen. Es gilt:

Der Schwerpunkt eines Systems von Massenpunkten m_1, m_2, m_3, ... mit den Koordinaten $(x_1/y_1/z_1)$, $(x_2/y_2/z_2)$, $(x_3/y_3/z_3)$, ... ist gegeben durch

$$s_x = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + x_3 \cdot m_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}$$
$$s_y = \frac{y_1 \cdot m_1 + y_2 \cdot m_2 + y_3 \cdot m_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}$$
$$s_z = \frac{z_1 \cdot m_1 + z_2 \cdot m_2 + z_3 \cdot m_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}$$

Beispiel (1.20)

Im Punkt $P(1/2)$ befindet sich die Masse $m_1 = 3$ kg, in $Q(4/3)$ befinden sich $m_2 = 6$ kg, in $R(10/0)$ befinden sich $m_3 = 2$ kg und in $T(13/1)$ befindet sich $m_4 = 5$ kg. Bestimmen Sie den Schwerpunkt S des Systems!

Lösung

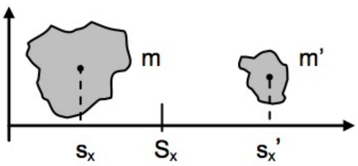
Wir setzen in die Formel für den Schwerpunkt ein

$$s_x = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + x_3 \cdot m_3 + x_4 \cdot m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = \frac{1 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 10 \cdot 2 + 13 \cdot 5}{3 + 6 + 2 + 5} = \frac{112}{16} = 7$$
$$s_y = \frac{y_1 \cdot m_1 + y_2 \cdot m_2 + y_3 \cdot m_3 + x_4 \cdot m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 6 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 5}{3 + 6 + 2 + 5} = \frac{29}{16} = 1,8$$

Die Koordinaten des Schwerpunktes: $S(7/1,8)$

1.4.3 Berechnung des Schwerpunkts mehrerer Körper

Wir wollen den gemeinsamen Schwerpunkt von 2 Körpern berechnen. Körper 1 hat die Masse m_1 und sein Schwerpunkt liegt bei $s_x^{(1)}$, Körper 2 hat die Masse m_2 und den Schwerpunkt $s_x^{(2)}$.
Der gemeinsame Schwerpunkt ergibt sich dann zu



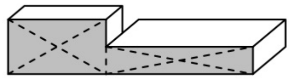
$$s_x = \frac{s_x^{(1)} \cdot m_1 + s_x^{(2)} \cdot m_2}{m_1 + m_2}$$

Allgemein gilt daher:

Der gemeinsame Schwerpunkt von mehreren Körpern m_1, m_2, ... mit den einzelnen Schwerpunkten $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, ... ergibt sich als

$$s_x = \frac{s_x^{(1)} \cdot m_1 + s_x^{(2)} \cdot m_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots}$$
$$s_y = \frac{s_y^{(1)} \cdot m_1 + s_y^{(2)} \cdot m_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots}$$
$$s_z = \frac{s_z^{(1)} \cdot m_1 + s_z^{(2)} \cdot m_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots}$$

Beispiel (1.21)



Die Abbildung zeigt einen Körper, der aus zwei Quadern gemeinsamer Dichte $\rho = 800$ kg/m^3 besteht. Die Abmessungen sind:
Körper 1: Länge $l_1 = 4$ m, Breite $b_1 = 1$ m, Höhe $h_1 = 2$ m
Körper 2: Länge $l_2 = 6$ m, Breite $b_2 = 2$ m, Höhe $h_2 = 1$ m

Lösung

Zuerst müssen wir die Masse der beiden Körper berechnen

$$m_1 = \rho \cdot V_1 = \rho \cdot l_1 \cdot b_1 \cdot h_1 = 800 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 = 6400 \text{ kg}$$
$$m_2 = \rho \cdot V_2 = \rho \cdot l_2 \cdot b_2 \cdot h_2 = 800 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1 = 9600 \text{ kg}$$

Der Schwerpukt des ersten Körpers ist

$$S^{(1)} = \left(\frac{l_1}{2}/\frac{b_1}{2}/\frac{h_1}{2}\right) = \left(2/\frac{1}{2}/1\right)$$

und vom zweiten Körper

$$S^{(2)} = \left(\frac{l_2}{2} + l_1/\frac{b_2}{2}/\frac{h_2}{2}\right) = \left(7/1/\frac{1}{2}\right)$$

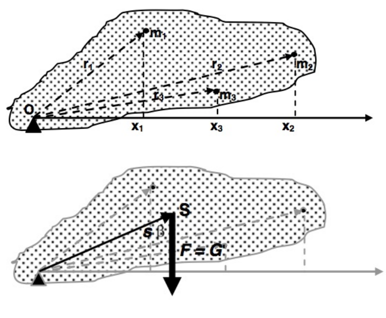
wobei man hier drauf achten muss, dass man zur x-Koordinate die Länge des ersten Körpers addiert, da der zweite Körper ja verschoben ist. Damit ergibt sich der gemeinsame Schwerpunkt

$$\begin{aligned}
s_x &= \frac{s_x^{(1)} \cdot m_1 + s_x^{(2)} \cdot m_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 6400 + 7 \cdot 9600}{6400 + 9600} = 5 \\
s_y &= \frac{s_y^{(1)} \cdot m_1 + s_y^{(2)} \cdot m_2}{m_1 + m_2} = \frac{0,5 \cdot 6400 + 1 \cdot 9600}{6400 + 9600} = 0,8 \\
s_z &= \frac{s_z^{(1)} \cdot m_1 + s_z^{(2)} \cdot m_2}{m_1 + m_2} = \frac{1 \cdot 6400 + 0,5 \cdot 9600}{6400 + 9600} = 0,7
\end{aligned}$$

Die Koordinaten des Schwerpunkts sind $S(5/0,8/0,7)$.

1.4.4 Schwerpunkt und Drehmoment

Ausgedehnte Körper verhalten sich in Bezug auf Ruhe und Bewegung so, als ob die Gewichtskraft des Körpers oder eine andere äußere Kraft an einem Punkt, dem Schwerpunkt, angreift.



Ein starrer ausgedehnter Körper ist um eine Achse O drehbar. Die Schwerkraft erzeugt ein Drehmoment M_{ges}, das die Summe der Drehmomente aller Massenpunkte ist

$$\begin{aligned}
M_{\text{ges}} &= \pm(r_1 \cdot m_1 \cdot g \cdot \sin\varphi_1 + r_2 \cdot m_2 \cdot g \cdot \sin\varphi_2 + \ldots) \\
&= \pm(x_1 \cdot m_1 \cdot g + x_2 \cdot m_2 \cdot g + \ldots) \\
&= \pm(s_x \cdot m_{\text{ges}} \cdot g) \\
&= \pm(s \cdot m_{\text{ges}} \cdot g \cdot \sin\beta) \\
&= \pm(s \cdot F_g \cdot \sin\beta)
\end{aligned}$$

Man sieht hier, dass man das gesamte Drehmoment auch erhält, indem man sich die gesamte Masse $m_{\text{ges}} = m_1 + m_2 + \ldots$ im Schwerpunkt $S(s_x)$ konzentriert denkt und dort die gesamte Schwerkraft $F_g = m_{\text{ges}} \cdot g$ wirkt.

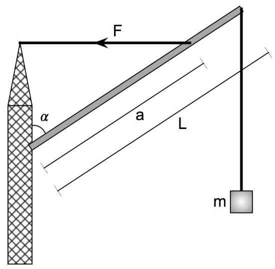
Das gesamte Drehmoment aller Massenpunkte bezüglich der Schwerkraft eines Körpers ist gleich dem Drehmoment, das man erhält, wenn die gesamte Masse punktförmig im Schwerpunkt konzentriert ist.

Man sagt auch:

Die Schwerkraft eines ausgedehnten Körpers greift im Schwerpunkt S an.

Beispiel (1.22)

Der Arm des Krans ist $L = 8$ m lang und hat die Masse $m_{\text{arm}} = 100$ kg. Das Gewicht, das an seinem Ende hängt, hat die Masse $m = 300$ kg. Der Winkel zwischen Kranarm und der Vertikalen beträgt $\alpha = 40°$. Der Kranarm wird mit einer horizontalen Kraft F gehalten. Der Abstand zwischen dem Drehpunkt des Kranarms und dem Angriffspunkt von F beträgt $a = 4$ m.
Berechnen Sie die Größe der Kraft F, die nötig ist, um das System im Gleichgewicht zu halten!



Lösung

Es wirken hier 3 Kräfte und damit gibt es drei verschiedene Drehmomente. Das gesamte Drehmoment ist im Gleichgewicht gleich Null

$$M_{\text{ges}} = M_1 + M_2 + M_3 = 0$$

Das erste Drehmoment wird von der Kraft F verursacht

$$M_1 = +F \cdot a \cdot \sin(90° - \alpha) = +F \cdot 4 \cdot \sin 50°$$

das zweite Drehmoment erzeugt die Schwerkraft der Masse m

$$M_2 = -m \cdot g \cdot L \cdot \sin\alpha = -300 \cdot 10 \cdot 8 \cdot \sin 40°$$

und das dritte Drehmoment wird von der Gewichtskraft des Kranarmes erzeugt, das im Schwerpunkt des Kranarmes (= Mittelpunkt des Kranarmes) angreift

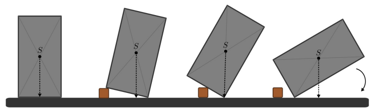
$$M_3 = -m_{\text{arm}} \cdot g \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin\alpha = -100 \cdot 10 \cdot 4 \cdot \sin 40°$$

Eingesetzt ergibt sich

$$F \cdot 4 \cdot \sin 50° - 300 \cdot 10 \cdot 8 \cdot \sin 40° - 100 \cdot 10 \cdot 4 \cdot \sin 40° = 0$$
$$F = \frac{300 \cdot 10 \cdot 8 \cdot \sin 40° + 100 \cdot 10 \cdot 4 \cdot \sin 40°}{4 \cdot \sin 50°} = 5873,7 \text{ N}$$

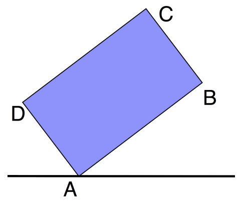
1.4.5 Die Standfestigkeit und das Kippen eines Körpers

Gebäude, Türme, Krane oder Regale sollen standfest sein, also nicht umkippen. Entscheidend für die Standfestigkeit eines Körpers ist die Lage seines Schwerpunktes bezüglich seiner Auflagefläche. Ein Körper ist dann standfest, wenn die am Schwerpunkt angreifende Gewichtskraft durch die Auflagefläche (Standfläche) verläuft.



Beispiel (1.23)

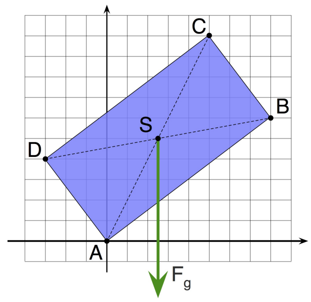
Ein quaderförmiger Körper (siehe Bilde) ist durch die Koordinaten der Seitenfläche gegeben: $A(0/0)$, $B(8/6)$, $C(5/10)$, $D(-3/4)$ mit $\overline{AB} = 5$ cm und $\overline{CD} = 10$ cm. Die Masse des Körpers ist $m = 10$ kg und homogen verteilt.



a) Zeichnen Sie den Körper! Bestimmen Sie Sie, in welche Richtung der Körper kippt (auf welche Seitenkante) wenn die Schwerkraft (nach unten in y-Richtung) wirkt und der Punkt A fix ist!
b) Berechnen Sie die Größe des Drehomoments, das auf den Körper wirkt!

Lösung

a) Wenn man den Körper aufzeichnet, sieht man, dass der Schwerpunkt über der Seitenkante $\overline{AB}$ liegt und der Körper daher nach rechts kippen wird.



b) Die Gewichtskraft grift im Schwerpunkt (= Körpermittelpunkt) an

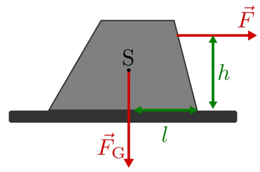
$$S = \frac{1}{2}(A + C) = \frac{1}{2}(B + D) = (2,5/5)$$

Das Drehmoment ergibt sich als

$$M = s_x \cdot F_g = s_x \cdot m \cdot g = -2,5 \cdot 10 \cdot 10 = -250 \text{ Nm}$$

Das Minus bedeutet eine Drehung im Uhrzeigersinn.

Eine Kraft F wirkt in einer Höhe h über der Standfläche eines Körpers waagrecht auf den Körper ein. Diese Kraft bewirkt ein Drehmoment auf den Körper bezüglich der Kippkante, das so genannte Kippmoment $M_{\text{kipp}} = F \cdot h$. Die Schwerkraft bewirkt Drehmoment in die andere Richtung, das den Körper wieder stabilisiert. Dies ist das so genannte Standmoment $M_{\text{stand}} = F_g \cdot l$, wobei l der Abstand der Kippkante von der Wirkungslinie der Gewichtskraft F_g ist.



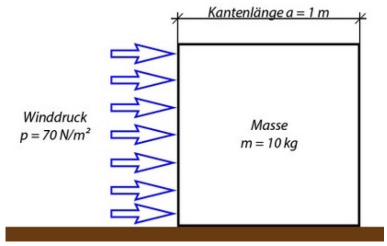
Der Körper kippt nicht, wenn das Kippmoment kleiner oder gleich wie das Standmoment ist:

$$\begin{aligned} M_{\text{kipp}} &\leq M_{\text{stand}} \\ F \cdot h &\leq F_g \cdot l \end{aligned}$$

Die zum Kippen des Gegenstands nötige Kraft beträgt also mindestens $F = \frac{F_g \cdot l}{h}$.
Die Standfestigkeit eines Gegenstands ist umso größer, je geringer seine Höhe h ist, je größer seine Gewichtskraft F_g ist und je größer der Abstand l des Schwerpunkts zur Kippkante ist.
(Die Standfestigkeit eines Körpers ist umso größer, je größer seine Masse und Standfläche und je tiefer sein Schwerpunkt ist.)

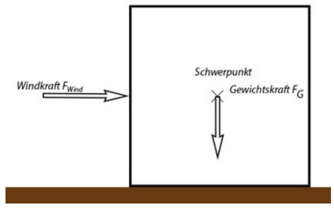
Beispiel (1.24)

Ein Würfel (Kantenlänge $a = 1$ m, Masse $m = 10$ kg) steht auf einer horizontalen Ebene und ist einem Winddruck von $p = 70$ N/m^2 ausgesetzt.
Zeigen Sie durch Rechnung, ob der Würfel stehen bleibt oder kippt!



Lösung

Die Dichte des Würfels ist überall gleich (homogen), daher befindet sich der Schwerpunkt genau im Mittelpunkt. Die Gewichtskraft greift im Schwerpunkt des Körpers an und wirkt nach unten



$$F_g = m \cdot g = 10 \cdot 10 = 100 \text{ N}$$

Der Windd drückt gleichmäßig auf die eine Seite des Würfels. Wir können daher den Wind durch eine Windkraft darstellen, die genau auf die Mitte der Seitenfläche drückt

$$F_{\text{wind}} = p \cdot A = p \cdot a^2 = 70 \cdot 1^2 = 70 \text{ N}$$

Für die Standfestigkeit sind nun das Kippmoment und das Standmoment zu vergleichen

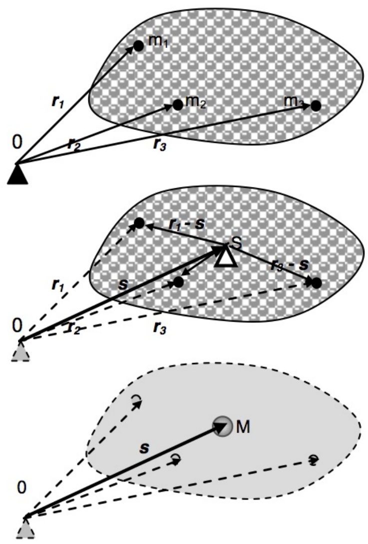
$$\begin{aligned} M_{\text{kipp}} &= F_{\text{wind}} \cdot \frac{a}{2} = 70 \cdot 0,5 = 35 \text{ Nm} \\ M_{\text{stand}} &= F_g \cdot \frac{a}{2} = 100 \cdot 0,5 = 50 \text{ Nm} \end{aligned}$$

In diesem Fall ist $M_{\text{kipp}} < M_{\text{stand}}$ und der Würfel bleibt stehen (= kippt nicht).

1.4.6 Satz von Steiner

Das Trägheitsmoment eines Körper hängt von der Achse ab, um die er sich dreht. Bisher ist die Drehachse immer durch den Schwerpunkt S des Körpers verlaufen. Wenn sich ein Körper jetzt um eine Achse 0 dreht, die parallel zur Achse durch S verläuft, so kann man das neue Trägheitsmoment mit dem Satz von Steiner berechnen, der im folgenden besprochen wird.

Der starre Körper mit n Massenpunkten $m_1, m_2, \ldots, m_n$ mit den Ortsvektoren $r_1, r_2, \ldots r_n$ ist um einen bestimmten Drehpunkt (Achse) 0 drehbar.



- Wenn der Drehpunkt in 0 ist und die Ortsvektoren gegeben sind, dann ist das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich des Drehpunktes in 0 gegeben durch

$$\Theta_0 = \sum_i r_i^2 \cdot m_i$$

- Wenn man den Drehpunkt in den Schwerpunkt S des Körpers verschiebt, so muss man statt der Ortsvektoren r_i dieVektoren $r_i - s$ verwenden. Dieses Trägheitsmoment bezüglich des Drehpunktes in S ist gegeben durch

$$\Theta_S = \sum_i (r_i - s)^2 \cdot m_i$$

- Wenn die gesamte Masse $m_{\text{ges}} = \sum_i m_i$ nun im Schwerpunkt S konzentriert ist, und der Drehpunkt wieder in 0 ist, so ist dieses Trägheitsmoment gegeben durch

$$\Theta' = s^2 \cdot \sum_i m_i = s^2 \cdot m_{\text{ges}}$$

- Man sieht jetzt leicht, dass die Gleichung gilt

$$\Theta_0 = \Theta' + \Theta_S$$

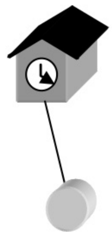
Der Satz von Steiner

Das Trägheitsmoment Θ_0 eines Körpers bezüglich der Achse 0 ist gleich der Summe aus dem Trägheitsmoment Θ' der gesamten Masse im Schwerpunkt und dem Trägheitsmoment Θ_S bezüglich der Achse im Schwerpunkt.

$$\Theta_0 = \Theta' + \Theta_S$$

Beispiel (1.25)

Das Pendel einer Uhr besteht aus einer dünnen Stange mit Länge L (masselos), sowie aus einem Zylinder (Radius r, Dicke h, Masse m). Bestimmen sie das Trägheitsmoment Θ_0 des Pendels, wobei als Achse 0 der Punkt der Aufhängung gelten soll.



Lösung

Wir verwenden hier den Satz von Steiner, um das Trägheitsmoment des Zylinders zu bestimmen, dessen Drehpunkt nicht im Schwerpunkt liegt, sondern in der Aufhängung.

Der Schwerpunkt S ist der Mittelpunkt des zylinderförmigen Körpers. Der Abstand des Schwerpunkts vom Aufhängungspunkt 0 ist $s = L + r$. Damit ergibt sich

$$\Theta' = s^2 \cdot m_{\text{ges}} = (L + r)^2 \cdot m$$

und das Trägheitsmoment eines Zylinders ist

$$\Theta_S = \frac{1}{2} m \cdot r^2$$

Damit ergibt sich für das schwingende Pendel ein Trägheitsmoment von und damit

$$\Theta_0 = \Theta' + \Theta_S = (L + r)^2 \cdot m + \frac{1}{2} m \cdot r^2$$

1.5 Aufgaben

Grundbegriffe

(1.1) a) Was versteht man unter dem Bogenmaß? In welcher Einheit wird das Bogenmaß gemessen?
b) Bestimmen Sie das Bogenmaß folgender Winkel: 45°, 30°, 60°, 40° !

(1.2) a) In welchem Zusammenhang steht die Bogenlänge eines Kreisbogens mit dem Bogenmaß?
b) In welcher Einheit wird die Winkelgeschwindigkeit und die Frequenz gemessen?

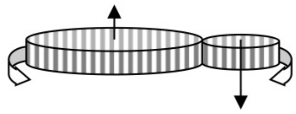
(1.3) a) Auf welchen Wegen bewegen sich die Massenpunkte eines rotierenden starren Körpers?
b) Punkte eines rotierenden Körpers, die weiter vom Drehzentrum entfernt liegen, haben eine größere ______________ (Winkel-/Bahn-)-geschwindigkeit.
c) Alle Punkte eines rotierenden Körpers haben dieselbe ______________ (Winkel-/Bahn-)-geschwindigkeit.

(1.4) Ein Rad mit Radius $r = 2$ m hat die Umlaufzeit $T = 0,4$ s. Bestimmen Sie Frequenz, Winkelgeschwindigkeit und Bahngeschwindigkeit!

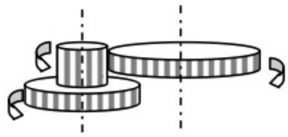
(1.5) Die Räder eines Autos haben den Radius $r = 40$ cm. Berechnen Sie Winkelgeschwindigkeit und Frequenz, wenn das Auto mit 120 km/h fährt!

(1.6) Der Sekundenzeiger einer Uhr ist genau $r = 1\text{m}$ lang. Bestimmen Sie seine Winkelgeschwindigkeit und Bahngeschwindigkeit!

(1.7) Der Radius des großen Zahnrades in der Abbildung beträgt $r_1 = 2$ m, beim kleinen ist $r_2 = 0,8$ m. Das große Rad macht 3 Umdrehungen pro Sekunde.
Berechnen Sie Winkelgeschwindigkeit, Bahngeschwindigkeit und Frequenz beider Räder!

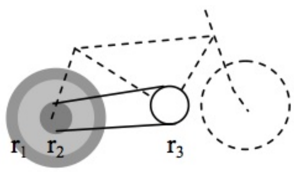


(1.8) Die beiden linken Zahnräder sind fest mit einander verbunden und haben die Radien $r_1 = 10$ m und $r_2 = 4$ m. Das rechte Zahnrad mit dem Radius $r_3 = 16$ m greift in die Zähne des oberen linken Zahnrades.
a) Welche Räder haben dieselbe Winkelgeschwindigkeit?
b) Welche Räder haben dieselbe Bahngeschwindigkeit?
c) Rad 1 dreht sich mit der Frequenz $f_1 = 5$ Hz. Berechnen Sie die Frequenz f_3 von Rad 3!



(1.9) Bei einem Traktor hat das Vorderrad den Radius $r_1 = 0,4$ m und das Hinterrad den $r_2 = 1$ m. Welches Rad dreht sich schneller? Wieviel mal schneller?

(1.10) Die Abbildung zeigt, wie das Hinterrad eines Fahrrades durch eine Kette angetrieben wird. Dabei kommen drei Räder (1), (2) und (3) vor mit den Radien $r_1 = 80$ cm, $r_2 = 5$ cm, $r_3 = 10$ cm.
a) Welche Räder haben dieselbe Winkelgeschwindigkeit, welche haben dieselbe Bahngeschwindigkeit?
b) Mit welcher Frequenz muss man in die Pedale (3) treten, damit das Hinterrad (1) des Fahrrades auf der Strasse mit 5 m/s fährt?



(1.11) Der Erdradius beträgt etwa 6370 km. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich ein Punkt auf der Erdoberfläche (am Äquator) bei der Erddrehung? (Beachten Sie: Die Erde dreht sich in einem Tag einmal um sich selbst.)

(1.12) Die Erde bewegt sich auf einer annähernd kreisförmigen Bahn um die Sonne. Der Radius dieser Kreisbahn beträgt etwa 150 Millionen Kilometer. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich die Erde auf dieser Bahn? Drücken Sie die Geschwindigkeit im km/s aus!

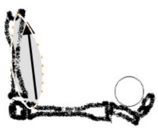
Hebel, Drehmoment und Gleichgewicht

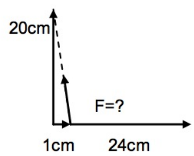
(1.13) An einer Waage hängt im Abstand $r_1 = 10$ cm eine Masse $m_1 = 2$ kg. In welchem Abstand zur Drehachse muss man ein Gegengewicht mit einer Masse von $m_2 = 0,5$ kg anbringen, damit die Waage im Gleichgewicht ist?

(1.14) Eine Person hält ein $m = 2$ kg schweres Gewicht mit horizontal gehaltenem Unterarm in der Hand (der Oberarm hängt dabei lose nach unten). Der Anriffspunkt des Muskels am Unterarm ist $r_1 = 5$ cm vom Drehpunkt im Ellenbogen entfernt, der Abstand der Hand zum Drehpunkt beträgt $r_2 = 35$ cm.
Welche Kraft F_1 muss der Muskel aufbringen, um den Unterarm in horizontaler Position zu halten?

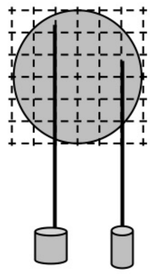
(1.15) An der linken Seite eines zweiseitigen Hebels sind zwei Gewichte $F_1 = 3,5$ N und $F_2 = 5$ N im Abstand $r_1 = 0,2$ m bzw. $r_2 = 0,1$ m von der Drehachse befestigt. Am rechten Arm sind zwei Gewichte $F_3 = 1,5$ N und $F_4 = 4$ N im Abstand $r_3 = 0,6$ m bzw. $r_4 = 0,075$ m angebracht. Befindet sich der Hebel im Gleichgewicht?

(1.16) Die Kugel hat die Masse $m = 15$ kg. Knochen und Muskel seien masselos. Wie groß muss die Kraft F sein, mit welcher der Muskel ziehen muss, um die Kugel im Gleichgewicht zu halten?



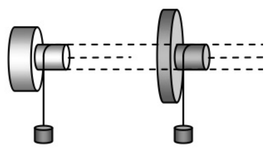


(1.17) An einem Rad, sind zwei Massen aufgehängt. Ihre Gewichte erzeugen Drehmomente. Die Aufhängepunkte sind aus der Abbildung ersichtlich. Die Achse geht durch den Mittelpunkt des Rades. Die linke Masse beträgt $m_1 = 10$ kg. Wie groß muß die rechte Masse sein, damit das Rad im Gleichgewicht bleibt?



Trägheitsmoment

(1.18) Die beiden Wellräder haben dieselbe Masse und sind um eine feste Achse drehbar. Am Anfang gibt es keine Rotation. Die Masse, die am Faden hängt ist ebenfalls in beiden Abbildungen gleich groß. Trotzdem dreht sich eines der beiden Räder nach der Zeit t doppelt so schnell wie das andere.
a) Welches der beiden Räder ist schneller und warum?
b) Welche wichtigen Rotationsgrößen sind in beiden Abbildungen gleich, welche sind verschieden?



Drehimpuls

(1.19) Ein Stern mit Radius $r_1 = 10^6$ km und einer Rotationsdauer von 1 Monat (=30 Tage) wandelt sich am Ende seiner Lebenszeit in einen gleichschweren Pulsar (schnell rotierender Neutronenstern) mit nur noch $r_2 = 20$ km Radius um. Berechnen Sie die Umlaufzeit des Pulsars unter der Annahme der Drehimpulserhaltung!

(1.20) Eine Eiskunstläuferin beginnt eine Pirouette, in dem sie für eine Umdrehung 0,4 s benötigt. Durch Heranziehen der Arme verringert sich das Trägheitsmoment um 22%.
Wie lange braucht sie jetzt für eine Umdrehung?

Rotationsenergie

(1.21) Wieviel Energie braucht man um, einen Reifen ($r = 0,8$ m, $m = 0,5$ kg) von 0 auf $v = 5$ m/s zu beschleunigen, wenn man ihn
a) um eine feste Achse dreht (reine Rotation)
b) auf einer ebenen Straße rollt (Rotation + Transation)!

(1.22) Berechnen Sie die Rotationsenergie eines drehbar gelagerten zylindrischen Körpers vom Radius $r = 0,2$ m und der Masse $m = 44$ kg, der mit konstanter Winkelbeschleunigung $\alpha = 0,2$ rad/s^2 aus dem Zustand der Ruhe 8 Sekunden lang gleichmäßig beschleunigt wurde! (Hinweis: Benutzen Sie $\omega = \alpha \cdot t$)

(1.23) Ein Vollrad (Radius $r = 1$ m, Masse $m = 5$ kg) rollt reibungsfrei auf einer schiefen Ebene (Höhenunterschied $h = 2$ m) zu Boden.
Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Vollrades am Boden!

(1.24) a) Welche Geschwindigkeit erreicht eine Vollkugel (Trägheitsmoment $\Theta_{\text{kugel}} = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2$), die auf einer schiefen Ebene aus der Höhe h reibungsfrei herunterrollt?
b) Wie ändert sich die Geschwindigkeit, wenn an Stelle der Kugel ein Vollzylinder (Trägheitsmoment $\Theta_{\text{vollzyl}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$) mit gleicher Masse m und mit gleichem Radius r die Ebene herunterrollt?

Zentripetalkraft

(1.25) Die Masse $m = 10$ kg rotiert an einem 2 m langen Faden, welcher bei einer Belastung von 50 N reißt.
Ab welcher Frequenz geschieht dies?

(1.26) Ein Massenpunkt ($m = 0,5$ kg) rotiert an einem Faden der Länge $l = 80$ cm. Der Faden überstreicht dabei pro Sekunde einen Winkel $\beta = 150°$.
a) Berechnen Sie Bahn- und Winkelgeschwindigkeit, Frequenz und Umlaufdauer!
b) Welche Kraft übt der Faden auf die Masse aus?

(1.27) Ein Käfer ($m = 1$ g) rotiert windgeschützt auf der Flügelspitze ($r = 15$ m) einer Windkraftanlage, die für eine Umdrehung 2 Sekunden braucht. Mit welcher Kraft muss sich der Käfer mit seinen kleinen Käferbeinen an dem Flügel festhalten, damit er darauf sitzen bleibt?

(1.28) Der Large Hadron Collider (LHC) ist ein Teilchenbeschleuniger am Europäischen Kernforschungszentrum CERN bei Genf. In einem 26,659 km langen Ringtunnel, der sich in 50 bis 175m Tiefe unter der Erde befindet, bewegen sich Protonen (positiv geladene Kernteilchen) mit unvorstellbar hohen Geschwindigkeiten. Die Teilchen werden dabei von supraleitenden Magneten auf ihrer Bahn gehalten. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass es sich hierbei um eine Kreisbahn handelt.
a) Berechnen Sie den Radius des Ringtunnels!
b) Die Forscher geben an, dass die Protonen im Ringtunnel eine (Bahn-)Geschwindigkeit von 99,9999991% der Lichtgeschwindigkeit ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s) erreichen. Berechnen Sie die Geschwindigkeit v der Protonen in den Einheiten m/s und km/h!
c) Berechnen Sie, wie lange ein Proton für einen Umlauf im Ringtunnel benötigt! Berechnen Sie, wie viele Umläufe ein Proton in einer Sekunde schafft!
d) Berechnen Sie die Zentripetalkraft, die ein Proton während der Bewegung erfährt!
(Masse des Protons $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg)

Schwerpunkt

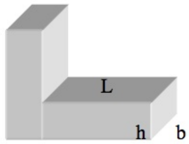
(1.29) Drei verschiedene Massen befinden sich in folgenden Punkten und sind unter einander starr verbunden.

Masse	$m_1 = 3$ kg	$m_2 = 8$ kg	$m_3 = 9$ kg
Punkt	$P_1(2/5)$	$P_2(4/0)$	$P_3(7/5)$

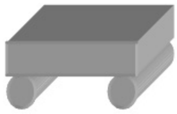
a) Was versteht man unter dem Schwerpunkt eines Körpers?
b) Berechnen Sie den Schwerpunkt der drei Massen!

(1.30) Gegeben ist ein starres System von drei Massenpunkten: $m_1 = 3$ kg befindet sich im Punkt $P(2/5)$, $m_2 = 1$ kg in $Q(7/0)$ und $m_3 = 11$ kg in $R(12/2)$.
a) Definieren Sie den Schwerpunkt eines Systems von Massenpunkten!
b) Bestimmen sie die Koordinaten des gemeinsamen Schwerpunkts der gegebenen Massenpunkte!

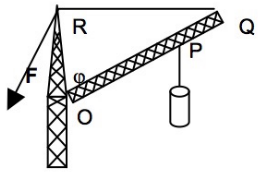
(1.31) Der abgebildete Körper besteht aus zwei gleichen Quadern der Masse m, wobei Länge $L = 4,5$ m, Breite $b = 2,2$ m und Höhe $h = 1,5$ m.
Bestimmen Sie die Koordinaten des gemeinsamen Schwerpunkts!



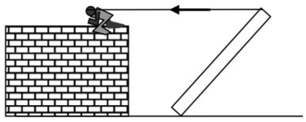
(1.32) Berechnen Sie die Koordinaten $S(s_x/s_y/s_z)$ des gemeinsamen Schwerpunkts für den abgebildeten Körper (Länge $l = 6$ m, Breite $b = 2$ m, Höhe $h = 1$ m, Radius der Räder $r = 1$ m)
a) wenn die Räder und der Wagenkörper dieselbe Dichte haben.
b) wenn die Dichte der Räder doppelt so groß wie die Dichte des übrigen Körpers ist.



(1.33) Der Arm des abgebildeten Krans ist 6 m lang und hat die Masse $m_{\text{arm}} = 100$ kg. In P ist die Masse $m = 500$ kg aufgehängt. Der Abstand OP beträgt 6 m, der Winkel $\varphi = 60°$. Bestimmen Sie die Kraft F so, dass das gesamte Drehmoment gleich Null ist!



(1.34) Der Balken hat die Masse $m = 80$ kg und ist $l = 10$ m lang. Er bildet mit der Horizontalen den Winkel von $\alpha = 50°$. Der Balken wird durch ein Seil gehalten, das durch die Kraft F gespannt ist.
a) Wie viele Kräfte wirken auf den Balken und in welchen Punkten greifen diese Kräfte an?
b) Bestimmen Sie die Größe der Kraft F, so dass der Balken im Gleichgewicht ist!



Kippen

(1.35) Ein Quader (Höhe $h = 1,5$ m, Breite $b = 0,6$ m, Tiefe $t = 0,6$ m, Masse $m = 5$ kg) steht auf einer horizontalen Ebene und ist einem Winddruck von $p = 110$ N/m^2 ausgesetzt.
Zeigen Sie durch Rechnung, ob der Quader stehen bleibt oder kippt!

(1.36) Ein Schrank mit dem Schwerpunkt in der Mitte soll durch eine seitlich angreifende Kraft verschoben werden. Der Schrank hat die Maße von Höhe $h = 2,1$ m, Breite $b = 1$ m, Tiefe $t = 0,55$ m. Die Haftreibungszahl zwischen der Oberfläche des Fußbodens und des Schranks beträgt $\mu_H = 0,3$ und die Gleitreibungszahl ist $\mu_G = 0,25$. Der Schrank hat eine Gewichtskraft von 1,2 kN.
a) Berechnen Sie die Kraft, die zum Anschieben benötigt wird!
b) Berechnen Sie die Kraft, die aufgewendet werden muss, um den Schrank weiterzuschieben!
c) In welcher Höhe a vom Boden darf die Kraft zum Anschieben maximal wirken, damit der Schrank rutscht und nicht kippt?

2 Bezugssysteme und Scheinkräfte (Trägheitskräfte)

2.1 Allgemeines über Bezugssysteme

Um den Ort und die Bewegung eines Körpers eindeutig beschreiben zu können, braucht man ein (räumliches) Koordinatensystem und die Angabe einer Zeit. Das Koordinatensystem wird meist in Bezug auf einen bestimmten Körper gewählt. Daher spricht man auch vom Bezugssystem.

Einen Bezugskörper und ein damit verbundenes Koordinatensystem bezeichnet man als Bezugssystem.

Die Wahl des Bezugssystems ist immer frei und wird zumeist dem jeweiligen Zweck angepasst. Man kann zwischen unbeschleunigten und beschleunigten Bezugssystemen unterscheiden.

Ruhe und Bewegung

Ob sich ein Körper bewegt oder ob er in Ruhe ist, hängt von der Wahl des Bezugssystems ab. Wir sagen, dass ein Körper in Bewegung, wenn er seine Lage gegenüber einem Bezugssystem verändert. Er ist in Ruhe, wenn er seine Lage gegenüber einem Bezugssystem nicht ändert. Jede Bewegung ist somit relativ und kann nur gegenüber einem Bezugsystem angegeben werden. Man spricht deshalb auch von der Relativität der Bewegung bzw. der Ruhe.

2.2 Unbeschleunigte Bezugssysteme – Inertialsysteme

Ein Bezugssystem, in dem das newtonsche Trägheitsgesetz gilt, nennt man unbeschleunigtes Bezugssystem oder Inertialsystem (abgeleitet vom lateinischen inertia = Trägheit). In einem Inertialsystemen lassen sich die viele physikalische Gesetze, z.B. die Bewegungsgesetze, besonders einfach formulieren.

Inertialsystem Systeme, die entweder ruhen oder sich gleichförmig bewegen, heißen Inertialsysteme. In einem Inertialsystem gilt das Trägheitsgesetz.

Zur Wiederholung das Trägheitsgesetz:
Ein Körper bleibt in Ruhe oder in gleichförmiger, geradliniger Bewegung, solange die Summe der auf ihn wirkenden Kräfte gleich null ist.

Für unbeschleunigte Koordinatensysteme gilt:

Es gibt kein bevorzugtes Inertialsystem. Alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt. Jedes Bezugssystem, das sich zu einem Inertialsystem gleichförmig und geradlinig bewegt, ist ebenfalls wieder ein Inertialsystem.

Es wird sehr oft die Erde als Inertialsystem verwendet. Dies gilt eigentlich nur näherungsweise, da die Erde um ihre Achse rotiert und damit jeder Punkt der Erdoberfläche eine beschleunigte Bewegung ausführt.
Die Beschreibung von Bewegungen in einem Inertialsystem kann einfach in ein anderes Inertialsystem umgerechnet werden.

Beispiel (2.1)

Ein Schiff fährt mit der konstanten Geschwindigkeit $u = 10$ m/s auf einem See. Auf dem Schiff befindet sich eine Person A. Am Ufer befindet sich eine Person B. Geben Sie die Geschwindigkeiten der beiden Personen in beiden Bezugssystem an für folgende Situationen.

a) Die beiden Personen ruhen in ihren jeweiligen Bezugssystemen.
b) Die Person A bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v_1 = 12$ m/s (in bezug auf das Schiff) in die Fahrtrichtung des Schiffes nach vorne, Person B bewegt sich nicht.
c) Die Person A bewegt sich nicht, die Person B bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v_2 = 3$ m/s (in bezug auf das Ufer) in die Fahrtrichtung des Schiffes nach vorne.

Lösung

Wir haben hier zwei Bezugssysteme gegeben: das Land und das Schiff. Die Geschwindigkeit "relativ zum Ufer (Land)" nennen wir v, die Geschwindigkeit "relativ zum Schiff" nennen wir w. Die beiden Bezugssysteme bewegen sich relativ zueinander mit der Geschwindigkeit u.

a)

Bezugssystem	Person A	Person B
Ufer (Land)	$v_A = u = 10$ m/s	$v_B = 0$
Schiff	$w_A = 0$	$w_B = -u = -10$ m/s

b)

Bezugssystem	Person A	Person B
Ufer (Land)	$v_A = u + v_1 = 10 + 12 = 22$ m/s	$v_B = 0$
Schiff	$w_A = v_1 = 12$ m/s	$w_B = -u = -10$ m/s

c)

Bezugssystem	Person A	Person B
Ufer (Land)	$v_A = u = 10$ m/s	$v_B = v_2 = 3$ m/s
Schiff	$w_A = 0$	$w_B = -u + v_2 = -10 + 3 = -7$ m/s

2.3 Beschleunigte Bezugssysteme

Jeder hat mit beschleunigten Bezugssystemen schon Erfahrungen gesammelt: in einem bremsenden Bus muss man sich festhalten, um nicht nach vorn zu fallen. Ein Bezugssystem, das fest mit einem Körper verbunden ist, der sich beschleunigt bewegt, wird als beschleunigtes Bezugssystem bezeichnet. Jeder Körper ist träge und schwer. Die Trägheit eines Körpers wirkt immer so, dass er versucht, seinen Bewegungszustand beizubehalten.
Betrachten wir die Bewegung eines Körpers in einem beschleunigten Bezugssystem, so gilt:

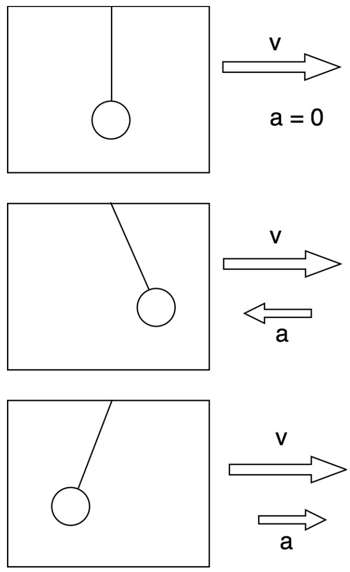
- Eine Scheinkraft beschreibt den Widerstand eines Körpers gegenüber der Änderungen seines Bewegungszustandes.
- Scheinkräfte haben keine Gegenkraft.
- Scheinkräfte verschwinden, wenn man in ein Inertialsystem übergeht.
- Scheinkräfte bedeutet keineswegs, dass keine Wirkungen auftreten (z.B. Trägheitskräfte an Überschallflugzeugen bei raschen Manövern können zu schweren Beschädigungen führen)

Die Bewegung eines Körpers in einem beschleunigten Bezugssystemen kann durch so genannte Scheinkräfte oder Trägheitskräfte beschrieben werden.

Als Scheinkräfte bezeichnet man z.B.:

- die Kräfte, die auf Personen in einem auf gerader Strecke beschleunigenden oder bremsenden Fahrzeuges wirken (lineare Beschleunigungen)
- die Zentrifugalkraft und die Coriolis-Kraft in rotierenden Systemen (Rotation)

2.3.1 Linear beschleunigte Bezugssysteme

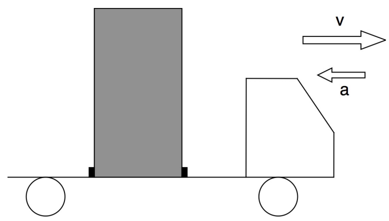


Als Beispiel betrachten wir eine Kugel, die in einer Box senkrecht nach unten hängt. Wenn sich die Box mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, so ist sie ein Intertialsystem und die Kugel hängt auch senkrecht nach unten. (Bild oben)
Wenn die Box langsamer wird, also bremst, dann wirkt eine Beschleunigung a in die Gegenrichtung der Geschwindigkeit v. Ein Beobachter, der die Situation von außen betrachtet, stellt fest, dass sich die Kugel aufgrund der Trägheit weiter nach vorne bewegt, während die Box langsamer wird. Ein Beobachter, der sich in der Box befindet, stellt fest, dass die Kugel aus ihrer senkrechten Position nach vorne ausgelenkt wird. Er führt das auf eine Kraft (Scheinkraft, Trägheitskraft) F_S zurück, die nach vorne wirkt (also gegen die Richtung der äußeren Beschleunigung). (Bild in der Mitte)
Wenn die Box schneller wird, also beschleunigt, dann wirkt die Beschleunigung a in die gleiche Richtung wie die Geschwindigkeit v. Ein Beobachter, der die Situation von außen betrachtet, stellt fest, dass die Kugel aufgrund ihrer Trägheit zurück bleibt und sich nach hinten bewegt, während die Box schneller wird. Ein Beobachter, der sich in der Box befindet, stellt fest, dass die Kugel aus ihrer senkrechten Position nach hinten ausgelenkt wird. Er führt das auf eine Kraft (Scheinkraft, Trägheitskraft) F_S zurück, die nach hinten wirkt (also gegen die Richtung der äußeren Beschleunigung). (Bild unten)

Die Bewegung von Körpern in linear beschleunigten Bezugssystemen kann durch Scheinkräfte (Trägheitskräfte) $F_S = m \cdot a$ beschrieben werden, die der äußeren Beschleunigung a des Systems entgegengerichtet sind.

Beispiel (2.2)

Ein Lastkraftwagen (LKW) fährt mit $v = 15$ m/s. Auf seiner Ladefläche steht ein Schrank mit $h = 2$ m Höhe und $b = 0,8$ m Breite. Die Ladefläche ist so beschaffen, dass der Schrank bei Beschleunigungen nicht gleiten, sondern nur kippen kann. Der Schwerpunkt des Schranks sich befindet genau in seinem Mittelpunkt. Fünfundvierzig Meter vor dem LKW zeigt eine Ampel rotes Licht. Bis dahin muss der LKW durch Bremsen zur Ruhe kommen. Wird der Schrank dabei kippen?



Lösung

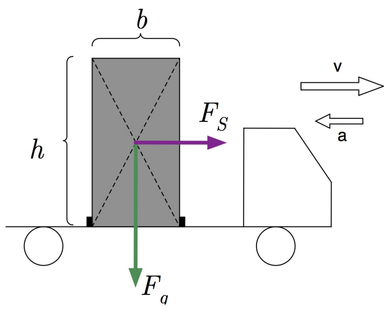
Der LKW muss bremsen, die Beschleunigung, die dabei im System Straße wirkt, bestimmen wir mit Hilfe der Formeln:

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + a \cdot t \\ 0 &= 15 + a \cdot t \\ a \cdot t &= -15 \end{aligned}$$

Dies wird in die Weg-Formel eingesetzt:

$$
\begin{aligned}
s(t) &= s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} \\
45 &= 0 + 15 \cdot t + \frac{-15 \cdot t}{2} = \frac{15 \cdot t}{2} \\
t &= \frac{2 \cdot 45}{15} = 6 \text{ s} \\
a &= -\frac{15}{6} = -2,5 \text{m/s}^2
\end{aligned}
$$

Die Bremszeit ist also $t = 6$ s und die Bremsbeschleunigung ist $a = -2,5$ m/s^2. Das Minus bedeutet, dass die Beschleunigung in die andere Richtung zeigt als die Geschwindigkeit. In diesem Fall bewegt sich der LKW nach vorne und die Beschleunigung zeigt nach hinten.



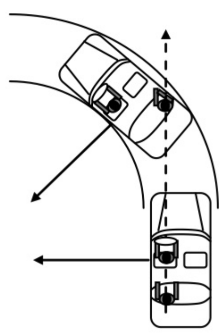
Wir betrachten den Schrank nun im mitbewegten Bezugssystem des LKWs, das sich beschleunigt bewegt. Die Bewegung des Schrankes kann daher durch die Einführung von Scheinkräften beschrieben werden.
Auf den Schrank wirken in diesem System zwei Kräfte: die Schwerkraft F_g und die Scheinkraft (Tägheitskraft) F_S, die beide im Schwerpunkt (=Mittelpunkt) angreifen. Damit ergeben sich auch zwei Drehmomente: $M_{\text{kipp}} = F_S \cdot \frac{h}{2}$ und $M_{\text{stand}} = F_g \cdot \frac{b}{2}$.

Der Körper kippt nicht, wenn

$$
\begin{aligned}
M_{\text{kipp}} &\leq M_{\text{stand}} \\
F_S \cdot \frac{h}{2} &\leq F_g \cdot \frac{b}{2} \\
m \cdot a \cdot \frac{h}{2} &\leq m \cdot g \cdot \frac{b}{2} \\
a &\leq g \cdot \frac{b}{h} = 10 \cdot \frac{0,8}{2} = 4 \text{ m/s}^2
\end{aligned}
$$

In unserem Fall ist die Beschleunigung, die der Körper erfährt mit $a = 2,5$ m/s^2 kleiner als Grenzbeschleunigung von 4 m/s^2 und damit bleibt der Körper stehen und kippt nicht.

2.3.2 Rotierende Bezugssysteme und die Zentrifugalkraft



Die Abbildung zeigt ein Auto, das in eine Linkskurve fährt. Der Fahrer vorne hält sich am Lenkrad fest. Er bewegt sich ebenso wie das Auto auf einer Kreisbahn und bleibt auf seinem Sitz. Hinter dem Fahrer sitzt auf der linken Seite eine Person P auf einer glatten Bank (ohne Reibung). Während das Auto um die Kurve fährt, gleitet P plötzlich nach rechts.
Ein Beobachter, der am Straßenrand ruht und das ganze von außen beobachtet, stellt fest, dass auf das Auto eine Zentripetalkraft (hervorgerufen durch die Reibung mit der Straße) wirkt und es dadurch auf einer Kreisbahn fährt. Der Fahrer ist fest mit dem Auto verbunden, auch er wird von der Zentripetalkraft in die Kreisbahn gezogen. Die Person P auf der Rückbank ist nur lose mit dem Auto verbunden (es wirkt keine Zentripetalkraft) und möchte sich daher aufgrund ihrer Trägheit auf einer geraden Bahn weiter bewegen.
Wenn wir die Bewegung vom Auto aus beobachten (beschleunigtes Bezugssystem), so wird die Person P durch eine Kraft nach außen gezogen. Diese Kraft ist eine Scheinkraft, denn sie existiert nur im beschleunigten Bezugssystem. Man nennt sie Zentrifugalkraft F_{zf}.

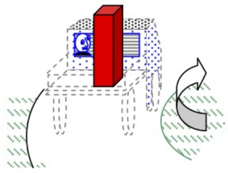
Die Bewegung von Körpern in rotierenden Bezugssystemen kann durch eine Scheinkraft, die Zentrifugalkraft F_{zf} beschrieben werden, die vom Mittelpunt der Kreisbahn weg nach außen zeigt. Die Zentrifugalkraft hat dieselbe Größe wie die Zentripetalkraft

$$F_{\mathrm{zf}} = m \cdot \omega^2 \cdot r = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

wobei m die Masse des Körpers, ω die Winkelgeschwindigkeit, v die Bahngeschwindigkeit und r der Radius der Kreisbahn ist.

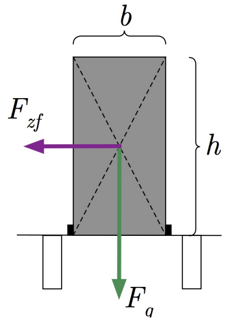
Beispiel (2.3)

Ein Lastkraftwagen fährt in einer Rechtskurve mit dem Radius $r = 100$ m. Auf seiner Ladefläche steht ein quaderförmiger Schrank (Höhe $h = 2$ m, Breite $b = 0,8$ m).
Wie schnell darf das Auto höchstens fahren, damit der Schrank nicht kippt?



Lösung

Wir betrachten die Situation im mitbewegten Bezugssystem des LKWs, das sich beschleunigt (weil rotierend) bewegt. Die Bewegung des Schrankes kann durch die Einführung von Scheinkräften beschrieben werden.
Auf den Schrank wirken zwei Kräfte: die Schwerkraft F_g und die Scheinkraft (Zentrifugalkraft) F_{zf}, die beide im Schwerpunkt (=Mittelpunkt) angreifen.
Damit ergeben sich zwei Drehmomente: $M_{\mathrm{kipp}} = F_{\mathrm{zf}} \cdot \frac{h}{2}$ und $M_{\mathrm{stand}} = F_g \cdot \frac{b}{2}$



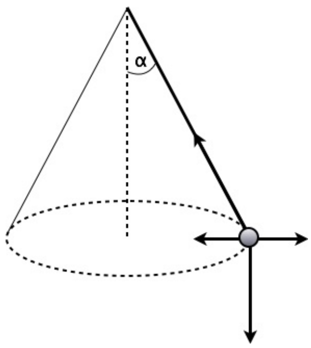
Der Körper kippt nicht, wenn

$$\begin{aligned} M_{\mathrm{kipp}} &\leq M_{\mathrm{stand}} \\ F_{\mathrm{zf}} \cdot \frac{h}{2} &\leq F_g \cdot \frac{b}{2} \\ m \cdot \frac{v^2}{r} \cdot \frac{h}{2} &\leq m \cdot g \cdot \frac{b}{2} \\ v &\leq \sqrt{g \cdot \frac{b}{h} \cdot r} = \sqrt{10 \cdot \frac{0,8}{2} \cdot 100} = 20 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Das Auto darf höchstens mit 20 m/s fahren, damit der Körper stehen bleibt und nicht kippt.

Beispiel (2.4)

Eine Masse m rotiert wie in der Abbildung an einem 1,5 m langen Faden, der mit der vertikalen Achse den Winkel $\alpha = 20°$ einschließt.
a) Beschreiben Sie die eingezeichneten Kräfte! Welche Kräfte beobachtet man, wenn man dieses System von außen betrachtet? Welche Kräfte spürt ein Beobachter auf der rotierenden Masse?
b) Berechnen Sie die Frequenz der Rotation!



Lösung

a) Der Beobachter von außen (Inertialsystem) sagt:
Es wirken zwei Kräfte auf die Masse: Die Kraft des Fadens F_{faden} schräg nach oben und die Schwerkraft F_g senkrecht nach unten. Beide Kräfte zusammen ergeben die Zentripetalkraft F_{zp},

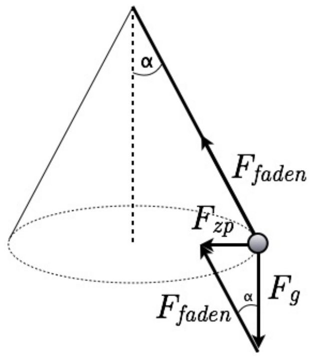
die zum Mittelpunkt der Kreisbewegung zeigt.

$$\vec{F}_{\text{zp}} = \vec{F}_{\text{faden}} + \vec{F}_g$$

Der mitbewegte Beobachter (beschleunigtes Bezugssystem) sagt:
In meinem Bezugsystem wirkt keine resultierende Kraft auf die Masse, denn sie bewegt sich in meinem Bezugssystem nicht. Also wirken 3 Kräfte auf die Masse: Die Kraft des Fadens F_{faden} schräg nach oben, die Gewichtskraft F_g senkrecht nach unten und die Zentrifugalkraft F_{zf}, die nach außen zeigt.

$$0 = \vec{F}_{\text{zf}} + \vec{F}_{\text{faden}} + \vec{F}_g$$

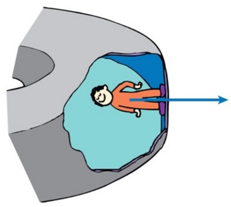
b) Wir arbeiten im System des Beobachters von außen (Inertialsystem). Dann gilt im eingezeichneten Dreieck:



$$\tan\alpha = \frac{F_{\text{zp}}}{F_g} = \frac{m\cdot\omega^2\cdot r}{m\cdot g} = \frac{\omega^2\cdot r}{g}$$
$$\omega = \sqrt{\frac{\tan\alpha\cdot g}{r}} = \sqrt{\frac{\tan 20^\circ\cdot 10}{1,5}} = 1,56 \text{ rad/s}$$
$$f = 2\pi\cdot\omega = 9,8 \text{ Hz}$$

Man sieht, dass der Winkel und damit die Frequenz unabhängig von der Masse m ist.

Beispiel (2.5)



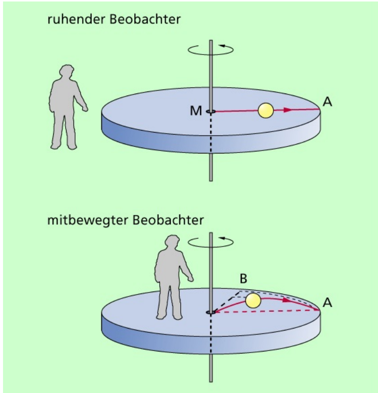
Eine torusförmige Raumstation (Radius $r = 100$ m) rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω um ihre Symmetrieachse. Dadurch wird ihren Bewohnern an der Außenwand künstlich die Schwerkraft der Erde F_g vorgetäuscht. Berechnen Sie, wie groß ω dazu sein muß! Wie lange dauert ein Umlauf?

Lösung

Die Bewohner befinden sich im beschleunigten Bezugssystem der Raumstation und spüren dadurch die Zentrifugalkraft F_{zf} nach außen. Um die Schwerkraft der Erde zu simulieren, muß die Zentrifugalkraft genau gleich groß sein, wie die entsprechende Schwerkraft einer Person auf der Erde. (Bitte beachten Sie, dass die Raumstation weit weg von der Erde ist und hier keine Erdanziehungskraft wirkt. Wir wollen nur erreichen, dass die Zentrifugalkraft von der Größe her so groß ist, wie der Wert der Schwerkraft, der auf der Erde auf diesen Körper wirken würde.)
Wir setzen also an

$$F_{\text{zf}} = F_g$$
$$m\cdot\omega^2\cdot r = m\cdot g$$
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r}} = \sqrt{\frac{10}{100}} = 0,316 \text{ rad/s}$$
$$f = 2\cdot\pi\cdot\omega = 1,987 \text{ Hz}$$
$$T = \frac{1}{f} = 0,5 \text{ s}$$

2.3.3 Rotierende Bezugssysteme und die Corioliskraft



Bewegt sich ein Körper in einem beschleunigten Bezugssystem, so wirkt auf ihn eine zusätzliche Trägheitskraft (Scheinkraft).
Eine Kugel bewegt sich auf einer sich drehenden Scheibe. Die Kugel soll im Mittelpunkt der Scheibe einen einmaligen Impuls erhalten. Für einen ruhenden Beobachter bewegt sich die Kugel auf einer geradlinigen Bahn nach außen.
Für einen mitbewegten Beobachter erscheint die Bewegung ganz anders. Zu Beginn blickt er in Richtung A, da er sich aber mit der Schiebe mitbewegt, so blickt er nach einiger Zeit in Richtung B. Die Bahn der Kugel ist für ihn nicht geradlinig sondern gebogen (parabelförmig). Erklärbar ist das nur, wenn auf die Kugel eine Querkraft wirkt, die man Corioliskraft F_{cor} nennt.
Die Corioliskraft ist immer normal zur Richtung der Geschwindigkeit gerichtet.

Die Corioliskraft F_{cor} wird von Beobachtern gemessen die sich in einem rotierenden System mit der Geschwindigkeit v_0 bewegen. Sie ist immer normal zu v_0 und hat die Größe

$$F_{\text{cor}} = 2 \cdot m \cdot v_0 \cdot \omega$$

Beispiel

Während die Straßenbahn in eine Linkskurve fährt, gehen ein Beobachter in der Bahn nach vorne. Er spürt eine Corioliskraft die ihn auf die rechte Seite drückt. In einer Rechtskurve spüren er beim Nach-vorne-gehen eine Corioliskraft nach links. In diesem Fall wirkt die Corioliskraft in die gleiche Richtung wie die Zentrifugalkraft.

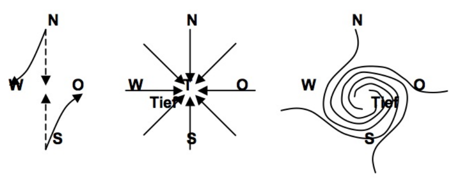
Die reine Wirkung der Corioliskraft hat man, wenn man in der Straßenbahn, die eine Linkskurve fährt, von links nach recht geht (Ablenkung nach hinten) oder von rechts nach links geht (Ablenkung nach vorne).

Beispiel

Blickt man auf der Nordhalbkugel der Erde in Richtung der Bewegung eines Körpers, so erfolgt durch die Corioliskraft eine Ablenkung nach rechts. Das hat z.B. die Konsequenz, dass bei Bewegung von Luft oder Wasser von Süd nach Nord eine Ablenkung in Richtung Osten erfolgt. Das kann man deutlich an Flüssen registrieren, die in dieser Richtung fließen. Für solche Flüsse ist charakteristisch, dass das westliche Ufer häufig flach, das östliche dagegen ein Steilufer ist. Durch die langjährige Ablenkung des Wassers in Richtung Osten werden die Ufer solange abgetragen, bis das durch härtere Gesteinsschichten gebremst wird und sich damit Steilufer bilden.

Beispiel

Die Corioliskräfte machen sie sich auch bei großräumigen Luftströmungen zwischen Tief- und Hochdruckgebieten bemerkbar. Die in ein Tief einströmende Luft wird durch die Corioliskraft seitwärts abgelenkt, so dass sich statt einer radialen Luftströmung in den Mittelpunkt des Tiefs Wirbel um das Tief herum bilden (Wolkenwirbel). Auf der Nordhalbkugel drehen sich die Luftströmungen gegen den Uhrzeigersinn, auf der Südhalbkugel im Uhrzeigersinn.



2.4 Aufgaben

(2.1) Ein LKW erhält eine Beschleunigung von $a = 3$ m/s^2. Auf seiner Ladefläche steht ein Körper in Form eines Quaders mit der Höhe $h = 2$ m, der Breite $b = 80$ cm und der Masse m. Der Körper kann nicht gleiten sondern nur kippen.
a) Beschreiben Sie die Situation für einen Beobachter, der am Straßenrand steht. Welche Kräfte wirken hier?
b) Beschreiben Sie die Situation für einen Beobachter, der sich auf dem Lastwagen befindet? Welche Kräfte wirken hier?
c) Was geschieht, wenn sich der Lastwagen mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt? In welchen Systemen treten Trägheitskräfte auf?
d) Bestimmen Sie die Drehmomente, um zu beurteilen, ob der Körper kippt!

(2.2) Auf der Ladefläche eines Lastwagens steht ein Quader mit der Breite $x = 4$ m und der Höhe $y = 5$ m. Er ist durch zwei Sperren blockiert, so dass er nicht auf der Ladefläche gleiten kann.
a) Der Lastwagen bescheunigt aus dem Stand mit der Beschleunigung $a = 7$ m/s^2. Beurteilen Sie durch eine Rechnung, ob der der Quader kippt!
b) Der Lastwagen fährt mit der Geschwindigkeit $v = 20$ m/s. Er bremst gleichförmig und kommt nach 20 m zum Stillstand. Beurteilen Sie durch eine Rechnung, ob der Quader kippt!

(2.3) Ein Lastkraftwagen fährt mit $v = 96$ km/h in einer Rechtskurve mit Kurvenradius $r = 80$m. Auf seiner Ladefläche steht ein quaderförmiger Schrank (Höhe $h = 1,5$ m, Breite $b = 0,5$ m), der nicht gleiten sondern nur kippen.
a) Beschreiben Sie die Situation für einen Beobachter, der am Straßenrand steht. Welche Kräfte wirken hier?
b) Beschreiben Sie die Situation für einen Beobachter, der sich auf dem Lastwagen befindet? Welche Kräfte wirken hier?
c) Entscheiden Sie durch eine Rechnung, ob der Quader kippt!

(2.4) Ein Kettenkarussell ist nur halb besetzt, ein Teil der Gondeln ist leer. Wenn sich das Karussell dreht, bewegen sich die Gondeln aus der Senkrechten weg nach außen und bilden mit der Senkrechten einen Winkel.
a) Wie verhält sich dieser Winkel für die leeren und die besetzten Gondel?
(Der Winkel ist bei den leeren Gondeln größer. / Der Winkel ist bei den leeren und den besetzten Gondeln etwa gleich groß. / Der Winkel ist bei den besetzten Gondeln größer.)
b) Begründen Sie Ihre Antwort!

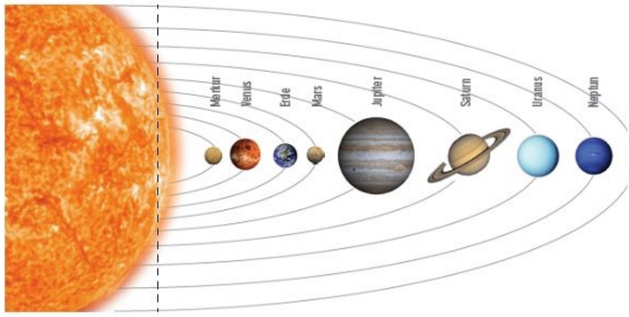
(2.5) In einer Raumstation wird durch Rotation auf künstliche Weise die Schwerkraft der Erde hergestellt. Aufgrund der Zentrifugalkraft werden die Astronauten an die Außenwand der Raumstation gedrückt. Zu hohe Rotationsfrequenzen haben jedoch möglicherweise unerwünschte Nebenwirkungen, z.B. Desorientierung der Astronauten durch die Corioliskraft.
Man ist der Meinung, dass negative Auswirkungen der Corioliskraft nicht auftreten, wenn die Rotationsdauer der Raumstation etwa 2 Minuten beträgt.
a) Brechnen Sie den Durchmesser r der torusförmigen Raumstation, wenn an ihrem Rand die Zentrifugalkraft gleich der Scherkraft auf der Erde sein soll!
b) Berechnen Sie den Unterschied der Zentrifugalkraft zwischen Kopf und Fuß eines $h = 1,8$ m hohen Astronauten in dieser Raumstation!

3 Die Gravitationskraft

3.1 Etwas Astronomie

3.1.1 Aufbau des Sonnensystems

Das Sonnensystem besteht aus der Sonne, die sich im Zentrum befindet, und den 8 Planeten und vielen Kleinplaneten, die sich um sie bewegen. Manche Planeten besitzen Monde, die sich um die Planeten selbst bewegen.
Einige Eigenschaften der Planeten des Sonnensystems sind in der Tabelle zusammengefasst.



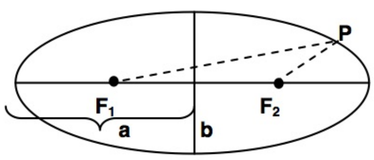
Eigenschaft	Merkur	Venus	Erde	Mars	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptun
Masse (in M_E)	0,05	0,81	1	0,11	317,8	95,2	14,5	17,1
Radius (in r_E)	0,38	0,95	1	0,53	10,7	9,0	3,9	3,8
Entfernung zur Sonne (in R_E)	0,38	0,72	1	1,52	5,2	9,5	19,1	30,0
Umlaufzeit um die Sonne (in T_E)	0,24	0,62	1	1,88	11,9	29,5	84,0	164,8
Monde	0	0	1	2	69	62	27	14
besteht aus	Gestein				Gas			

Masse der Erde: $M_E = 5,96 \cdot 10^{24}$ kg $\approx 6 \cdot 10^{24}$ kg
Radius der Erde: $r_E = 6366$ km
Masse der Sonne: $M_S = 2 \cdot 10^{30}$ kg
Abstand Erde – Sonne: $R_E = 1,5 \cdot 1011$ m (150 Millionen km), dieser Abstand wird auch 1 A.E. (Astronomische Einheit) genannt
Umlaufzeit der Erde um die Sonne: $T_E = 365$ Tage = 1 Jahr

3.1.2 Die Kepler'schen Gesetze

In unserem Sonnensystem beobachtet man, dass die Sonne von anderen Himmelskörpern, den Planeten umkreist werden. Manchmal ist die Bahn dieser Körper annähernd ein Kreis, meistens aber nicht, sondern eine Ellipse.

Für alle Ellipsen gilt:
Der Weg F_1PF_2 ist für alle Ellipsenpunkte gleich lang.
F_1, F_2 sind die beiden Brennpunkte der Ellipse
P ist ein Punkt auf der Ellipse
a ist die große Halbachse der Ellipse
b ist die kleine Halbachse der Ellipse



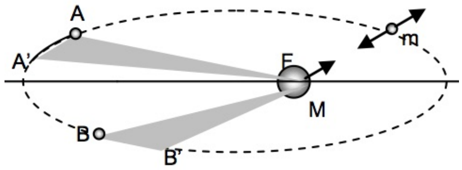
Nach genauen Beobachtungen in früheren Jahrhunderten formulierte Johannes Kepler (1609) folgende

Gesetze für die Bewegungen von Planeten um einen Zentralkörper.

- 1. Kepler-Gesetz
  Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen, in deren einem Brennpunkt F die Sonne steht.

- 2. Kepler-Gesetz
  Die Verbindungslinie zwischen Sonne und Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleich große Flächen. Das bedeutet, dass sich der Planet in der Nähe der Sonne schneller bewegt als weiter weg.

  Benötigt der Planet für die Bahn AA' dieselbe Zeit wie für BB', so sind die Flächen FAA' und FBB' gleich groß.

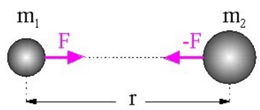
  

- 3. Kepler-Gesetz
  Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten sind proportional zu den dritten Potenzen (Kuben) der großen Bahnhalbachsen.
  $$\frac{T^2}{a^3} = \text{const}$$

Die Kreisbahn ist hier ein Spezialfall, für den gilt $a = b = r$ und die beiden Brennpunkte fallen im Mittelpunkt zusammen.

3.2 Das Gravitationsgesetz

Das Gravitationsgesetz wurde 1687 von Isaac Newton aufgestellt. Es beschreibt die anziehende Kraft zwischen zwei Massen, die sich in einem bestimmten Abstand voneinander befinden.



Das allgemeine Gravitationsgesetz:
Die Kraft zwischen zwei Massen m_1 und m_2, die sich im Abstand r voneinander befinden, ist gegeben durch die Gravitationskraft F_G

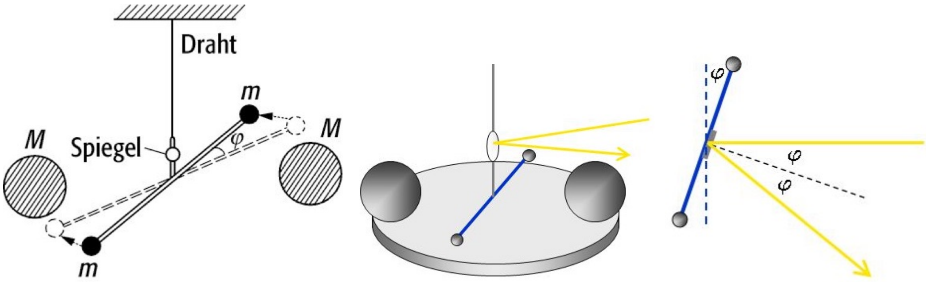
$$F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \tag{3.1}$$

wobei $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^2/kg^2 die allgemeine Gravitationskonstante ist.

Die Gravitationskraft ist eine anziehende Kraft. Wenn auf die Masse m_1 die Kraft F_G wirkt, so wirkt auf die Masse m_2 die gleich große Kraft $-F_G$ in Gegenrichtung (3. Axiom von Newton).
Streng genommen gilt die Formel nur für punktförmige Massen. Für kugelförmige Massen kann die Formal aber auch verwendet werden, wenn r der Abstand der Kugel-Mittelpunkte ist.

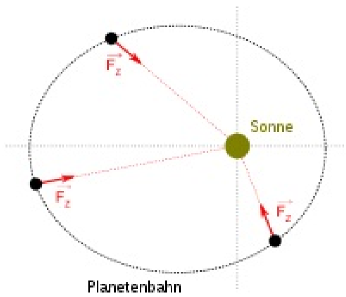
3.2.1 Messung der allgemeinen Gravitationskonstante

Die Gravitationskonante G misst man mit einer sogenannten Drehwaage (nach Cavendish). Dabei werden zwei Massen m mit einem horizontalen Balken verbunden. Dieser Balken ist an einem Faden aufgehängt, der sich verdrehen kann. Bringt man nun in die Nähe dieser Massen m zwei große Massen M, so ziehen sich die Massen gegenseitig an und der Faden verdreht sich um einen Winkel φ. Durch einen Lichtstrahl, der auf einen Spiegel fällt und dort reflektiert wird, kann die Größe des Winkels abgelesen werden. Wenn man die Elastizität des Fadens kennt, so kann man daraus den Wert der Konstante G bestimmen.



3.2.2 Gravitationskraft und Kreisbahn

Die Planetenbahnen entstehen durch die Gravitationskraft zwischen Sonne und Planet. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass die Planetenbahnen Kreisbahnen sind. Der Planet mit Masse m bewegt sich um die Sonne mit Masse M im Abstand r.
Die Gravitationskraft wirkt dann als Zentripetalkraft, die den Körper auf der Kreisbahn (Planetenbahn) hält. Wir können also den Ansatz wählen, dass wir die Zentripetalkraft F_{zp} und die Gravitationskraft F_G gleich setzen:



$$F_{\text{zp}} = F_G$$

Beispiel (3.1)

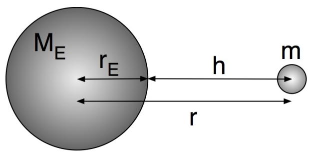
In welchem Abstand zur Erdoberfläche muss ein Satellit die Erde am Äquator umkreisen, damit er über einem Punkt der Erdoberfläche stillzustehen scheint? Welche Bahngeschwindigkeit besitzt er auf dieser Bahn?

Lösung

Diese Satelliten nennt man geostationäre Satelliten. Sie sind sehr wichtig für TV und Navigation (GPS), da sich ihre scheinbare Position am Himmel nicht verändert.

Geostationäre Satelliten brauchen für eine Rotation um die Erde genau so lange, wie die Erde für eine vollständige Rotation um Ihre Achse benötigt, nämlich $T = 24$ h (=Stunden). Wir verwenden $\omega = \frac{2\cdot\pi}{T}$.

Wir nehmen an, der Satellit hat die Masse m und bewegt sich in der Höhe h über der Erdoberfläche. Die Erde hat die Masse $M_E = 6 \cdot 10^{24}$ kg. Damit sich der Satellit auf einer Kreisbahn bewegt, muß gelten



$$\begin{aligned} F_{\text{zp}} &= F_G \\ m \cdot \omega^2 \cdot r &= G \cdot \frac{m \cdot M_E}{r^2} \\ \omega^2 \cdot r &= G \cdot \frac{M_E}{r^2} \end{aligned}$$

wobei der Abstand $r = r_E + h$ ist mit dem Radius der Erde $r_E = 6366$ km. Man sieht, dass die

Bahngleichung von der Masse m des Satelliten unabhängig ist. Wir berechnen den Abstand

$$\begin{aligned}
\omega^2 \cdot r &= G \cdot \frac{M_E}{r^2} \\
r^3 &= G \cdot \frac{M_E}{\omega^2} = \frac{G \cdot M_E \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2} \\
r = r_E + h &= \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_E \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}} \\
h &= \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_E \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2}} - r_E \\
h &= \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot (24 \cdot 60 \cdot 60)^2}{4 \cdot \pi^2}} - 6366 \cdot 10^3 = 3,6 \cdot 10^7 \text{ m}
\end{aligned}$$

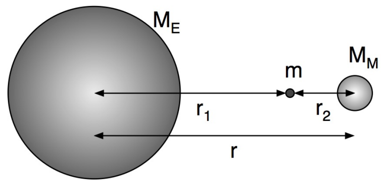
Die geostationären Satelliten umkreisen die Erde also in einer Höhe von ca. 36 000 km.

Die Bahngeschwindigkeit ergibt sich als

$$v = \omega \cdot r = \frac{2\pi}{T} \cdot (r_E + h) = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} \cdot (6366 \cdot 10^3 + 3,6 \cdot 10^7) = 3080 \text{ m/s}$$

Beispiel (3.2)

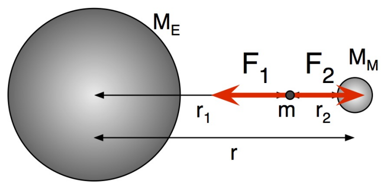
Die Masse der Erde ist M_E, die Masse des Mondes ist $M_M = \frac{1}{81} M_E$. Der Mond umkreist die Erde auf einer Kreisbahn mit dem Radius $r = 384\,400$ km.



Berechnen Sie den Abstand r_1 vom Erdmittelpunkt, in dem sich der Körper der Masse m befinden muß, damit sich die Schwerkraft der Erde und des Mondes aufheben!

Lösung

Auf den Körper m wirken zwei Kräfte: die Gravitationskraft der Erde F_1 und die Graviationskraft des Mones F_2. Es gilt



$$\begin{aligned}
F_1 &= G \cdot \frac{m \cdot M_E}{r_1^2} \\
F_2 &= G \cdot \frac{m \cdot M_M}{r_2^2}
\end{aligned}$$

Im gesuchten Punkt sind diese beiden Kräfte gleich groß

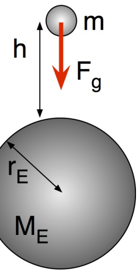
$$\begin{aligned}
F_1 &= F_2 \\
G \cdot \frac{m \cdot M_E}{r_1^2} &= G \cdot \frac{m \cdot M_M}{r_2^2}
\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist unabhängig von der Masse m des Körpers. Wir verwenden jetzt $r = r_+ r_2$ und $M_M = \frac{1}{81} M_E$

$$\begin{aligned}
\frac{M_E}{r_1^2} = \frac{M_M}{r_2^2} &= \frac{\frac{1}{81} M_E}{(r - r_1)^2} \\
\frac{1}{r_1^2} &= \frac{1}{81 \cdot (r - r_1)^2} \\
r_1^2 &= 81 \cdot (r - r_1)^2 \\
r_1 &= 9 \cdot (r - r_1) = 9 \cdot r - 9 \cdot r_1 \\
10 \cdot r_1 &= 9 \cdot r \\
r_1 &= \frac{9}{10} \cdot r = \frac{9}{10} \cdot 384\,400 = 345\,960 \text{ km}
\end{aligned}$$

Der Punkt liegt also sehr nahe beim Mond.

3.2.3 Gravitationskraft und Schwerkraft



Die Gravitationskraft gilt aber nicht nur für Himmelskörper. Sie kann auch für die Fallbewegung von Körpern auf der Erdoberfläche verwendet werden.
Ein Körper der Masse m wird durch die Gravitationskraft von der Erde angezogen. Umgekehrt zieht auch der Körper die Erde mit derselben Kraft an. Der Abstand der beiden Körper ist $r = r_E + h$, wobei $r_E = 6366$ km der Erdradius und h die Höhe des Körpers über der Erdoberfläche ist. Die Schwerkraft F_g des Körpers kann also durch die Gravitationskraft F_G zwischen Körper und Erde dargestellt werden. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} F_g &= F_G \\ m \cdot g &= \frac{G \cdot m \cdot M_E}{r^2} \\ g &= \frac{G \cdot M_E}{r^2} = \frac{G \cdot M_E}{(r_E + h)^2} \end{aligned}$$

wobei $M_E = 5,96 \cdot 10^{24}$ kg die Masse der Erde ist.
Man sieht, dass die Erdbeschleunigung von der Masse m unabhängig ist und dass sie von der Höhe h abhängt. Auf einem hohen Berg ist sie also etwas anders als auf der Erdoberfläche.

Beispiel (3.3)

a) Berechnen Sie den Wert der Erdbeschleunigung g in der Nähe der Erdoberfläche (also für $r \approx r_E$, $h = 0$)! Wie groß ist die Gewichtskraft einer Masse von 50 kg?
b) Berechnen Sie den Wert der Erdbeschleunigung g auf dem Mout Everest ($h = 8848$m)! Wie groß ist die Gewichtskraft einer Masse von 50 kg?
c) Wie kann man die Erdbeschleunigung g bestimmen ohne das Gravitationsgesetz anzuwenden?
d) Der Jupiter ist ungefähr 300 mal so schwer und 12 mal so groß wie der Erde. Wie groß ist die Fallbeschleunigung g_J, die auf seiner Oberfläche wirkt? Wie groß ist die Gewichtskraft einer Masse von 50 kg?

Lösung

a) Wir setzen in die Formel ein

$$g = \frac{G \cdot M_E}{r_E^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,96 \cdot 10^{24}}{(6366 \cdot 10^3)^2} = 9,809 \text{ m/s}^2$$

Die Gewichtskraft ist $F_g = m \cdot g = 50 \cdot 9,809 = 490,45$ N.

b)Wir berücksichtigen die Höhe des Mount Everest und erhalten

$$g = \frac{G \cdot M_E}{(r_E + h)^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{((6366 + 8,848) \cdot 10^3)^2} = 9,782 \text{ m/s}^2$$

Die Gewichtskraft ist jetzt $F_g = m \cdot g = 50 \cdot 9,782 = 489,1$ N also etwas geringer.

c) Die Erdbeschleunigung kann auch durch ein Fadenpendel (mathematisches Pendel) bestimmt werden. Wenn man die Frequenz f oder die Schwingungsdauer T dieses Pendels bestimmt und die Fadenlänge l kennt, so kann man g durch folgende Formel berechnen

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \\ \Longrightarrow \quad g &= 4\pi^2 \cdot f^2 \cdot l \end{aligned}$$

d) Wir verwenden die Formel für die Erdbeschleunigung und ersetzen dabei die Masse durch $M_J = 300 \cdot M_E$ und den Radius durch $r_J = 12 \cdot r_E$

$$g_J = \frac{G \cdot M_J}{r_J^2} = \frac{G \cdot 300 \cdot M_E}{(12 \cdot r_E)^2} = \frac{300}{12^2} \cdot \frac{G \cdot M_E}{r_E^2} = 2,08 \cdot g_E$$

Die Gewichtskraft ist $F_g = m \cdot g_J = 50 \cdot 2,08 \cdot 9,809 = 980,9$ N.

3.3 Aufgaben

(3.1) a) Wie lautet das allgemeine Graviationsgesetz von Newton?
b) Wie erhält man aus diesem Gesetz die Erdbeschleunigung g auf der Erdoberfläche?
c) Wie erhält man die Erdbeschleunigung, ohne das Gravitationsgesetz anzuwenden?

(3.2) Zwei Schiffe ankern im Hafen im Abstand von 400 m. Jedes Schiff hat die Masse von 30 000 Tonnen. Berechnen Sie die Kraft mit der sich die 2 Schiffe anziehen!

(3.3) Ein Satellit der Masse m umkreist die Erde mit einer Umlaufzeit von 10 Stunden auf einer Kreisbahn. Berechnen Sie die Höhe der Umlaufbahn über dem Erdboden!

(3.4) Die Umlaufdauer der Erde um die Sonne beträgt 1 Jahr = 365,25 Tage. Der Abstand der Erde zur Sonne beträgt $R_E = 150 \times 10^6$ km. Wir nehmen an, dass die Erdbahn ein Kreis mit dem Radius R_E ist.
a) Bestimmen Sie die Sonnenmasse M_S!
b) Geben Sie das Verhältnis Sonnenmasse M_S zur Erdmasse M_E an!
c) Wie groß ist die Bahngeschwindigkeit der Erde um die Sonne?

(3.5) Die Erde läuft in der Entfernung von $a_1 = 150 \times 10^6$ km = 1 AE (Astronomische Einheit) um die Sonne und braucht dazu $T_1 = 1$ Jahr.
Berechnen Sie, wie viele Jahre ein Planet für den Umlauf um die Sonne braucht, wenn er in der Entfernung von $a_2 = 2$ AE um die Sonne läuft! (Verwenden Sie das 3. Kepler Gesetz.)

(3.6) Welche Geschwindigkeit muss eine Rakete besitzen, die die Erde in einer Höhe von 2000 km über der Erdoberfläche umkreist?

(3.7) Der Jupitermond Kallisto braucht zu einem Umlauf um den Planeten auf einer kreisförmigen Bahn mit dem Radius $r = 1,88 \cdot 10^6$ km die Zeit von 16 Tagen und 17 Stunden.
Berechnen Sie die Jupitermasse!

(3.8) a) Bestimmen Sie aus dem Bahnradius $R_E = 1,5 \cdot 1011$ m der Erde um die Sonne (näherungsweise wird eine Kreisbahn angenommen) und der Umlaufdauer der Erde um die Sonne die Masse der Sonne M_S!
b) Bestimmen Sie die Fallbeschleunigung auf der Sonne und drücken Sie diese als Vielfaches der Erdbeschleunigung g aus. Der Sonnenradius ist $r_S = 6,96 \cdot 10^8$ m.

(3.9) Der weiße Zwergstern Sirius B hat die Masse unserer Sonne, aber nur den 0,02-fachen Sonnenradius.
a) Berechnen Sie die Fallbeschleunigung auf der Oberfläche von Sirius B!
b) Berechnen Sie die mittlere Dichte von Sirius B!

4 Elastizität

Unter Elastizität versteht man die Eigenschaft eines Körpers, unter Krafteinwirkung seine Form zu verändern. Wenn die Kraft wieder weg ist kehrt der Körper in seine Ursprungsform zurück (zum Beispiel: Sprungfeder).
Die linear-elastische Verformung wird durch das Hookesche Gesetz beschrieben. Es tritt generell bei kleinen Deformationen auf.

4.1 Die Elastizität einer mechanischen Feder

Die Federkonstante

Eine mechanische Feder ist ein technisches Bauteil, das man durch eine Kraft elastisch verformen kann. Meist wird ein Draht aus Metall in Schraubenform gewickelt. Alle Anwendungen der Feder beruhen auf deren Vermögen, potentielle Energie zu speichern.
Wenn man Federn nicht allzu stark ausdehnt, beobachtet man folgenden Zusammenhang.

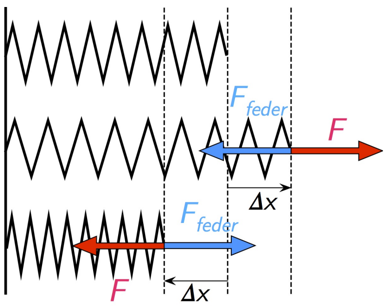
Hook'sches Gesetz:
Die Kraft F, mit der man eine Feder ausdehnt, ist proportional zur Ausdehnung Δx

$$F = D \cdot \Delta x \tag{4.1}$$

Die Proportionalitätskonstante D nennt man Federkonstante. Sie gibt an, wie stark eine Feder ist.

Einheit: $[D] = [\frac{F}{\Delta x}] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ Newton pro Meter

Die Federkonstante ist keine Materialkonstante. Sie hängt von der Art der Feder ab und kann auch für verschiedene Federn aus demselben Material (z.B. Eisen) unterschiedlich sein. Die Federkonstante gibt an, wie stark eine Feder ist.



In der Abbildung sieht man eine Feder in der Ruhelage, darunter in der ausgedehnten Lage und darunter in der zusammengedrückten Lage. Das Hook'sche Gesetz gilt nicht nur für das Ausdehen der Feder sondern auch für das Zusammendrücken der Feder. Beim Zusammendrücken haben die "Ausdehnung" Δx genauso wie die Kraft F ein negatives Vorzeichen.
Die Ausdehnung Δx und die Kraft F, die man für die Änderung braucht, haben also immer gleiches Vorzeichen.
Wenn man den Zustand einer Feder verändert, so gibt es immer eine Gegenkraft mit der die Feder sich wieder in die entspannte Lage (Ruhelage) zurück zu ziehen versucht. Diese Gegenkraft nennt man Federkraft F_{feder}. Die beiden Kräfte sind einander immer entgegen gesetzt. Es gilt

$$F_{\text{feder}} = -F = -D \cdot \Delta x \tag{4.2}$$

Beispiel (4.1)

Um eine gegebene Feder um 2 cm auszudehnen braucht man die Kraft $F = 50$ N.
Welche Kraft braucht man, um die Feder um 3 cm zusammenzudrücken? Wie groß ist die Kraft der Feder in diesem Fall?

Lösung

Wir berechnen zuerst die Federkonstante

$$D = \frac{F}{\Delta x_1} = \frac{50}{0,02} = 2500 \text{ N/m}$$

Die Kraft für das Zusammendrücken ist dann

$$F = D \cdot \Delta x_2 = 2500 \cdot (-0,03) = -75 \text{ N}$$

Das Minus gibt an, dass die Kraft für das Zusammendrücken in die negative Richtung zeigt. Die Kraft der Feder zeigt dann in die positive Richtung

$$F_{\text{feder}} = -F = +75 \text{ N}$$

Die Energie einer Feder

In einer Feder kann Energie gespeichert werden, wenn sie um eine Strecke Δx ausgedehnt oder zusammengedrückt wird. Wir berechnen diese potentielle Energie durch

$$\Delta E_{\text{pot}} = -F_{\text{system}} \cdot \Delta s$$

Dabei ist nur zu beachten, dass die Kraft selbst von der Ausdehnung abhängt und daher nicht konstant ist. Wir müssen daher eine mittlere Kraft $\langle F \rangle = \frac{1}{2} F$ verwenden. Dies gibt

$$\Delta E_{\text{pot}} = -\langle F_{\text{feder}} \rangle \cdot \Delta x = \frac{1}{2} \cdot F_{\text{feder}} \cdot \Delta x = \frac{1}{2} \cdot D \cdot (\Delta x)^2$$

Die Energie ist also unabhängig davon, ob die Feder ausgedehnt oder zusammengedrückt ist.

Energie einer Feder:

$$\Delta E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot (\Delta x)^2 \tag{4.3}$$

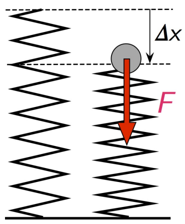
Diese Energie ist in der Feder gespeichert und kann jederzeit in eine andere Energieform umgewandelt werden.

Beispiel (4.2)

Auf eine entspannte vertikale Feder ($D = 50$ N/m, Länge $l = 0,3$ m) wird eine Kugel ($m = 0,25$ kg) gelegt.

a) Berechnen Sie, wie weit die Kugel absinkt, bis sie im Gleichgewicht ist!

b) Berechnen Sie die in der Feder gespeicherte Energie!



Lösung

a) die Kraft, die die Feder zusammendrückt, entspricht der Schwerkraft der Kugel

$$F = m \cdot g = D \cdot \Delta x$$
$$\Delta x = \frac{m \cdot g}{D} = \frac{0,25 \cdot 10}{50} = 0,05 \text{ m}$$

Hier kann auch das Vorzeichen der Kraft weggelassen werden.

b) Energie in der Feder

$$\Delta E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot (\Delta x)^2 = \frac{50 \cdot 0,05^2}{2} = 0,0625 \text{ J}$$

4.2 Die Elastität von Stäben

Der E-Modul eines Stabes

Verantwortlich für die Federkonstante ist die Form, das Material und die Belastungsrichtung. Auch ein einfacher Stab kann als Feder betrachtet werden. Die Berechnung der Federkonstanten D_{stab} erfolgt hier über den Querschnitt, die Länge und der E-Modul (Elastizitäts-Modul). Es gilt für einen Stab:

$$F = D_{\text{stab}} \cdot \Delta l = \frac{\mathcal{E} \cdot A}{l_0} \Delta l = \mathcal{E} \cdot A \cdot \frac{\Delta l}{l_0}$$

wobei $\mathcal{E}$ der E-Modul, A die Querschnittsfläche, l_0 die Länge und Δl die Längenänderung des Stabes ist. Die Größe $\frac{\Delta l}{l_0}$ wird als relative Längenänderung bezeichnet (oft in Prozent angegeben).
Je länger der Stab ist, desto leichter ist es, ihn auszudehnen. Je größer der Querschnitt A, desto schwieriger ist es, den Stab auszudehnen.

Die Kraft F, mit der man einen Stab ausdehnt, ist proportional zur Ausdehnung Δl

$$F = D_{\text{stab}} \cdot \Delta l = \mathcal{E} \cdot A \cdot \frac{\Delta l}{l_0} \tag{4.4}$$

Die Proportionalitätskonstante $\mathcal{E}$ nennt man E-Modul (Elastizitäts-Modul). Sie gibt an, wie stark ein Material ist.

Einheit: $[\mathcal{E}] = [\frac{F}{A \cdot \frac{\Delta l}{l_0}}] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ Newton pro Quadratmeter

Der E-Modul ist eine Materialkonstante. Sie gibt an, wie stark ein Material ist. Je größer $\mathcal{E}$, desto stärker ist der Stoff.
Zum Vergleich: Die Federkonstante D ist eine Konstante für eine bestimmte Feder, nicht für das Material, aus dem die Feder besteht.

Beispiele:

Material	Hartgummi	Blei	Aluminium	Kupfer	Stahl	Diamant
E-Modul (in 10^9 N/m^2)	5	20	70	120	210	800

Beispiel (4.3)

In einem Zugversuch soll der E-Modul $\mathcal{E}$ ermittelt werden. Dafür werden Rundstäbe mit dem Durchmesser $d = 8$ mm und der Anfangslänge $l_0 = 40$ mm verwendet. Bei einer Belastung mit 12 kN kommt es zu einer Stabverlängerung von $\Delta l = 0,046$ mm.
a) Berechnen Sie die relative Längenänderung!
b) Berechnen Sie den E-Modul dieses Materials!

Lösung

a) Die relative Längenänderung ist hier gleich

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{0,046 \cdot 10^{-3}}{40 \cdot 10^{-3}} = \frac{0,046}{40} = 0,00115 = 0,115\%$$

Man sieht, dass es für die relative Längenänderung nicht wichtig ist, ob man in Meter umrechnet oder nicht. Wichtig ist nur, dass man bei beiden Größen dieselbe Einheit hat.
b) Für den E-Modul müssen wir zuerst die Fläche berechnen

$$A = r^2 \cdot \pi = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{d^2}{4} \cdot \pi = \frac{8^2}{4} \cdot \pi = 50,265 \text{ mm}^2 = 50,265 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$$

Der E-Modul ist dann

$$\mathcal{E} = \frac{F}{A \cdot \frac{\Delta l}{l_0}} = \frac{12 \cdot 10^3}{50,265 \cdot 10^{-6} \cdot 0,00115} = 2,07 \cdot 10^{11}\ \mathrm{N/m^2}$$

Bemerkung

Oft wird der Zusammenhang auch folgendermaßen geschrieben:
Spannung σ ist gleich E-Modul $\mathcal{E}$ mal Dehnung ε

$$\sigma = \mathcal{E} \cdot \varepsilon$$

wobei die Spannung $\sigma = \frac{F}{A}$ die Kraft pro Fläche A ist und die Dehnung $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ die relative Längenänderung ist.

Einheiten: $[\sigma] = [\frac{F}{A}] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}}$ Newton pro Quadratmeter
$[\varepsilon] = [\frac{\Delta l}{l_0}] = 1$ keine Einheit

4.3 Aufgaben

Feder

(4.1) a) Welche Kraft muß man anwenden um eine Feder mit der Federkonstante D = 1000 N/m um 4 mm ausgedehnt zu halten?
b) Welche Energie braucht man für die Ausdehnung?

(4.2) Um eine Feder um Δx auszudehnen braucht man die Kraft F.
a) Welche Kraft braucht man, um sie um Δx zusammenzudrücken?
b) Welche Kraft braucht man, um sie um $3\Delta x$ auszudehnen?

(4.3) Um eine Feder um Δx auszudehnen, braucht man die Energie ΔE.
a) Welche Energie braucht man, um sie um Δx zusammenzudrücken?
b) Welche Energie braucht man, um sie um $3\Delta x$ auszudehnen?

(4.4) Eine Masse von $m = 75$ g hängt an einer vertikal angebrachten Feder, die sich unter der Last der Masse von der Länge 14 cm auf die Länge von 17 cm gedehnt hat.
Wie groß ist die Energie, die in der Feder gespeichert ist?

(4.5) Eine unbelastete Feder der Länge $x_0 = 15$ cm wird bei einer Belastung von $F_1 = 0,6$ N auf die Länge $x_1 = 25$ cm gedehnt.
a) Berechnen Sie die Federkonstante D der Feder!
b) Berechnen Sie, mit welcher Kraft F_2 man an der Feder ziehen muss, damit sie dann eineinhalb mal so lang ist wie im unbelasteten Fall!

(4.6) An eine vertikale Feder mit der Federkonstante $D = 10$ N/m wird ein Körper mit der Masse $m = 60$ g angehängt.
a) Berechnen Sie die Dehnung auf der Erde!
b) Berechnen Sie die Dehnung auf dem Mond ($g_{\mathrm{mond}} = 1,6\ \mathrm{m/s^2}$)!

E-Modul

(4.7) Der Elastizitätsmodul für ein bestimmtes Metall beträgt 40 GN/m^2. Wie groß ist die Kraft, die man braucht um einen Draht aus diesem Metall mit dem Querschnitt A = $1mm^2$ um 2% auszudehnen?

(4.8) Ein Draht hat die Länge von 2 m und den Querschnitt von 2 mm^2. Durch die Kraft $F = 100$ wird der Draht um 5 mm ausgedehnt.
a) Bestimmen Sie den E-Modul!
b) Welche Kraft braucht man, um 4 m Draht aus dem selben Material mit dem Querschnitt 3 mm^2 um 10 mm auszudehnen?

(4.9) Ein Stahlstab der Länge $l_0 = 80$ cm ($A = 2,5 \cdot 10^{-2}$ mm^2) wird der Kraft $F = 10$ N ausgesetzt. Der E-Modul von Stahl ist $\mathcal{E}_{\text{stahl}} = 2 \cdot 10^{11}$ N/m^2 .
Berechnen Sie die relative Längenänderung des Stabes! Wie weit wird er dabei ausgedehnt?

(4.10) Ein 750 mm langer Rundstab aus einem Material mit dem E-Modul von $\mathcal{E} = 210000$ N/mm^2 hat einen Durchmesser von $d = 8$ mm. Er wird mit der Kraft von $F = 10$ kN belastet.
a) Berechnen Sie den Querschnitt A des Stabs!
b) Berechnen Sie die absolute Verlängerung Δl und die relative Längenänderung!

5 Die harmonische Schwingung

Als Schwingungen oder Oszillationen bezeichnet man periodische zeitliche Schwankungen einer Größe um einen Mittelwert (Gleichgewichtslage, Ruhelage). Schwingungen treten in vielen Systemen auf (nicht nur in der Physik). Wir beschäftigen uns hier nur mit harmonischen Schwingungen, die durch eine Sinusfunktion beschrieben werden können.
Eine Schwingung heißt harmonische Schwingung, wenn sie eine der folgenden Bedingungen erfüllt.

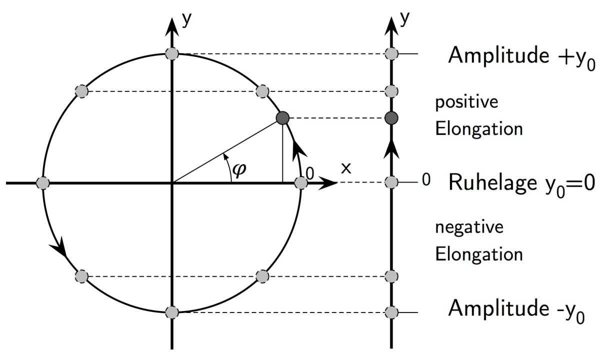
- Die Schwingung ergibt sich als Projektion der Kreisbewegung.
- Das Weg-Zeit-Diagramm ist eine Sinusfunktion.
- Die rücktreibende Kraft ist proportional zur Auslenkung.

Erfüllt die Schwingung eine dieser Bedingungen, so erfüllt sie stets auch alle anderen Bedingungen.

5.1 Die Beschreibung der harmonischen Schwingung

Von der Kreisbewegung zur harmonischen Schwingung

In der Abbildung bewegt sich ein Punkt mit Masse m mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω auf einer Kreisbahn mit Radius r (Rotation). Die Kreisbewegung wird nun von der Seite beleuchtet und dadurch auf eine Projektionsfläche projeziert (abgebildet). Auf der Projektionsfläche bewegt sich der Schatten der Masse in einer periodischen Pendelbewegung hin und her. Dadurch wird die zweidimensionale Kreisbewegung (in x- und y-Richtung) auf eine eindimensionale Bewegung (nur in y-Richtung) reduziert. Diese eindimensionale Bewegung nennt man harmonische Schwingung.



Eine harmonische Schwingung ist die Projektion einer Kreisbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω auf die y-Achse.

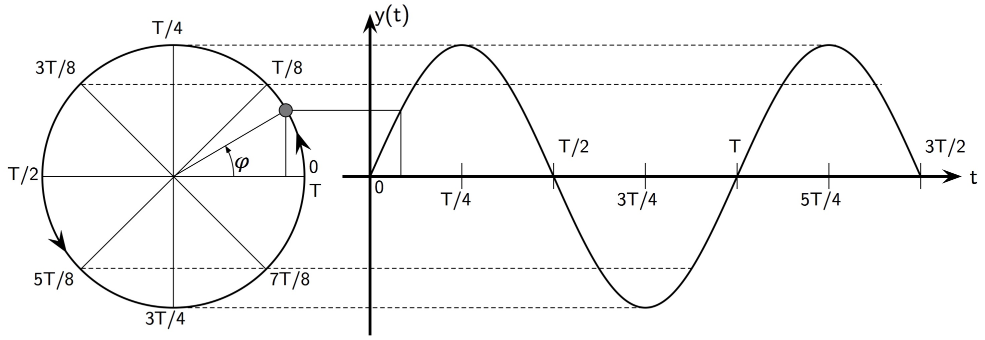
Die harmonische Schwingung ist nicht gleichförmig. In der Mitte ist sie am schnellsten, ganz außen ist die Geschwindigkeit für einen kurzen Moment gleich Null und die Bewegung kehrt ihre Richtung um.

Wichtige Begriffe

- Die Entfernung des bewegten Körpers von der Ruhelage zur Zeit t heißt Elongation (oder Auslenkung) $y(t)$.
- Der Mittelpunkt der Bewegung heißt Ruhelage. In der Ruhelage ist die Elongation gleich Null $y(0) = 0$.
- Die größte Entfernung von der Ruhelage heißt Amplitude $y_{\max} = y_0 = r$.
- Die Umlaufzeit T nennt man jetzt Schwingungsdauer (Periode) T: $y(0) = y(T)$.
- Die Winkelgeschwindigkeit ω nennt man jetzt Kreisfrequenz ω. Es gilt: $\omega = \frac{2\pi}{T}$.
- Der Winkel der Kreisbewegung ist: $\varphi = \omega \cdot t$.

Das Weg-Zeit-Diagramm der Schwingung

Wir zeichnen die harmonische Schwingung im Zeitverlauf auf um das Weg-Zeit-Diagramm der Schwingung zu bekommen. Die rotierende Masse beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ die Rotation. Sie bewegt sich gegen den Uhrzeigersinn mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Nach der Zeit T hat sie eine volle Umdrehung vollendet und auch die harmonische Schwingung hat einen vollen Ablauf hinter sich.
Zum Zeitpunkt t hat die Masse einen Winkel von $\varphi = \omega \cdot t$ zurückgelegt. Bei der Kreisbewegung ist der Abstand vom Mittelpunkt immer gleich r. Bei der Projektion ändert sich der Abstand von der Ruhelage zwischen 0 (Ruhelage) und $y_0 = r$ (maximale Elongatio). Es ergibt sich das folgende zeitaufgelöste Bild. Die dargestellte Funktion ist eine Sinus-Funktion.



Die Größe der Elongation kann im eingezeichneten Dreieck berechnet werden durch den Zusammenhang $\sin\varphi = \sin(\omega \cdot t) = \frac{y(t)}{y_0}$. Daraus ergibt sich die Beschreibung der harmonischen Schwingung.

Die harmonische Schwingung wird durch die Sinus-Funktion beschrieben.

$$y(t) = y_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) = y_0 \cdot \sin(\frac{2\pi \cdot t}{T}) \tag{5.1}$$

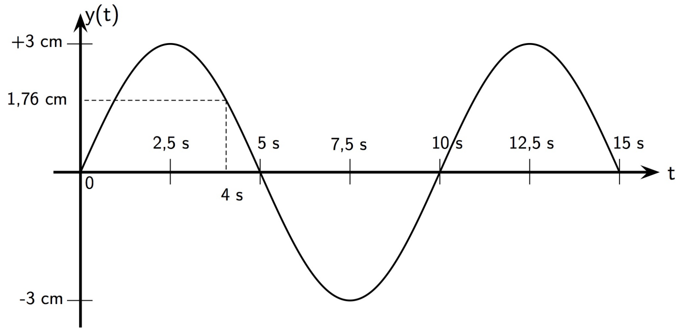
Beachten Sie, dass bei der Berechnung der Amplitude der Taschenrechner auf die Winkeleinstellung RAD eingestellt werden muß!!!

Beispiel (5.1)

Eine Masse schwingt harmonisch und führt in einer Minute 6 Schwingungen mit einer Amplitude von 3 cm aus.
a) Berechnen Sie die Frequenz und die Periodendauer!
b) Zeichnen Sie das Weg-Zeit-Diagramm dieser Schwingung!
c) Wie groß ist die Auslenkung nach 4 s?

Lösung

a) Die Frequenz ergibt sich aus $f = \frac{6}{\text{min}} = \frac{6}{60\text{s}} = 0,1$ Hz
Die Periode ist $T = \frac{1}{f} = 10$ s
b)



c) Für die Berechnung der Auslenkung ist die Kreisfrequenz wichtig

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 0,1 = 0,628 \text{ rad/s}$$

wir setzen damit in die Sinus-Funktion ein (Achtung RAD am Taschenrechner)

$$y(t) = y_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) = 0,03 \cdot \sin(0,628 \cdot 4) = 0,0176 \text{ m} = 1,76 \text{ cm}$$

Der entsprechende Wert ist in der Abbildung eingezeichnet.

Die rücktreibende Kraft

Die Kreisbewegung ist eine beschleunigte Bewegung und daher ist auch die harmonische Schwingung eine beschleunigte Bewegung. Es muss also eine Kraft wirken, die diese Beschleunigung bewirkt.
Es gilt

- Wenn sich der schwingende Körper von der Ruhelage entfernt, wird er langsamer, daher muss die Kraft zurück zur Ruhelage zeigen.
- Wenn sich der schwingende Körper der Ruhelage nähert, wird er schneller, daher muss die Kraft in Richtung der Ruhelage zeigen.

Die Kraft auf einen harmonisch schwingenden Körper zeigt immer in Richtung der Ruhelage und heißt rücktreibende Kraft oder Rückstellkraft $F_{\text{rück}}$. Die rücktreibende Kraft ist immer proportional zur momentanten Elongation (Auslenkung) $y(t)$

$$F_{\text{rück}}(t) = \text{const} \cdot y(t) = m \cdot \omega^2 \cdot y(t) \tag{5.2}$$

wobei m die Masse und ω die Kreisfrequenz des schwingenden Körpers sind.

Da die harmonische Bewegung die y-Komponente der Kreisbewegung ist, so ist auch die rücktreibende Kraft die y-Komponente der Zentripetalkraft F_{zp}. Aus Proportionalitätsgründen gilt dann:

$$\frac{y(t)}{r} = \frac{F_{\text{rück}}}{F_{\text{zp}}}$$
$$F_{\text{rück}} = \frac{y(t)}{r} \cdot F_{\text{zp}} = \frac{y(t)}{r} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot r = y(t) \cdot m \cdot \omega^2$$

5.2 Die Energieumwandlung bei der harmonischen Schwingung

Für die potentielle Energie bei der harmonischen Schwingung gilt

$$\Delta E_{\text{pot}} = -F_{\text{system}} \cdot \Delta s \;\propto\; F_{\text{rück}}(t) \cdot y(t)$$

und für die kinetische Energie gilt

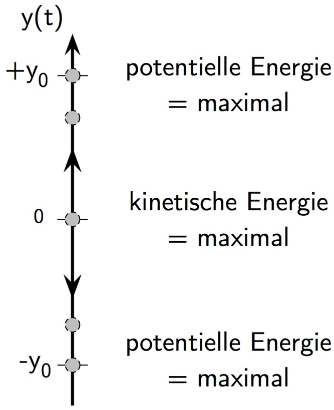
$$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

Es gilt der Energieerhaltungssatz:

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \text{const}$$
$$\Delta E_{\text{ges}} = \Delta E_{\text{pot}} + \Delta E_{\text{kin}} = 0$$

Die harmonische Schwingung hat folgende besondere Zustände:

- die Ruhelage:
  Auslenkung ist gleich Null $y(t) = 0$
  potentielle Energie gleich Null $E_{\text{pot}} = 0$
  Geschwindigkeit ist maximal
  kinetische Energie maximal $E_{\text{kin}} = \max$
- die Amplitude:
  Auslenkung ist maximal $y(t) = y_0$
  potentielle Energie ist maximal $E_{\text{pot}} = \max$
  Geschwindigkeit ist gleich Null $v = 0$
  kinetische Energie ist gleich Null $E_{\text{kin}} = 0$



Es wird also hier kinetische Energie in potentielle Energie umgewandelt und umgekehrt.
Die Gesamtenergie kann in der Ruhelage berechnet werden, wenn die potentielle Energie Null ist

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{kin}} = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot y_0^2 = \frac{1}{2} m \cdot f^2 \cdot 4\,\pi^2 \cdot y_0^2 = 2\,\pi^2 \cdot m \cdot f^2 \cdot y_0^2$$

wobei wir $v = \omega \cdot r = \omega \cdot y_0$ und $\omega = 2\pi \cdot f$ verwendet haben.

Bei der harmonischen Schwingung verwandelt sich kinetische Energie in potentielle Energie und umgekehrt. Die Gesamtenergie der Schwingung ist gegeben durch

$$E_{\text{ges}} = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot y_0^2 = 2\,\pi^2 \cdot m \cdot f^2 \cdot y_0^2 \tag{5.3}$$

wobei m die Masse des schwingenden Körpers, y_0 die maximale Auslenkung (Amplitude), ω die Kreisfrequenz und f die Frequenz der Schwingung ist.

Beispiel (5.2)

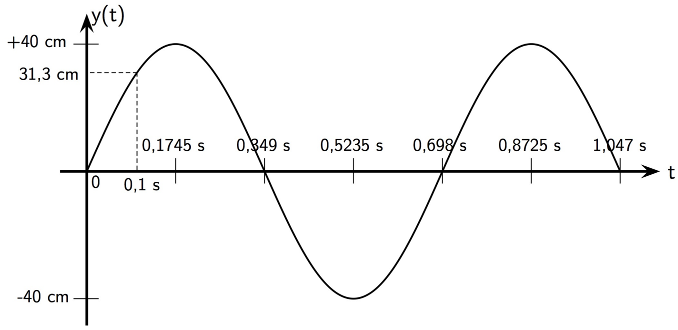
Die Masse $m = 0,05$ kg schwingt in vertikaler Richtung so, dass die rücktreibende Kraft zu jeder Zeit 4,05 mal so groß ist wie die Elongation. Die Amplitude beträgt 40 cm.
a) Berechnen Sie die Kreisfrequenz dieser Schwingung! Zeichnen Sie ein Weg-Zeit-Diagramm dieser Schwingung!
b) Wie weit ist die schwingende Masse zum Zeitpunkt $t = 0,1$ s über oder unter der Ruhelage?
c) Wie groß ist die Gesamtenergie dieser Schwingung?
d) Wie schnell ist die Masse beim Durchgang durch die Ruhelage?

Lösung

a) Wir verwenden den Zusammenhang zwischen rücktreibender Kraft und Auslenkung aus der Angabe $F_{\text{rück}}(t) = 4,05 \cdot y(t)$ und setzen ein

$$\begin{aligned} F_{\text{rück}}(t) &= m \cdot \omega^2 \cdot y(t) \\ \omega^2 &= \frac{F_{\text{rück}}(t)}{m \cdot y(t)} = \frac{4,05 \cdot y(t)}{m \cdot y(t)} = \frac{4,05}{0,05} = 81 \\ \omega &= \sqrt{81} = 9 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

Die Frequenz ist $f = 1,432$ Hz, die Periode ist $T = 0,698$ s.
Das Weg-Zeit-Diagramm:



b) Wir berechnen die Elongation zum Zeitpunkt $t = 0,1$ s (Taschenrechner auf RAD)

$$y(t) = y_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) = 0,4 \cdot \sin(9 \cdot 0,1) = 0,313 \text{ m} = 31,3 \text{ cm}$$

Die Elongation ist positiv, also befindet sich der Punkt über der Ruhelage (im Weg-Zeit-Diagramm eingetragen).
c) Die Gesamtenergie ist

$$E_{\text{ges}} = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot y_0^2 = \frac{1}{2} 0,05 \cdot 9^2 \cdot 0,4^2 = 0,324 \text{ J}$$

d) Die Geschindigkeit beim Durchgang durch die Ruhelage ergibt sich entweder dadurch, dass man die Gesamtenergie gleich der kinetischen Energie setzt und daraus die Geschwindigkeit berechnet

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{kin}} = \frac{m \cdot v^2}{2}$$
$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{\text{ges}}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,324}{0,05}} = 3,6 \text{ m/s}$$

oder indem man den Zusammenhang zwischen Winkelgeschwindigkeit und Bahngeschwindigkeit verwendet (gilt nur in der Ruhelage)

$$v_{\max} = \omega \cdot y_0 = 9 \cdot 0,4 = 3,6 \text{ m/s}$$

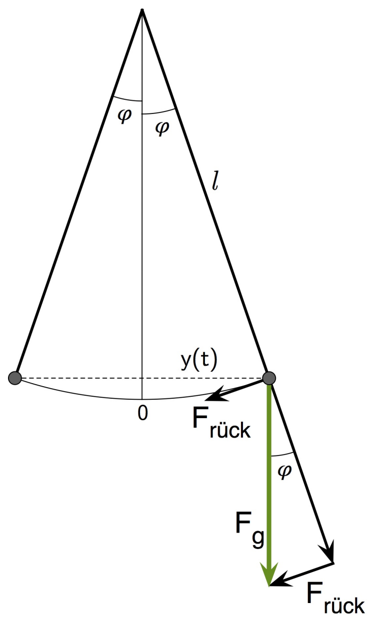
5.3 Die Pendelschwingung

Ein Fadenpendel besteht aus einer Masse m, die an einem Faden der Länge l aufgehängt ist. Das Pendel wird um einen Winkel φ ausgelenkt und schwingt dann hin und her.

Das mathematische Pendel

Ein mathematisches Pendel ist ein idealisiertes Fadenpendel. Dafür müssen folgende Punkte erfüllt sein:

- die Masse m ist punktförmig oder zumindest sehr konzentriert und schwer
- der Faden ist masselos und lang
- die Aufhängung des Pendels ist reibungsfrei und es gibt keinen Luftwiderstand
- die Auslenkung des Pendels ist nur klein (Winkel von 5° bis 10°)



Für die Pendelschwingung nehmen wir an, dass die rücktreibende Kraft der Teil der Gewichtskraft ist, der tangential an den Kreisbogen ist. Für kleine Winkel ist die Länge des Kreisbogens gleich der waagrechten Entfernung von der Ruhelage, was wir mit $y(t)$ benennen. Dann kann man folgende Beziehungen herstellen

$$\sin\varphi = \frac{F_{\text{rück}}}{F_g} \qquad \text{und} \qquad \sin\varphi = \frac{y(t)}{l}$$

$$\frac{F_{\text{rück}}}{F_g} = \frac{y(t)}{l}$$

$$F_{\text{rück}} = \frac{m \cdot g}{l} \cdot y(t)$$

Daraus kann man erkennen, dass es eine harmonische Schwingung ist, weil die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung ist. Wir können aus dieser Formel sogar die Kreisfrequenz ω, die Frequenz f und die Periode T berechnen

$$F_{\text{rück}} = \frac{m \cdot g}{l} \cdot y(t) = m \cdot \omega^2 \cdot y(t)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad \text{und} \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \qquad \text{und} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Die Pendelschwingung ist eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{5.4}$$

Aus dieser Formel konnte Newton zum ersten Mal die Erdbeschleunigung g bestimmen.

Beispiel (5.3)

Ein Fadenpendel der Länge 1 m vollführt 100 Schwingungen in 204 s.
a) Berechnen Sie die Erdbeschleunigung an diesem Ort!
b) Wie groß ist hier die Gewichtskraft einer Masse von $m = 20$ kg?

Lösung

a) Zuerst berechnen wir die Frequenz dieser Schwingung

$$f = \frac{100}{204} = 0,49 \text{ Hz}$$

Wir verwenden nun die Formel für die Frequenz und formen sie nach der Erdbeschleunigung um

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$g = 4\pi^2 \cdot f^2 \cdot l$$

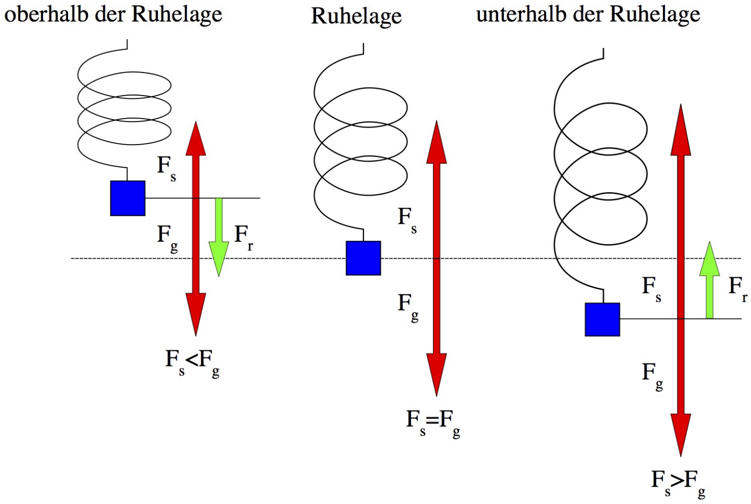
$$g = 4\pi^2 \cdot 0,49^2 \cdot 1 = 9,48 \text{ m/s}^2$$

b) Damit können wir die Gewichtskraft berechnen

$$F_g = m \cdot g = 20 \cdot 9,48 = 189,6 \text{ N}$$

5.4 Die Federschwingung

Ein Federpendel besteht aus einer mechanischen Feder mit der Federkonstante D, die vertikal aufgehängt wird. An der Feder wird eine Masse m befestigt, die die Feder ausgedehnt, bis die Gewichtskraft und die Federkraft im Gleichgewicht sind. Diese Position nennt man Ruhelage. Wenn man die Masse jetzt aus der Ruhelage auslenkt, so beginnt die Feder um die Ruhelage zu schwingen.



Die rücktreibende Kraft $F_{\text{rück}}$ ist in diesem Fall immer die Differenz zwischen Federkraft F_{feder} und Gewichtskraft F_g. Sie zeigt immer zur Ruhelage zurück. Die Auslenkung wird mit $y(t)$ bezeichnet. Man kann ansetzen

$$F_{\text{rück}} \propto F_{\text{feder}} = D \cdot y(t)$$

Daraus erkennt man, dass es sich um eine harmonische Schwingung handelt. Wir können aus dieser Formel die Kreisfrequenz ω, die Frequenz f und die Periode T berechnen

$$F_{\text{rück}} = D \cdot y(t) = m \cdot \omega^2 \cdot y(t)$$
$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \text{und} \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}} \quad \text{und} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

Die Frequenz ist unabhängig von der Auslenkung. Allerdings sollte man darauf achten, dass die Auslenkungen nicht zu groß werden, sodass man noch im elastischen Bereich der Feder ist (Hook'sches Gesetz).

Die Federschwingung ist eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \tag{5.5}$$

Beispiel (5.4)

Um eine bestimmte Feder um 3 cm auszudehnen, braucht man die Kraft $F = 900$ N. Wir lassen nun die Masse $m = 3$ kg mit der Amplitude $r = 4$ cm an dieser Feder schwingen.
a) Bestimmen Sie die Frequenz und die Gesamtenergie dieser Schwingung!
b) Wie groß ist die Geschwindigkeit der Masse in der Ruhelage?

Lösung

a) Wir brauchen zuerst die Federkonstante der Feder

$$F = D \cdot \Delta x$$
$$D = \frac{F}{\Delta x} = \frac{900}{0,03} = 30\,000 \text{ N/m}$$

damit können wir die Kreisfrequenz und die Frequenz berechnen

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{30000}{3}} = 100 \text{ rad/s}$$
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}} = 15,91 \text{ Hz}$$

Die Gesamtenergie der Schwingung ist

$$E_{\text{ges}} = \frac{1}{2}m \cdot \omega^2 \cdot y_0^2 = \frac{1}{2}3 \cdot 100^2 \cdot 0,04^2 = 24 \text{ J}$$

b) Die Geschindigkeit beim Durchgang durch die Ruhelage ist

$$v_{\text{max}} = \omega \cdot y_0 = 100 \cdot 0,04 = 4 \text{ m/s}$$

5.5 Aufgaben

Harmonische Schwingung

(5.1) a) Was versteht man unter einer harmonischen Schwingung?
b) Auf welchen Punkt ist die rücktreibende Kraft immer gerichtet?

(5.2) Die Masse $m = 0,4$ kg schwingt harmonisch mit der Amplitude $y_0 = 2$ m. Die Rückstellkraft ist zu jedem Zeitpunkt 3,6 mal so groß wie die Elongation.
a) Bestimmen Sie die Frequenz!
b) Wie groß ist die Elongation nach 0,6 s?
c) Wie groß ist die Elongation nach 1,2s?

(5.3) Die Masse $m = 4$ kg schwingt harmonisch mit der Amplitude $y_0 = 2$ m und mit der Frequenz $f = 5$ Hz.
a) Wie groß ist die Elongation zum Zeitpunkt $t = 0,05$ s?
b) Wie groß ist die Elongation zum Zeitpunkt $t = 0,1$ s?
c) Wie groß ist die Elongation zum Zeitpunkt $t = 0,17$ s?

(5.4) Eine Masse $m = 2$ kg schwingt folgendermaßen:

Elongation [in cm]	12	3,6	-2,4	15,6
Rücktreibende Kraft [in N]	-7	-2,1	1,4	F

a) Zeigen Sie, daß die Schwingung harmonisch ist!
b) Berechnen Sie die fehlende rücktreibende Kraft F und die Frequenz der Schwingung! Wovon ist die Frequenz unabhängig?

(5.5) Die Tabelle zeigt Elongation und rücktreibende Kraft einer Schwingung der Masse $m = 2$ kg.

Elongation (in m)	2	-3	0	1
rücktreibende Kraft (in N)	-32	48	?	?

a) Zeigen Sie, daß die Schwingung harmonisch ist!
b) Berechnen Sie die fehlenden rücktreibenden Kräfte und die Frequenz der Schwingung! Wovon ist die Frequenz unabhängig?

(5.6) Die Tabelle zeigt Elongation und rücktreibende Kraft einer Schwingung der Masse $m = 2$ kg.

Elongation (in m)	2	-3	4	-1
rücktreibende Kraft (in N)	-36	48	72	18

Warum ist die Schwingung nicht harmonisch?

(5.7) a) Wozu ist die rücktreibende Kraft proportional? Gilt diese Proportionalität zu jeder Zeit der Schwingung oder nur zu bestimmten Zeiten?
b) Wozu ist die Energie einer Schwingung proportional?

(5.8) a) Wie viel mal größer wird die Energie einer Schwingung wenn man die Amplitude verdoppelt?
b) Wie viel mal größer wird die Energie einer Schwingung wenn man die Frequenz verdreifacht?
c) Wie viel mal größer wird die Energie einer Schwingung wenn man die Amplitude verdoppelt und die Frequenz vervierfacht?
d) In welchem Punkt der Schwingung ist die kinetische Energie am größten?

Pendelschwingung

(5.9) a) Wieviel Schwingungen macht ein 5 m langes mathematisches Pendel pro Stunde?
b) Wie lang muß es sein, damit es doppelt so schnell schwingt?

(5.10) Ein Mensch ($m = 100$ kg) befindet sich auf einem fremden Planeten. Er möchte dort die Schwerkraft messen, die von der Erde verschieden ist. Ein mathematisches Pendel mit 2 m Länge schwingt auf diesem Planeten 24 mal pro Minute.
a) Berechnen Sie die Fallbeschleunigung auf diesem Planeten!
b) Wie groß ist die Gewichtskraft dieses Menschen auf dem Planeten?

(5.11) Ist die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels auf dem Mond größer oder kleiner als auf der Erde?

(5.12) Ein Fadenpendel macht in einer Minute $n_1 = 30$ Schwingungen.
Wie muss man das Pendel verändern, wenn es in der gleichen Zeit $n_2 = 90$ Schwingungen ausführen soll?
a) Das Pendelgewicht verdreifachen.
b) Die Pendellänge auf ein drittel kürzen.
c) Die Pendellänge auf ein neuntel kürzen.
d) Pendelauslenkung bei Beginn auf 90° erhöhen.

Federschwingung

(5.13) Um eine Feder ($m = 0,2$ kg) um 2 cm auszudehnen, braucht man die Kraft $F = 10$ N.
a) Mit welcher Frequenz schwingt die Feder, wenn man sie los lässt?
b) Wie groß ist die Energie dieser Schwingung?
c) Wie groß ist die Geschwindigkeit in der Ruhelage?

(5.14) Wenn man eine Feder ($m = 0,1$ kg) um 4 cm ausdehnt, schwingt sie mit der Frequenz $f = 10$ Hz.

a) Berechnen Sie die Federkonstante!
b) Berechnen Sie die Energie der Schwingung!

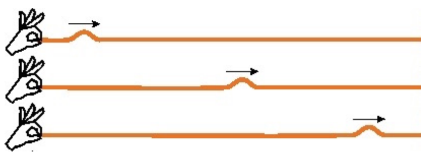
(5.15) Um eine bestimmte Feder um 2 cm auszudehnen, braucht man die Kraft $F = 800$ N. Wir lassen nun die Masse $m = 20$ kg mit der Amplitude $r = 3$ cm an dieser Feder schwingen.
a) Bestimmen Sie die Frequenz und Energie dieser Schwingung!
b) Wie groß ist die Geschwindigkeit der Masse in der Ruhelage?

(5.16) a) Schwingen starke Federn schneller als schwache Federn?
b) An einer Feder schwingt die Masse m mit der Frequenz f. Wie ändert sich die Frequenz, wenn wir die doppelte Masse anhängen?
c) Wir dehnen eine Feder von der Gleichgewichtslage um y_0 aus und lassen sie los, so dass sie mit der Frequenz f schwingt. Mit welcher Frequenz schwingt sie, wenn wir sie doppelt so weit ausdehnen?

6 Wellen

6.1 Die Beschreibung von Wellen

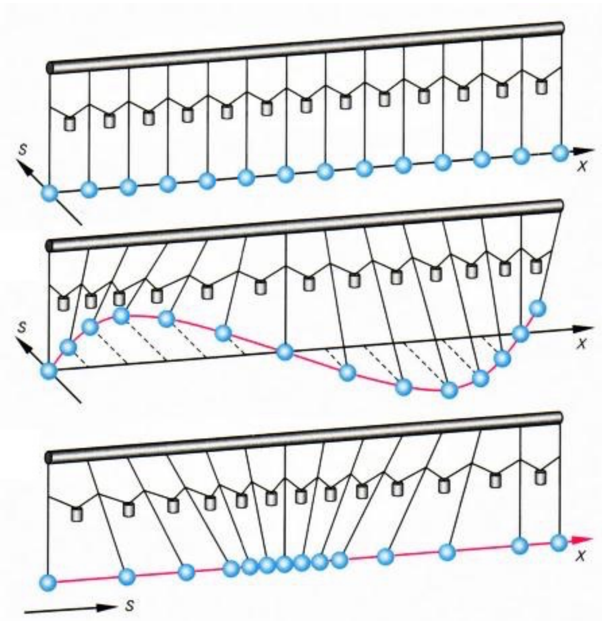
Die Welle als Störung im Medium



Wir betrachten jetzt nicht nur ein System, das schwingen kann, sondern eine Ansammlung von vielen solchen Systemen hintereinander oder nebeneinander. Das nennen wir dann ein Medium. Wenn die einzelnen schwingungsfähigen Systeme des Mediums nicht isoliert voneinander sind, sondern es eine Art der Wechselwirkung und des Austausches dazwischen gibt, so kann eine Schwingung (oder Störung) von einem System auf das nächste übertragen werden. Diese Übertragung von Schwingungen bezeichnet man als Welle.

Eine Welle ist die die räumliche Ausbreitung einer Störung oder Schwingung in einem Medium. Jede Welle hat eine räumliche Komponente und eine zeitliche Komponente.

Ist die Störung, die sich ausbreitet, eine harmonische Schwingung, so bezeichnet man auch die Welle als harmonische Welle. Nach ein einiger Zeit beginnt das ganze Medium harmonisch zu schwingen.



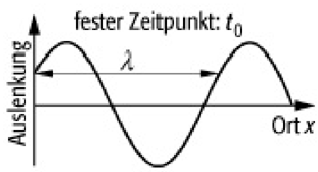
Im Bild sieht man eine Reihe von Fadenpendeln, die über kleine Gewichte miteinander gekoppelt (verbunden) sind. Je nachdem wie man das erste Pendel auslenkt, entstehen unterschiedliche Wellen, die sich im Medium "Pendelkette" ausbreiten.

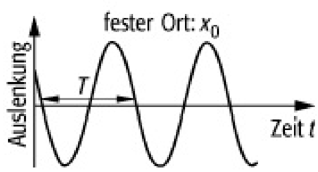
Eine Welle transportiert Energie, jedoch keine Materie. Bei einer Wasserwelle bewegen sich die Wasserteilchen auf und ab (sie vollführen Schwingungen) aber sie bewegen sich nicht von ihrem eigentlichen Ort fort. Es wird nur die Störung durch den Raum transportiert.

Mechanische Wellen sind an ein Medium gebunden (z.B. Seilwellen, Wasserwellen, Schallwellen). Es gibt aber auch Wellen, die sich auch im Vakuum ausbreiten können (z.B. elektromagnetische Wellen).

Die Darstellung einer Welle

Jede Welle besteht aus einem räumlichen Teil und einem zeitlichen Teil. Da drei- (oder mehr-) dimensionale Zeichnung nicht immer einfach zu machen sind, muß man sich auf zwei-dimensionale Darstellungen einschränken.
Es gibt zwei Möglichkeiten eine Welle graphisch darzustellen. Entweder man zeichnet die Welle zu einem bestimmten festen Zeitpunkt t_0 in Abhängigkeit des Ortes (wie ein Photo zu einem bestimmten Zeitpunkt, oberes Bild) oder man zeichnet die Welle für einen bestimmten festen Ort x_0 in Abhängigkeit der Zeit (das entspricht der Schwingung eines Oszillators, unteres Bild).





In beiden Darstellung erkennt man eine sinusartige Kurve.

- Bei der ortsabhängigen Darstellung kann man die **Wellenlänge** λ erkennen (entspricht einer vollständigen Schwingung im Ort, Längenperiode).
- Bei der zeitabhängigen Darstellung kann man die **Periode** T ablesen (enspricht einer vollständigen Schwingung in der Zeit, Zeitperiode).
- Bei beiden Darstellungen erkennt man die maximale Auslenkung, die **Amplitude** y_0.

Die beiden Größen λ und $f = \frac{1}{T}$ können über die **Ausbreitungsgeschwindigkeit** c miteinander verbunden werden, die angibt, wie schnell sich eine Störung im Medium ausbreitet.

Es gilt:

Ausbreitungsgeschwindigkeit = Wellenlänge mal Frequenz

$$c = \lambda \cdot f = \frac{\lambda}{T} \tag{6.1}$$

Man spricht bei einer Welle auch von **Wellenberg** und **Wellental**. Eine vollständige Periode (im der Länge oder in der Zeit) besteht immer aus einem Wellenberg und einem Wellental.
Als **Phasen** einer Welle bezeichnet man die verschiedenen Schwingungszustände der Oszillatoren, z.B. "ganz oben", "Ruhelage", "halb unten", "ganz unten".

Die Einteilung von Wellen

Man kann Wellen unterschiedlich einteilen

- laufende und stehende Wellen (siehe Kapitel 6.2)
- Transversalwellen und Longitudinalwellen (siehe Kapitel 6.3)

Die Mathematische Beschreibung einer Welle

Eine Welle kann durch eine Sinus-Funktion beschrieben werden. Diese Funktion beschreibt die Auslenkung eines von der Welle erfassten Teilchens in y-Richtung an einem beliebigen Ort x und zu einer beliebigen Zeit t. Es gilt:

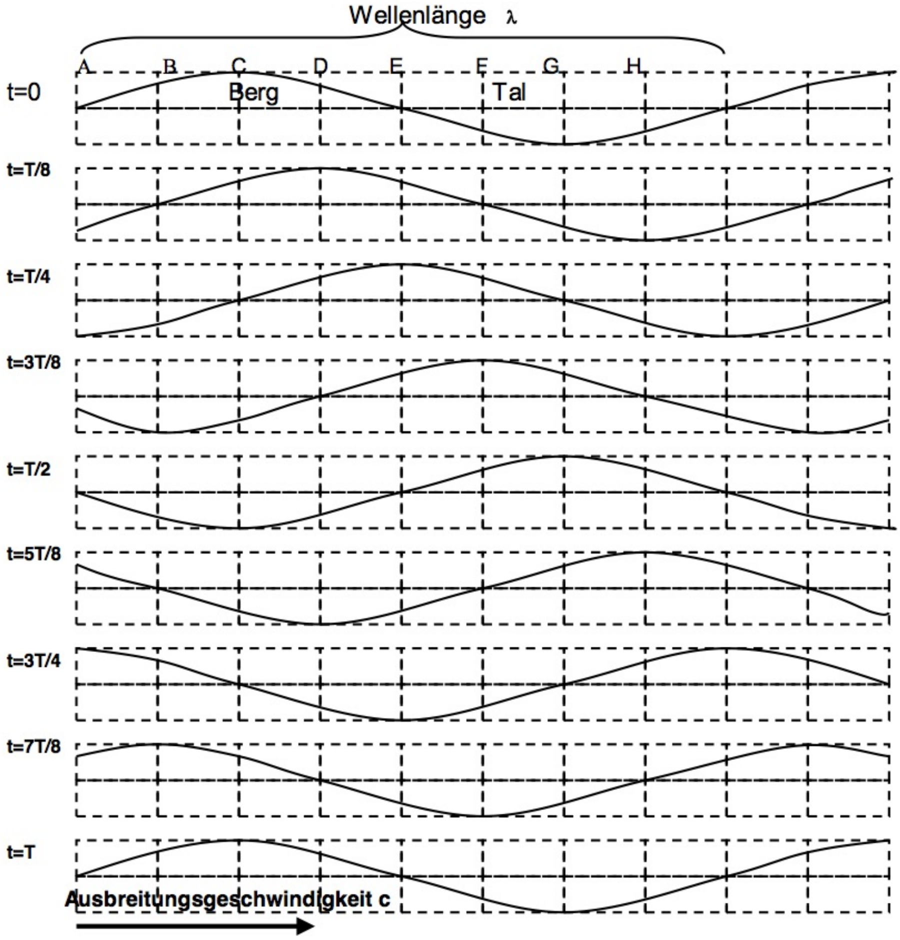
$$y(x,t) = y_0 \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t) = y_0 \cdot \sin\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right) \tag{6.2}$$

dabei ist y_0 die Amplitude der Welle, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ist die (Kreis-) Wellenzahl und $\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$ ist die Kreisfrequenz.
Die Kreisfrequenz ω gibt den überstrichenen Phasenwinkel der Schwingung pro Zeitspanne an. Analog gibt die Wellenzahl k die Anzahl der Schwingungen pro Einheitslänge (bei der Kreiswellenzahl auf einer Länge von 2π) an.

6.2 Laufende und stehende Wellen

6.2.1 Laufende Wellen

Die Abbildung zeigt eine laufende harmonische Welle zu neun verschiedenen Zeitpunkten.



Betrachten wir verschiedene Punkte der Welle und ihre Schwingungen:

- Punkt A:
  Er ist am Anfang in der Ruhelage, danach schwingt er nach unten. Zum Zeitpunkt $t = \frac{T}{4}$ hat er ein Viertel einer vollen Schwingung gemacht und ist nun ganz unten. Dann schwingt er wieder zurück zur Ruhelage (bei $\frac{T}{2}$), dann ganz nach oben (bei $\frac{3T}{4}$), und dann zurück. Nach der Zeit T hat er eine volle Schwingung beendet.

- Punkt C:
  Er beginnt seine Schwingung ganz oben. Er schwingt zuerst zur Ruhelage (bei $\frac{T}{4}$), dann ganz hinunter (bei $\frac{T}{2}$), dann wieder zurück zur Ruhelage (bei $\frac{3T}{4}$) und nach einer Periode T ist er wieder an seinem Anfangspunkt. Auch C hat in der Zeit T eine volle Schwingung gemacht.

Ebenso wie A und C machen alle Punkte in der Zeit T volle Schwingungen, aber jeder Punkt ein bisschen später als sein Vorgänger. Alle Punkte des Mediums schwingen in vertikaler Richtung, obwohl sich die Welle nach rechts bewegt.
Man sagt die Phasen (Berge und Täler) breiten sich nach rechts mit der Geschwindigkeit c aus. Manchmal spricht man auch von der Phasengeschwindigkeit.

Beispiel (6.1)

Gegeben ist eine laufende Welle. Ein Wellenberg hat die Länge 9 cm und verwandelt sich in 3 Sekunden in ein Tal.
Berechnen Sie die Frequenz f, die Wellenlänge λ und die Ausbreitungsgeschwindigkeit c!

Lösung

Die Länge des Wellenberg entspricht der halben Wellenlänge

$$\frac{\lambda}{2} = 9 \quad \longrightarrow \quad \lambda = 18 \text{ cm}$$

Jeder Wellenberg ist nach der halben Periode ein Wellental

$$\frac{T}{2} = 3 \quad \longrightarrow \quad T = 6 \text{ s}$$

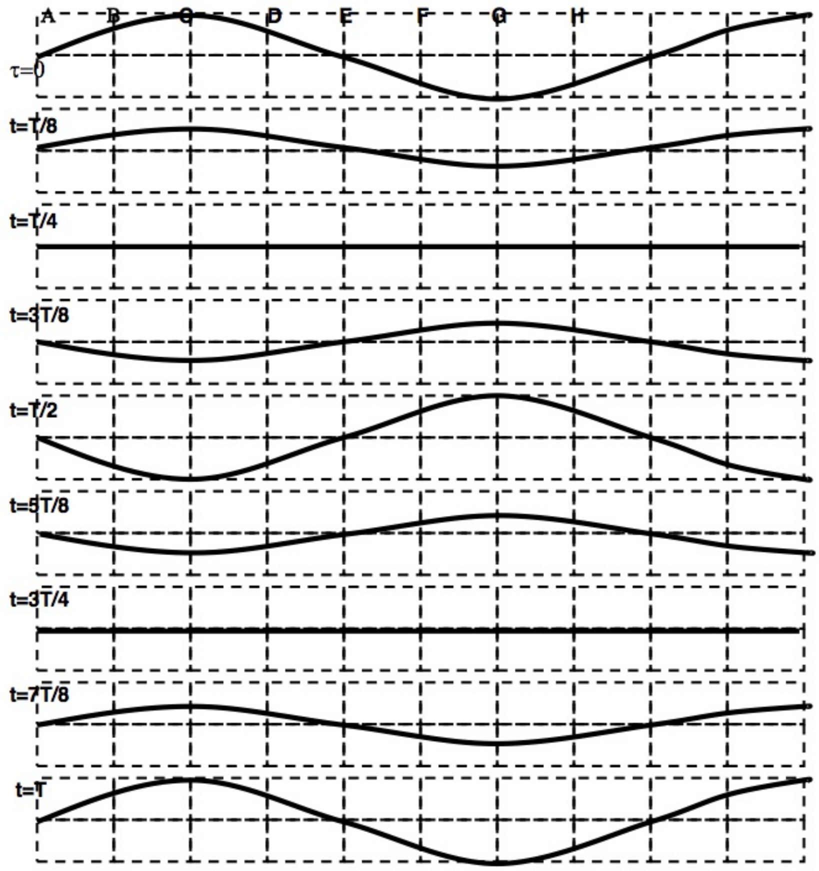
$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{6} \text{ Hz}$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist dann

$$c = \lambda \cdot f = 0,18 \cdot \frac{1}{6} = 0,03 \text{ m/s}$$

6.2.2 Stehende Wellen

Diese Abbildung zeigt eine stehende Welle zu neun verschiedenen Zeiten:

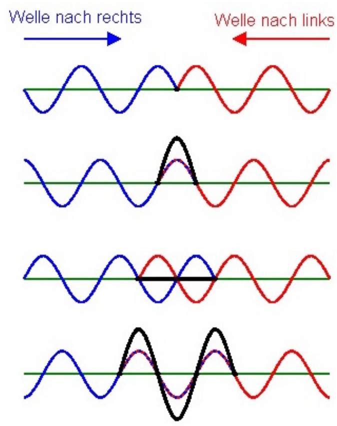


- Manche Punkte (z.B. A, E, I) schwingen überhaupt nicht und sind immer in der Ruhelage. Sie heißen **Knoten**.

- Andere Punkte (z.B. C, G) machen maximale Schwingungen. Sie heißen **Bäuche**.
- Alle anderen Punkte, die weder Knoten noch Bauch sind, schwingen gleichphasig mit ihren Bäuchen, z.B. die Punkte B und D schwingen gleichphasig mit C; der Punkt H schwingt gleichphasiggleichphasig mit G.

Die Berge und Täler bewegen sich nicht nach rechts. Sie schwingen nur gegenphasig auf ihren Plätzen auf und ab.
Stehende Wellen spielen in Natur und Physik eine große Rolle.

Entstehung von stehenden Wellen



Stehende Wellen bilden sich durch Interferenz (Zusammenwirken) von zwei laufenden Wellen mit gleicher Wellenlänge und entgegengesetzt gleicher Ausbreitungsgeschwindigkeit.
Die Abbildung zeigt zwei Wellen mit gleicher Wellenlänge λ, gleicher Amplitude aber entgegengesetzter Ausbreitungsgeschwindigkeit. Im ersten Bild zum Zeitpunkt $t = 0$ stoßen die beiden Wellen gerade zusammen. Im zweiten Bild ($t = \frac{T}{4}$) überlagern sich die beiden Wellen und verstärken sich zur doppelten Amplitude (die Auslenkungen der beiden Wellen werden an jedem Punkt addiert). Im dritten Bild ($t = \frac{T}{2}$) ergibt die überlagerung der beiden Wellen die Auslöschung. Im vierten Bild ($t = \frac{3T}{4}$) führt die überlagerung wieder zu einer Verdopplung der Amplitude.

Beispiel (6.2)

Bei einer stehenden Welle ist der Abstand zwischen einem Knoten und einem Bauch gleich 7,5 cm. Außerdem ist alle 5 s keine Welle zu sehen.
Berechnen Sie die Frequenz f, die Wellenlänge λ und die Ausbreitungsgeschwindigkeit c!

Lösung

Der Abstand zwischen Knoten und Bauch ist immer ein Viertel der Wellenlänge

$$\frac{\lambda}{4} = 7,5 \quad \longrightarrow \quad \lambda = 30 \text{ cm}$$

Der zeitliche Abstand zwischen zwei ausgelöschten Wellen beträgt eine halbe Periode

$$\frac{T}{2} = 5 \quad \longrightarrow \quad T = 10 \text{ s}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{10} \text{ Hz}$$

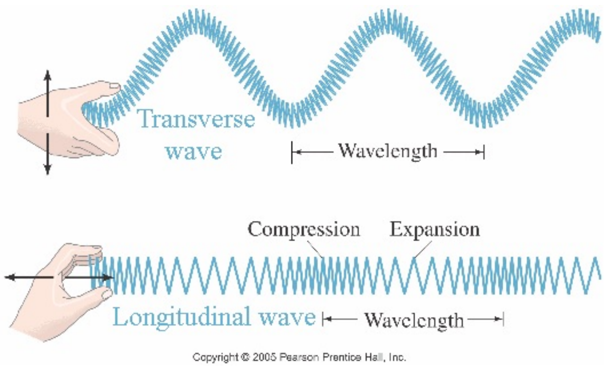
Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist dann

$$c = \lambda \cdot f = 0,3 \cdot \frac{1}{10} = 0,03 \text{ m/s}$$

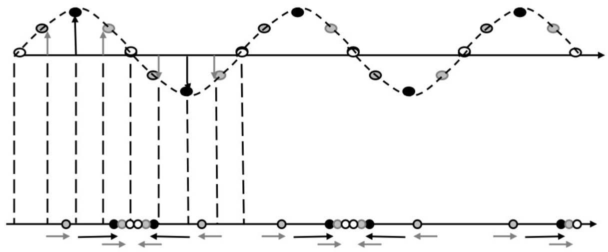
6.3 Transversalwellen und Longitudinalwellen

Der Slinky (siehe nebenstehendes Bild) ist eine sehr lange mechanische Feder und je nach Schwingungsrichtung kann man sowohl Transversalwellen als auch Longitudinalwellen damit erzeugen.

- Bei einer Transversalwelle (Querwelle) steht die Schwingungsrichtung normal zur Ausbreitungsrichtung. Beispiele dafür sind Wasserwellen und elektromagnetische Wellen (Licht).
- Bei einer Longitudinalwelle (Längswelle) steht die Schwingungsrichtung parallel zur Ausbreitungsrichtung. Beispiele dafür sind Schallwellen (Sprache und Musik) und Druckwellen in Gasen.



Es gibt laufende Transversalwellen und stehende Transversalwellen, sowie laufende Longitudinalwellen und stehende Longitudinalwellen.



Man erhält Longitudinalwellen, indem man sich alle positiven Elongationen nach rechts "gelegt" denkt und alle negativen Elongationen nach links. Es entsteht eine Welle bei die Teilchen parallel zur Ausbreitungsrichtung hin und her schwingen. Jedes Teilchen, das in der Transversalwelle nach oben schwingt, schwingt in der Longitudinalwelle mit derselben Elongation nach rechts. Jedes Teilchen, das in der Transversalwelle nach unten schwingt, schwingt in der Longitudinalwelle mit derselben Elongation nach links. Dadurch entsteht an bestimmten Stellen eine hohe Teilchendichte, an anderen Stellen eine sehr geringe Teilchendichte.
Bei Longitudinalwellen hat man immer abwechselnd Orte mit hoher und niedriger Teilchendichte. Daher nennt man solche Wellen oft auch Dichtewellen oder Druckwellen.

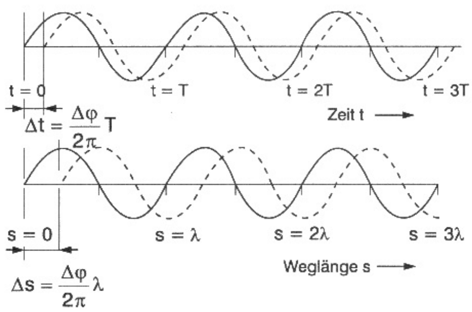
6.4 Die Interferenz und Reflexion von Wellen

6.4.1 Die Interferenz von Wellen

Wenn zwei oder mehrere Wellen zusammentreffen, so wirken sie zusammen. Man sagt "sie überlagern sich" oder "sie interferieren". Es gibt Interferenz oder Überlagerung zwischen ihnen.
Allgemein kann man die neue Welle dadurch bestimmen, dass man für jeden Punkt die Elongationen der beiden Ausgangswellen addiert, wobei Elongationen über der Ruhelage positiv gezählt werden, und Elongationen unter der Ruhelage negativ.
Wir betrachten im Folgende imm den Spezialfall, dass beide Ausgangswellen die gleiche Wellenlänge λ haben.

Phasenverschiebung von Wellen

Wenn sich Wellen mit gleicher Wellenlänge überlagern, ist es wichtig zu wissen, um wieviel später die eine Welle nach der anderen Welle anfängt. Diesen Unterschied der Wellen bezeichnet man als Phasenverschiebung $\Delta\varphi$.
Einer vollen Wellenlänge λ wird der volle Winkel von 360° zugeordnet. Der Versetzung zwischen zwei Wellen im Weg (Wegverschiebung Δs) entspricht dann dem entsprechenden



Bruchteil der Wellenlänge ausgedrückt als Winkel, der Phasenverschiebung $\Delta\varphi$. Es gilt

$$\frac{\Delta\varphi}{360°} = \frac{\Delta s}{\lambda}$$

Wenn die Versetzung der Wellen in der Zeit (die Zeitverschiebung Δt) gegeben ist, so wird der vollen Periode T der volle Winkel 360° zugeordnet und für die Phasenverschiebung gilt

$$\frac{\Delta\varphi}{360°} = \frac{\Delta t}{T}$$

Die volle Winkel kann natürlich auch immer im Bogenmaß angegeben werden. Dann ist $\Delta\varphi$ entsprechend auch im Bogenmaß.

Für den Zusammenhang zwischen Phasenverschiebung $\Delta\varphi$, Zeitverschiebung Δt und Wegverschiebung Δs zwischen zwei Wellen gilt:

$$\frac{\Delta\varphi}{360°} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta t}{T} = \frac{\Delta s}{\lambda} \tag{6.3}$$

Beispiel (6.3)

Gegeben sind zwei Wellen mit gleicher Wellenlänge $\lambda = 6$ m und der Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = 12$ m/s. Die zweite Welle läuft 1 m hinter der ersten Welle.
a) Wie groß ist der Zeitunterschied der beiden Wellen?
b) Wie groß ist der Phasenunterschied der beiden Wellen?

Lösung

a) Zuerst berechnen wir die Frequenz und die Periode dieser Wellen

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{12}{6} = 2 \text{ Hz} \quad \longrightarrow \quad T = \frac{1}{f} = \frac{1}{2} \text{ s}$$

Der Zeitunterschied ergibt sich dann durch

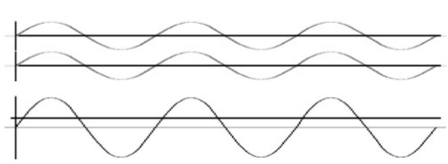
$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{\Delta s}{\lambda} \quad \longrightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta s}{\lambda} \cdot T = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12} = 0,083 \text{ s}$$

b) Der Phasenunterschied ist

$$\frac{\Delta\varphi}{360°} = \frac{\Delta s}{\lambda} \quad \longrightarrow \quad \Delta\varphi = \frac{\Delta s}{\lambda} \cdot 360° = \frac{1}{6} \cdot 360° = 60°$$

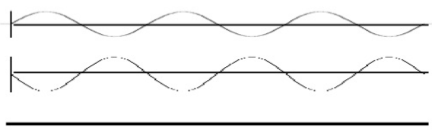
Interferenz gleichphasiger Wellen

Die beiden Ausgangswellen haben keine Phasenverschiebung $\Delta\varphi = 0$, sie sind gleichphasig. Sie verstärken sich deshalb zu einer Welle, die doppelt so große Amplitude hat. Dies nennt man **konstruktive Interferenz**.



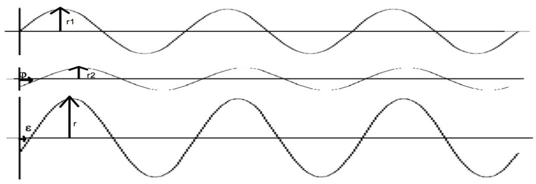
Interferenz gegenphasiger Wellen

Die beiden Ausgangswellen haben die Phasenverschiebung $\Delta\varphi = 180°$, sie sind gegenphasig. Sie überlagern sich deshalb zu einer Welle, deren Amplitude gleich Null ist. Die Wellen löschen sich gegenseitig aus. Dies nennt man **destruktive Interferenz**.



Interferenz von Wellen mit beliebiger Phasenverschiebung

Bei der Interferenz von Wellen mit gleichen λ, entsteht wieder eine Welle mit λ. Wie sie genau aussieht, hängt von $\Delta\varphi$ und von den Amplituden der beiden ursprünglichen Wellen $y_0^{(1)}$ und $y_0^{(2)}$ ab. Die Amplitude der neuen Welle ist $y_{0,neu}$ mit $y_{0,neu} < y_0^{(1)} + y_0^{(2)}$



$$(y_{0,neu})^2 = (y_0^{(1)})^2 + (y_0^{(2)})^2 + 2 \cdot y_0^{(1)} \cdot y_0^{(2)} \cos\Delta\varphi \tag{6.4}$$

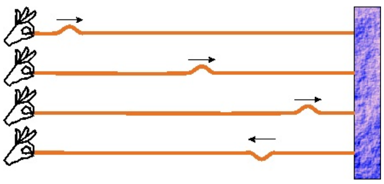
und die Phasenverschiebung der neuen Welle ist ε mit $\varepsilon < \Delta\varphi$

$$\sin\varepsilon = \frac{y_0^{(2)}}{y_{0,neu}} \cdot \sin\Delta\varphi \tag{6.5}$$

6.4.2 Die Reflexion von Wellen

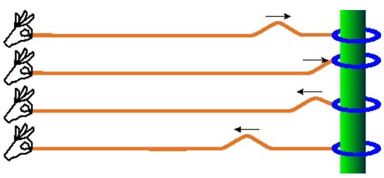
Reflexion am festen Ende

Eine Störung breitet sich aus und läuft auf eine feste Wand zu. Dort wird die Welle reflektiert und läuft zurück. Am festen Ende wird ein Wellental als Wellenberg reflektiert und umgekehrt. Die Welle springt bei der Reflexion am festen Ende um ein halbe Wellenlänge. Man sagt die Welle bekommt einen Phasensprung von 180° (π).
Wenn die ursprüngliche Welle und die reflektierte Welle interferieren, entsteht eine stehende Welle. Dabei entsteht am festen Ende ein Knoten.



Reflexion am losen (freien) Ende

Eine Störung wird an einem losen Ende reflektiert und läuft zurück. Am freien Ende wird ein Wellental als Wellental reflektiert und ein Wellenberg als Wellenberg. Die Welle erleidet bei der Reflexion am freien Ende keinen Phasensprung.
Wenn die ursprüngliche Welle und die reflektierte Welle interferieren, so entsteht eine stehende Welle. Dabei entsteht am freien Ende ein Bauch.



6.5 Stehende Wellen in der Praxis – Grund- und Oberschwingungen

Allgemeines

Wir wissen, dass man stehende Wellen durch Interferenz von Wellen mit gleichem λ und entgegengesetzt gleicher Geschwindigkeit erhält. Stehende Wellen können durch Reflexion an den Enden eines Mediums entstehen. Das ist aber nicht immer möglich, sondern nur, wenn das Medium eine bestimmte Länge hat. Wir unterscheiden drei Fälle:

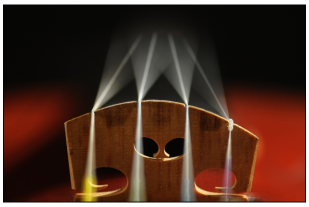
- zwei feste Enden:
  Die beiden Enden müssen Knoten sein, da sie fest sind und nicht schwingen können. Die gesamte Länge des Mediums muß daher ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{\lambda}{2}$ sein

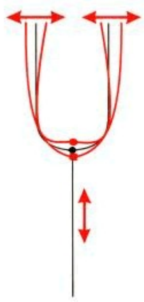
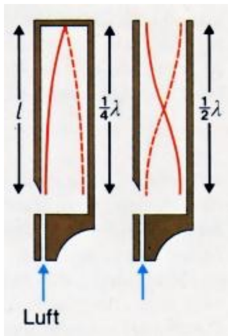
- ein festes und ein freies (loses) Ende:
  Das feste Ende muß ein Knoten sein, das freie Ende ein Bauch. Die Länge des gesamten Mediums ist ein ungeradzahliges Vielfaches von $\frac{\lambda}{4}$.

- zwei freie Enden:
  Beide Enden sind Bäuche. Die gesamte Länge ist ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{\lambda}{2}$.

Stehende Wellen entstehen, wenn sich Wellen in einem räumlich begrenzten Medium ausbreiten. Wir unterscheiden Grund- und Oberschwingungen.
Es gibt:

- elastische Transversalwellen in einer Saite oder einer gespannten Schnur (Geige, Gitarre)
- elastische Transversalwellen in einem Stab (Lineal oder Stimmgabel)
- Schallwellen in einer Luftsäule eines Blasinstruments (Flöte, Orgelpfeifen)



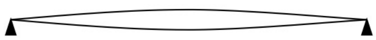
Grund- und Oberschwingungen

Bei den meisten Medien gilt folgendes:

- Bei gegebener Länge des Mediums entstehen gleichzeitig stehende Wellen mit allen Wellenlängen, die möglich sind. Die entstehenden Wellenlängen hängen also von der Länge des Mediums ab.
- Die Welle mit der größten Wellenlänge heißt **Grundschwingung**. Die nächst kleinere Wellenlänge heißt **1. Oberschwingung**. Sie hat einen Bauch mehr als die Grundschwingung. Die nächste Welle heißt **2. Oberschwingung** usw.
- Grundschwingung und alle Oberschwingungen entstehen von selbst und gleichzeitig. Meist sind aber die Oberschwingungen viel schwächer als die Grundschwingungen.
- Die Ausbreitungsgeschwindigkeit hängt von Material, Druck, Temperatur und Spannung ab und nicht von der Frequenz oder Wellenlänge einer Welle.

6.5.1 Oberschwingungen bei zwei festen Enden (die schwingende Saite)

Wenn man eine Saite (etwa einer Gitarre oder Violine) in Schwingung versetzt, so entstehen von selbst viele stehende Wellen. Die Länge der Saite ist mit l fix gegeben.



Die wichtigste und meist stärkste Welle ist die sogenannte **Grundschwingung** (erste Harmonische). Sie hat einen Bauch und zwei Knoten an den Enden. Ihre Wellenlänge heißt λ_0 und es gilt $\frac{1}{2}\lambda_0 = l$ und damit

$$\lambda_0 = 2 \cdot l$$

Die nächste Welle ist die sogenannte **erste Oberschwingung** (zweite Harmonische). Sie hat zwei Bäuche und insgesamt 3 Knoten. Ihre Wellenlänge heißt λ_1 und ist die Hälfte der Grundschwingung und es gilt

$$\lambda_1 = l = \frac{\lambda_0}{2}$$

Die nächste Welle ist die sogenannte **zweite Oberschwingung** (dritte Harmonische). Sie hat wieder einen Bauch mehr als die vorige Schwingung. Ihre Wellenlänge heißt λ_2 und ist ein Drittel der Grundschwingung. Aus der Abbildung kann man ablesen $\frac{3}{2}\lambda_2 = l$ und damit

$$\lambda_2 = \frac{2}{3}l = \frac{\lambda_0}{3}$$

Die nächste Welle ist die sogenannte **dritte Oberschwingung** (vierte Harmonische). Sie hat wieder einen Bauch mehr als die vorige Schwingung. Ihre Wellenlänge heißt λ_3 und ist ein Viertel der Grundschwingung. Aus der Abbildung kann man ablesen dass $2 \cdot \lambda_3 = l$ und damit

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}l = \frac{\lambda_0}{4}$$

Die n-te Oberschwingung hat n Bäuche mehr als die Grundschwingung, also zusammen $n+1$ Bäuche. Es gilt dann analog:

$$\lambda_n = \frac{\lambda_0}{n+1} \tag{6.6}$$

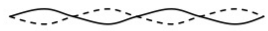
Kennt man die Ausbreitungsgeschwindigkeit c der Welle im Medium (d.h. auf der Saite), dann kann man die Frequenzen der Grundschwingung und der Oberschwingungen berechnen:

$f_0 = \frac{c}{\lambda_0}$, $\quad f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = 2 \cdot f_0$, $\quad f_2 = \frac{c}{\lambda_2} = 3 \cdot f_0$, $\quad f_3 = \frac{c}{\lambda_2} = 4 \cdot f_0$

$$f_n = (n+1) \cdot f_0 \tag{6.7}$$

Beispiel (6.4)

Die abgebildete stehende Welle ist 4 m lang und schwingt mit der Frequenz von 50 Hz.



a) Berechnen Sie die Wellenlänge und Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle!
b) Welche Oberschwingung ist zu sehen? Berechnen Sie die Wellenlänge und die Frequenz der Grundschwingung!

Lösung

a) In dieser Welle hat zwei mal die Wellenlänge Platz

$$2 \cdot \lambda = 4 \quad \longrightarrow \quad \lambda = 2 \text{ m}$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist

$$c = \lambda \cdot f = 2 \cdot 50 = 100 \text{ m/s}$$

b) Es ist hier die 3. Oberschwingung zu sehen. Die Grundschwingung hat daher die Wellenlänge und die Frequenz von

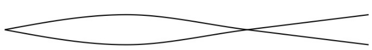
$$\lambda_3 = \frac{\lambda_0}{3+1} \quad \longrightarrow \quad \lambda_0 = \lambda_3 \cdot 4 = 2 \cdot 4 = 8 \text{ m}$$
$$f_3 = (3+1) \cdot f_0 \quad \longrightarrow \quad f_0 = \frac{f_3}{4} = \frac{50}{4} = 12,5 \text{ Hz}$$

6.5.2 Oberschwingungen bei einem festen und einem freien Ende (der schwingende Stab)

Wenn man ein Kunststofflineal an einem Ende fest hält und das andere Ende in Schwingung versetzt, so entstehen stehende Wellen. Die Länge des Lineals ist mit l fix gegeben. Am festen Ende entsteht immer ein Knoten, das freie Ende schwingt immer als Bauch.

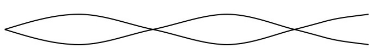
Die einfachste Welle ist die **Grundschwingung** (erste Harmonische). Sie hat einen Bauch und einen Knoten. Ihre Wellenlänge heißt λ_0 und es gilt $\frac{1}{4}\lambda_0 = l$ und damit

$$\lambda_0 = 4 \cdot l$$



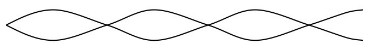
Die nächste Welle ist die **erste Oberschwingung** (zweite Harmonische). Sie hat zwei Bäuche und zwei Knoten. Ihre Wellenlänge heißt λ_1 und es gilt $\frac{3}{4}\lambda_1 = l$ und damit

$$\lambda_1 = \frac{4}{3}l = \frac{\lambda_0}{3}$$



Die nächste Welle ist die **zweite Oberschwingung** (dritte Harmonische). Sie hat 3 Bäuche und 3 Knoten. Ihre Wellenlänge heißt λ_2 und $\frac{5}{4}\lambda_2 = l$ und damit

$$\lambda_2 = \frac{4}{5}l = \frac{\lambda_0}{5}$$



Die nächste Welle ist die **dritte Oberschwingung** (vierte Harmonische). Sie hat wieder einen Bauch und einen Knoten mehr als die vorige Schwingung. Ihre Wellenlänge heißt λ_3 und $\frac{7}{4}\lambda_3 = l$ und damit

$$\lambda_3 = \frac{4}{7}l = \frac{\lambda_0}{7}$$

Die n-te Oberschwingung hat n Bäuche mehr als die Grundschwingung, also zusammen $n+1$ Bäuche. Es gilt dann analog:

$$\lambda_n = \frac{\lambda_0}{2n+1} \tag{6.8}$$

Kennt man die Ausbreitungsgeschwindigkeit c der Welle im Medium (d.h. auf der Saite), dann kann man die Frequenzen der Grundschwingung und der Oberschwingungen berechnen:

$f_0 = \frac{c}{\lambda_0}$, $f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = 3 \cdot f_0$, $f_2 = \frac{c}{\lambda_2} = 5 \cdot f_0$, $f_3 = \frac{c}{\lambda_2} = 7 \cdot f_0$

$$f_n = (2n+1) \cdot f_0 \tag{6.9}$$

Beispiel (6.5)

Die abgebildete stehende Welle ist 11 m lang und schwingt mit der Frequenz von 132 Hz.

a) Berechnen Sie die Wellenlänge und Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle!
b) Welche Oberschwingung ist zu sehen? Berechnen Sie die Wellenlänge und die Frequenz der Grundschwingung!

Lösung

a) In dieser Welle hat 2,75 mal die Wellenlänge Platz

$$2,75 \cdot \lambda = 11 \quad \longrightarrow \quad \lambda = \frac{11}{2,75} = 4 \text{ m}$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist

$$c = \lambda \cdot f = 4 \cdot 132 = 528 \text{ m/s}$$

b) Es ist hier die 5. Oberschwingung zu sehen. Die Grundschwingung hat daher die Wellenlänge und die Frequenz von

$$\lambda_5 = \frac{\lambda_0}{2 \cdot 5 + 1} \quad \longrightarrow \quad \lambda_0 = \lambda_5 \cdot 11 = 4 \cdot 11 = 44 \text{ m}$$

$$f_5 = (2 \cdot 5 + 1) \cdot f_0 \quad \longrightarrow \quad f_0 = \frac{f_5}{11} = \frac{132}{11} = 12 \text{ Hz}$$

6.5.3 Oberschwingungen bei zwei freien Enden (der schwingende Stab)

Eine Stimmgabel (schwingender Stab) schwingt mit zwei freien Enden. An beiden freien Enden entstehen Bäuche, dazwischen ist ein Knoten.

Bei einer Stimmgabel ist der schwingende Metallstab mit einem Holzkasten (Resonanzkasten) verbunden. Diejenigen Oberschwingungen des Stabes, die in der Mitte einen Bauch haben, übertragen ihre Schwingungen auf den Holzkasten. Dieser verstärkt die Schwingungen und versetzt auch die Luft in seinem Inneren in Schwingung.

Die **Grundschwingung** (erste Harmonische) hat zwei Bäuche und einen Knoten. Ihre Wellenlänge heißt λ_0 und es gilt $\frac{1}{2}\lambda_0 = l$ und damit

$$\lambda_0 = 2 \cdot l$$

Die nächste Welle ist die **erste Oberschwingung** (zweite Harmonische). Sie hat drei Bäuche und zwei Knoten. Ihre Wellenlänge heißt λ_1 und es gilt $\lambda_1 = l$ und damit

$$\lambda_1 = l = \frac{\lambda_0}{2}$$

Die nächste Welle ist die **zweite Oberschwingung** (dritte Harmonische). Sie hat 3 Bäuche und 4 Knoten. Ihre Wellenlänge heißt λ_2 und $\frac{3}{2}\lambda_2 = l$ und damit

$$\lambda_2 = \frac{2}{3}l = \frac{\lambda_0}{3}$$

Die n-te Oberschwingung hat n Bäuche mehr als die Grundschwingung, also zusammen $n+1$ Bäuche. Es gilt dann analog:

$$\lambda_n = \frac{\lambda_0}{n+1} \tag{6.10}$$

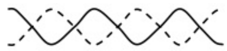
Kennt man die Ausbreitungsgeschwindigkeit c der Welle im Medium (d.h. auf der Saite), dann kann man die Frequenzen der Grundschwingung und der Oberschwingungen berechnen:

$f_0 = \frac{c}{\lambda_0}, \quad f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = 2 \cdot f_0, \quad f_2 = \frac{c}{\lambda_2} = 3 \cdot f_0$

$$f_n = (n+1) \cdot f_0 \tag{6.11}$$

Beispiel (6.6)

Die abgebildete stehende Welle ist 15 m lang und schwingt mit der Frequenz von 20 Hz.



a) Berechnen Sie die Wellenlänge und Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle!
b) Welche Oberschwingung ist zu sehen? Berechnen Sie die Wellenlänge und die Frequenz der Grundschwingung!

Lösung

a) In dieser Welle hat 2,5 mal die Wellenlänge Platz

$$2,5 \cdot \lambda = 15 \quad \longrightarrow \quad \lambda = \frac{15}{2,5} = 6 \text{ m}$$

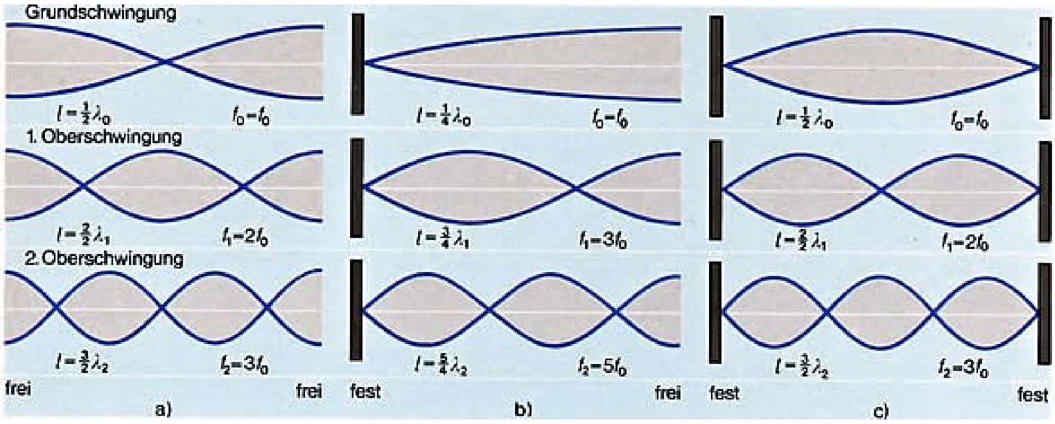
Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist

$$c = \lambda \cdot f = 6 \cdot 20 = 120 \text{ m/s}$$

b) Es ist hier die 4. Oberschwingung zu sehen. Die Grundschwingung hat daher die Wellenlänge und die Frequenz von

$$\lambda_4 = \frac{\lambda_0}{4+1} \quad \longrightarrow \quad \lambda_0 = \lambda_4 \cdot 5 = 6 \cdot 5 = 30 \text{ m}$$
$$f_4 = (4+1) \cdot f_0 \quad \longrightarrow \quad f_0 = \frac{f_4}{5} = \frac{20}{5} = 4 \text{ Hz}$$

6.5.4 Zusammenfassung



6.6 Schallwellen

6.6.1 Allgemeines

Töne (Musik, Klänge, Lärm, Geräusche, Sprache) sind Schallwellen. Das Medium ist meist Luft, die Schallwellen können sich jedoch auch in vielen anderen Stoffen (Metallen, Flüssigkeiten) fortpflanzen.
Im Medium Luft sind die Schallwellen Longitudinalwellen, die Schwingungsrichtung ist also parallel zur Ausbreitungsrichtung. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist in Luft $c \approx 330$ m/s.
Ein einzelner Ton entspricht einer Schallwelle mit einer bestimmten Frequenz (Sinus-Schwingung). Klänge und Geräusche sind Mischungen von verschiedenen Tönen und entsprechen demnach überlagerungen von Schallwellen verschiedener Frequenzen.

Lautstärke

Ein Ton ist laut, wenn er viel Energie transportiert. Die Energie von harmonischen Schwingungen ist proportional zum Quadrat der Amplitude und der Frequenz $E \propto y_0^2 \cdot f^2$.

Es gilt: Ein Ton ist umso lauter, je größer seine Amplitude ist.

Nach der Energieformel wäre ein Ton mit doppelter Amplitude viermal lauter. Das Ohr mißt aber die Lautstärke nicht nach diesem Gesetz. Der Mensch empfindet daher einen doppelt so lauten Ton nicht doppelt so laut sondern weniger.

Tonhöhe

Verschiedene Tonhöhen unterscheiden sich durch die Frequenzen ihrer Wellen.

Es gilt: Ein Ton ist umso höher, je größer seine Frequenz ist.

Hoher Ton ⇔ große Frequenz ⇔ kleine Wellenlänge
Tiefer Ton ⇔ kleine Frequenz ⇔ große Wellenlänge

Klangfarbe

Wenn zwei verschiedene Musikinstrumente, z.B.: eine Gitarre und eine Trompete, einen Ton mit gleicher Tonhöhe spielen, können wir trotzdem die beiden Instrumente unterscheiden: Sie haben verschiedene Klangfarben.
Bei jeder Schwingung entstehen von selbst viele Oberschwingungen. Diese Oberschwingungen sind aber bei verschiedenen schwingenden Materialien verschieden stark ausgeprägt.

Es gilt: Verschiedene Klangfarben unterscheiden sich durch die Stärke der Oberschwingungen.

Heller Ton ⇔ die ersten Oberschwingungen sind stark
Dunkler Ton ⇔ die ersten Oberschwingungen sind schwach

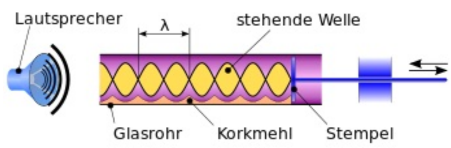
Ultraschall

Schallwellen oberhalb der menschlichen Hörgrenze mit Frequenzen f>20 000Hz heißen Ultraschall. Da hochfrequente Schwingunen sehr viel Energie transportieren, gibt es eine breite Anwendung für Ultraschallwellen.

- Materialprüfung:
  Ultraschallwellen werden an Rissen oder anderen Fehlern in Metallen oder Baustoffen reflektiert. Die reflektierten Wellen können gemessen werden. Aus ihrer Stärke und Richtung kann man die Form und den Ort der Materialfehler berechnen.
- Medizinische Untersuchungen:
  Ultraschallwellen werden auch von verschiedenen Organen im inneren des menschlikchen Körpers reflektiert. Auch die Position von Embryos im Mutterleib wird mit Hilfe von Ultraschall bestimmt. Die Bilder, die der Arzt auf einem Monitor sieht, werden nicht durch den Ultraschall selbst erzeugt, sondern von einem Computer, der diese Bilder aus den Messungen berechnet.
- Reinigung und chemische Ausfällung:
  Durch Ultraschall können Verunreinigungen leicht von ihrem Hintergrund gelöst werden: Durch die Schallwelle wird beides in Schwingung versetzt. Meist schwingt einer der beiden Körper stärker als der andere, so daß sie sich trennen.
- Ausfällen von chemischen Lösungen oder Mischungen:
  Auch in Mischungen und Lösungen kann es durch den starken Schall zur Trennung von verschiedenen Komponenten kommen.

6.6.2 Stehende Longitudinalwellen – Das Kundt'sche Rohr

Ein Rohr aus Glas ist auf der einen Seite durch einen Stempel geschlossen. Auf der anderen Seite wird durch einen Lautsprecher eine Schallwelle erzeugt. Im Inneren des Rohrs befindet sich feiner Staub aus Kork o.ä., der zu Beginn gleichmäßig verteilt ist. Man beobachtet, dass sich bei bestimmten Frequenzen der Korbstaub an ganz bestimmten Stellen sammelt.



Erklärung:
Der Lautsprecher versetzt die Luft im Rohr in Schwingung. Im Rohr entstehen stehende Longitudinalwellen. Das bedeutet, die Schwingungsrichtung der Luftmoleküle ist parallel zur Rohrachse. Es gibt Knoten, wo die Luft nicht schwingt und Bäuche, wo ihre Schwingung am größten ist. Der Staub wird von den Bäuchen weggeblasen und sammelt sich in den Knoten. Der Abstand von zwei benachbarten Staubfiguren ist daher eine halbe Wellenlänge. Das rechte Ende ist im abgebildeten Rohr geschlossen, dort schwingt die Luft nicht. Man sieht einen Knoten. Das linke Ende ist im abgebildeten Rohr offen, dort entsteht ein Bauch.
Mit einem Kundt'schen Rohr kann man die Wellenlängen und Frequenzen von Schallwellen (=Tönen) bestimmen.

Beispiel (6.7)

An der Innenwand eines Glasrohrs der Länge $l = 33$ cm ist Korkstaub fein verteilt. Sobald man mit einem Lautsprecher einen bestimmten Ton erzeugt, sammelt sich dieser Korkstaub an ganz bestimmten Stellen des Rohrs und zwar: vom Anfang gezählt nach 11 cm, nach 22cm und am Ende des Rohrs.
Berechnen Sie die Wellenlänge und die Frequenz des entstehenden Tons!

Lösung

Die Figur, die sich hier ausbildet ist die 2. Oberschwingung. Die Knoten sind am Anfang und am Ende (zwei feste Enden) und zwei Knoten dazwischen.
Die Wellenlänge dieser Schwingung ist dann

$$1,5 \cdot \lambda_2 = 0,33 \quad \longrightarrow \quad \lambda_2 = \frac{0,33}{1,5} = 0,22 \text{ m/s}$$

und die Frequenz ist (Ausbreitungsgeschwindigkeit ist die Schallgeschwindigkeit in Luft)

$$f_2 = \frac{c}{\lambda_2} = \frac{330}{0,22} = 1500 \text{ Hz}$$

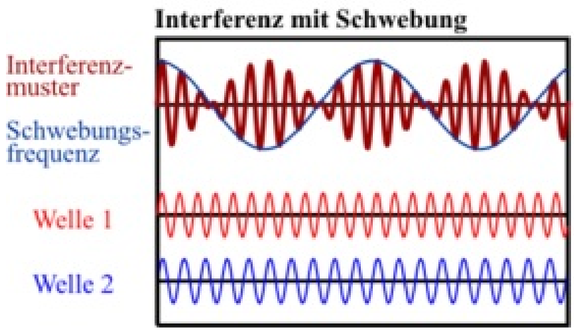
6.7 Die Schwebung

Wenn man zwei Töne gleicher Lautstärke (d.h. die Schwingungen haben gleiche Amplitude) mit leicht verschiedenen Frequenzen f_1 und f_2 ($f_1 \approx f_2$) erzeugt, so nimmt unser Ohr nicht die beiden Töne getrennt wahr. Vielmehr hören wir ein An- und Abschwellen eines Tones, dessen Höhe ungefähr mit der Höhe der Ausgangstöne übereinstimmt. Man bezeichnet diese Erscheinung als Schwebung.

Eine Schwebung entsteht durch Interferenz von zwei Wellen mit gleicher Amplitude, die sich in ihrere Wellenlänge (Frequenz) nur wenig voneinander unterscheiden. Die resultierende Welle hat dabei eine periodisch zu- und abnehmende Amplitude.

Die Abbildung zeigt die beiden Ausgangswellen, und die resultierende Welle (das Interferenzmuster).
Als überlagerung ergibt sich eine Schwingung, deren Frequenz das arithmetische Mittel der beiden Ausgangsfrequenzen ist:

$$f_{res} = \frac{f_1 + f_2}{2} \tag{6.12}$$



Die resultierende Welle schwankt in ihrere Amplitude. Die maximale Amplitude ist das doppelte der

Amplituden der beiden Ausgangswellen. Die Einhüllende der Schwankung der Amplitude verändert sich mit der Frequenz (blaue Kurve in der Abbildung)

$$f_S = \frac{|f_1 - f_2|}{2} \tag{6.13}$$

Die sogenannte Schwebungsfrequenz ergibt sich aus dem Verlauf des Betrages der Einhüllenden und ist gebeben durch

$$f_{Schwebung} = |f_1 - f_2| = 2 \cdot f_S \tag{6.14}$$

Diese Schwebungsfrequenz $f_{Schwebung}$ ist in der Regel sehr viel kleiner als die Frequenz der resultierenden Schwingung f_{res}.
Je näher die beiden Ausgangsfrequenzen beieinander liegen, desto langsamer schwillt die Lautstärke der resultierenden Schwingung an und ab (desto geringer ist die Schwebungsfrequenz).
Die Schwebungsperiode

$$T_{Schwebung} = \frac{1}{f_{Schwebung}} \tag{6.15}$$

ist der zeitliche Abstand zwischen zwei Punkten minimaler Amplitude (Knoten) der Schwebungsfunktion.

Beispiel (6.8)

Zwei Musikinstrumente spielen zwei Töne mit den Wellenlängen $\lambda_1 = 0,66$ m und $\lambda_2 = 0,67$ m.
Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der resultierenden Welle!
In welchen Zeitabständen hört man die Impulse der Schwebung?

Lösung

Es handelt sich hier um eine Schwebung, da die beiden Wellenlängen bzw. Frequenzen sehr nahe beieinander liegen.
Wir berechnen die beiden Frequenzen der Schallwellen

$$f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{330}{0,66} = 500 \text{ Hz}$$
$$f_2 = \frac{c}{\lambda_2} = \frac{330}{0,67} = 492,5 \text{ Hz}$$

Die Schwebungsfrequenz ergibt sich damit zu

$$f_{Schwebung} = |f_1 - f_2| = 500 - 492,5 = 7,5 \text{ Hz}$$

und die Schwebungsdauer ist

$$T_{Schwebung} = \frac{1}{f_{Schwebung}} = \frac{1}{7,5} = 0,133 \text{ s}$$

Mathematische Beschreibung

Die beiden Schwingungen

$$y_1(t) = y_0 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) \tag{6.16}$$
$$y_2(t) = y_0 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t) \tag{6.17}$$

mit $\omega_1 = 2\pi \cdot f_1$, $\omega_2 = 2\pi \cdot f_2$, ergeben die resultierende Schwingung (mit Sätzen aus der Trigonometrie)

$$y_{res}(t) = y_1(t) + y_2(t) = 2y_0 \cdot \cos(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t) \cdot \sin(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t) = 2y_0 \cdot \cos(\omega_S \cdot t) \cdot \sin(\omega_{res} \cdot t) \tag{6.18}$$

mit $\omega_S = 2\pi \cdot f_S$, $\omega_{res} = 2\pi \cdot f_{res}$. Der cosinus-Term beschreibt die Amplitude und ihre Veränderung und der sinus-Term beschreibt die eigentliche Frequenz der resultierenden Schwingung.

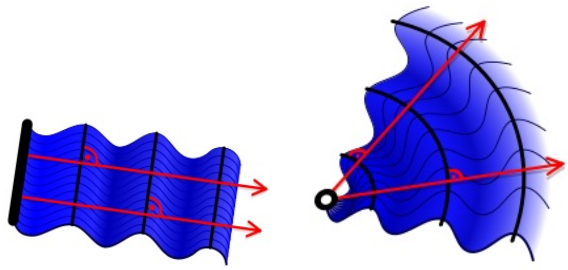
6.8 Die räumliche Ausbreitung von Wellen

Wellenfronten

Wir betrachten Wellen, die sich räumlich in einem Medium ausbreiten. Es gilt:

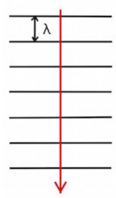
Die Wellenfront ist eine Fläche, auf der alle Punkte die gleiche Schwingungsphase besitzen. Der Abstand der Wellenfronten beträgt immer eine Wellenlänge λ. Die Ausbreitungsrichtung einer Welle ist immer normal zu den Wellenfronten.

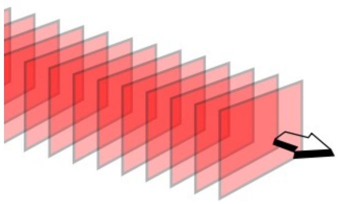
Die Form der Wellenfront kann ganz unterschiedlich sein und hängt von der Art des Senders aber auch von den Eigenschaften des Mediums ab.
In den beiden Bildern sind die Wellenfronten schwarz eingezeichnet und die Ausbreitungsrichtungen sind durch rote Pfeile dargestellt. Die Welle im ersten Bild breitet sich geradlinig aus, die Welle im zweiten Bild breitet sich radial von einem Punkt aus.



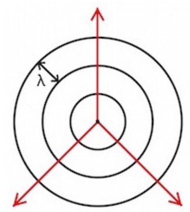
Wir betrachten die folgenden Spezialfälle von Wellen:

- Ebene Wellen (Parallelwellen):
  die Wellenfronten sind parallele Geraden (in 2 Dimensionen) oder parallele Ebenen (in 3 Dimensionen)

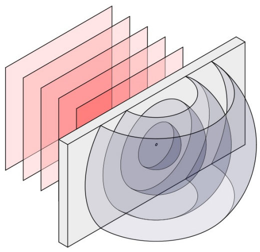




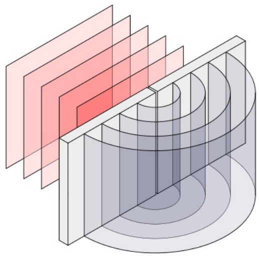
- Kreiswellen:
  die Wellenfronten sind konzentrische Kreise (in 2 Dimensionen)



- Kugelwellen:
  die Wellenfronten sind konzentrische Kugelschalen (in 3 Dimensionen)



- Zylinderwellen:
  die Wellenfronten sind Zylinder (in 3 Dimensionen)



6.9 Der Doppler Effekt

Allgemeines

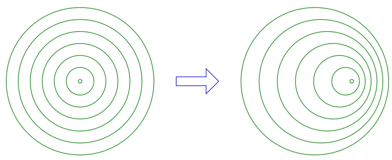
Bewegen sich eine Schallquelle und/oder ein Schallempfänger relativ zueinander, so ergibt sich eine Frequenzveränderung, die man allgemein Doppler Effekt nennt. Aus dem Alltag kennt man zum Beispiel die Erfahrung, dass ein sich näherndes Fahrzeug höhere Töne (höhere Frequenzen) von sich gibt, während die Töne eines sich entfernenden Fahrzeugs zunehmend tiefer werden (niedrigere Frequenzen).

Wenn sich ein Sender S (auch Quelle genannt), der in einem Medium Wellen erzeugt, selbst bewegt, so haben die Wellen vor ihm eine kürzere Wellenlänge, als wenn er sich nicht bewegen würde. Hinter dem Sender hat die Welle eine längere Wellenlänge. Diese Erscheinung nennen wir Doppler Effekt I.

Wenn sich ein Beobachter B (auch Empfänger genannt) einer Welle von einem ruhenden Sender weg bewegt, so empfängt er eine größere Frequenz als wenn er sich nicht bewegt. Wenn sich der Empfänger auf den Sender zu bewegt, so empfängt er eine kleiner Frequenz. Diese Erscheinung heißt Doppler Effekt II.

6.9.1 Doppler Effekt I

Der Beobachter B ist in Ruhe und der Sender S bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_S.
Wie man in der Abbildung erkennen kann, werden die Abstände zwischen den einzelnen ankommenden Schallwellen und somit die Wellenlängen λ kürzer, wenn sich der Sender auf den Beobachter zubewegt (der Beobachter sich also am rechten Bildrand befindet). Umgekehrt erscheinen die Wellenlängen als kürzer, wenn sich der Sender vom Beobachter wegbewegt (der Beobachter sich also am linken Bildrand befindet).



Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle ändert sich während dieses Vorganges nicht

$$c_B = c_S = c \tag{6.19}$$

Es ändert sich aber die Wellenlänge um einen Teil $\Delta\lambda$, der von der Geschwindigkeit des Senders v_S abhängt

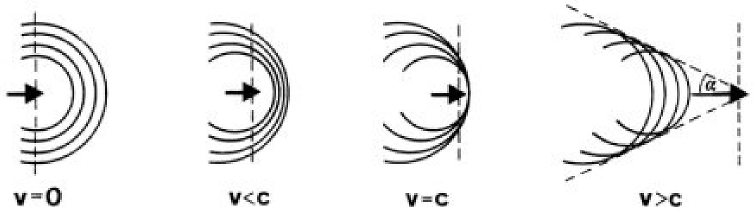
$$\lambda_B = \lambda_S \pm \Delta\lambda = \lambda_S \pm v_S \cdot T = \lambda_S \pm \frac{v_S}{f_S} \tag{6.20}$$

wobei das $-$ für die Annäherung steht und das $+$ für die Entfernung der Quelle.
Die Frequenz ändert sich in folgender Art und Weise

$$f_B = \frac{c}{\lambda_B} = \frac{c}{\lambda_S \pm \frac{v_S}{f_S}} = \frac{c}{\frac{c}{f_S} \pm \frac{v_S}{f_S}} = f_S \cdot \frac{c}{c \pm v_S} \tag{6.21}$$

Das Minus-Zeichen gilt für eine sich nähernde Schallquelle. Entfernt sich die Schallquelle vom Beobachter, so gilt das Plus-Zeichen.

Wenn die Geschwindigkeit der Schallquelle größer wird, so schieben sich die Wellenfronten immer weiter zusammen. Wenn die Geschwindigkeit mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle übereinstimmt $v_S = c$, so entsteht am Ort des Senders die sogenannte Schallmauer. Dort überlagern sich die Schallwellen konstruktiv und es entsteht ein großer Wellenberg (ein Maximum an Luftdruck). überschall-Flugzeuge müssen beim "Durchbrechen der Schallmauer" erhebliche mechanische Belastungen aushalten.
Wenn $v_S > c$ so durchbricht der Sender die Schallmauer und es entsteht der Mach-Kegel, der der einhüllenden Kurve der kugelförmigen Schallwellen entspricht. Der Mach-Kegel ist am Boden als überschallknall deutlich hörbar ist. Der Knall ist also nicht nur in dem Moment beziehungsweise in der Nähe der Stelle hörbar, wenn das Flugzeug die Schallmauer durchbricht, sondern während der gesamten Dauer des überschall-Fluges an jeder Stelle, die vom Mach-Kegel gestreift wird.



Boote, die sich schnell über das Wasser bewegen, ziehen ebenfalls einen flachen Kegel an Wellen hinter sich her. Einen Mach-Kegel kann man sich ähnlich vorstellen, nur eben dreidimensional. Je höher die Geschwindigkeit des Bootes beziehungsweise überschallflugzeugs ist, desto schmaler und länger wird der Kegel.

Beispiel (6.9)

Welche Frequenz wird von einem Beobachter wahrgenommen, wenn sich eine Schallquelle, die eine Frequenz von $f_S = 440$ Hz aussendet, mit einer Geschwindigkeit von $v_S = 10$ m/s auf den Beobachter zu- beziehungsweise wegbewegt?

Lösung

Die Schallgeschwindigkeit ist $c = 330$ m/s. Wenn sich die beiden aufeinander zubewegen, so gilt

$$f_B = f_S \cdot \frac{c}{c - v_S} = 440 \cdot \frac{330}{330 - 10} = 453,8\,Hz \tag{6.22}$$

Die Frequenz wird größer und der Ton höher.

Wenn sich die beiden voneinander wegbewegen, so gilt

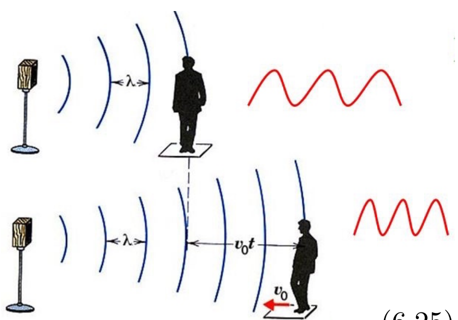
$$f_B = f_S \cdot \frac{c}{c + v_S} = 440 \cdot \frac{330}{330 + 10} = 427,1\,Hz \tag{6.23}$$

6.9.2 Doppler Effekt II

Der Sender S ist in Ruhe und der Beobachter B bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_B.
In diesem Fall ändert sich die Wellenlänge nicht

$$\lambda_B = \lambda_S \tag{6.24}$$

Es verändert sich aber die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen, die der Beobachter wahr nimmt, denn er bewegt sich mit einer Relativgeschwindigkeit v_B



$$c_B = c \pm v_B \tag{6.25}$$

+ bei der Bewegung auf den Sender zu und − bei der Bewegung vom Sender weg.
Die Frequenz änder sich dadurch

$$f_B = \frac{c_B}{\lambda_B} = \frac{c \pm v_B}{\frac{c}{f_S}} = f_S \cdot \frac{c \pm v_B}{c} \tag{6.26}$$

6.9.3 Kombinationen

Es sind alle Kombinationen von Bewegungen denkbar. Wir betrachten nur die zwei Spezialfälle, wo der Sender und der Beobachter sich aufeinander zubewegen

$$f_B = f_S \cdot \frac{c + v_B}{c - v_S} \tag{6.27}$$

und wo sie sich voneinander weg bewegen

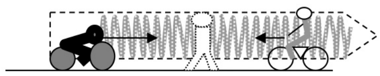
$$f_B = f_S \cdot \frac{c - v_B}{c + v_S} \tag{6.28}$$

Zusammenfassung

- Bewegt sich der Sender, so ändert sich die Wellenlänge.
- Bewegt sich der Beobachter, so änder sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit.
- Bewegen sich der Sender und der Beobachter aufeinander zu, so steigt die Frequenz beim Beobachter.
- Bewegen sich der Sender und der Beobachter voneinander weg, so sinkt die Frequenz beim Beobachter.

Beispiel (6.10)

Ein Motorrad S fährt mit der Geschwindigkeit 40 m/s = const und gibt einen konstanten Ton ($f = 240$ Hz) von sich. Am Straßenrand vor dem Motorrad steht in einiger Entfernung ein ruhender Beobachter B. Außerdem fährt dem Motorrad ein Fahrradfahrer F mit der Geschwindigkeit 5 m/s entgegen.



a) Bestimmen Sie die Frequenz des Tons, den B hört!
b) Bestimmen Sie die Frequenz des Tons, den F hört!
c) Wie groß ist die Wellenlänge des Tons in der (ruhenden) Luft?

Lösung

Sender = Motorrad $v_S = 40$ m/s
das Medium ist Luft: Schallgeschwindigkeit $c = 330$ m/s
a) Doppler Effekt I (bewegter Sender, ruhender Beobachter), $v_B = 0$

$$f_B = f_S \cdot \frac{c}{c - v_S} = 240 \cdot \frac{330}{330 - 40} = 273,1\,\mathrm{H}z$$

b) Kombination (bewegter Sender, bewegter Beobachter), $v_B = 5$ m/s

$$f_B = f_S \cdot \frac{c + v_B}{c - v_S} = 240 \cdot \frac{330 + 5}{330 - 40} = 268,9\,\mathrm{H}z$$

c) Die Wellenlänge im Medium ist dieselbe wie für den ruhenden Beobachter

$$\lambda = \frac{c}{f_B} = \frac{330}{273,1} = 1,2\,\mathrm{m}$$

In dieser Formel zeigen alle drei Geschwindigkeiten c, v_B und v_S in dieselbe Richtung, zum Beispiel nach rechts. Wenn eine dieser Geschwindigkeit in Gegenrichtung geht, dann bekommt sie ein zusätzliches negatives Vorzeichen.

6.10 Energie, Leistung und Intensität von Wellen

Energie einer Welle

Nur Wellen, die einen Anfang und ein Ende haben, haben auch eine bestimmte Energie. Diese ist eine gute Information über die "Stärke" der Welle. Bei Wellen, die unendlich weit ausbreitet sind, ist es nicht sinnvoll von Energie zu sprechen.
Das wichtigste Beispiel für Wellen mit Anfang und Ende sind stehende Wellen.

Eine stehende Welle hat eine bestimmte Energie. Diese ist die Energie, die am Anfang dem schwingenden System zugeführt wurde.

Leistung einer Welle

Die Leistung P einer Welle ist die Energie E, die der Sender dem schwingenden System pro Sekunde zuführt.

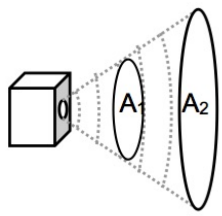
$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} \tag{6.29}$$

Bei einer Welle ohne Reibungsverluste ist die gesamte Leistung durch jeden Wellenquerschnitt gleich.

Ein Finger, der dauernd periodisch ins Wasser taucht und damit eine Welle erzeugt, führt dem System dauernd Energie zu. Wenn wir wissen wollen, wie stark die entstehende Welle ist, müssen wir wissen, wieviel Energie der Finger (=Sender oder Erreger) pro Sekunde dem System zuführt. Das ist die Leistung.
Die Leistung einer Welle ist eine gute Information, wie stark ihr Sender ist und wie stark die gesamte Welle ist.

Beispiel (6.11)

Ein Lautsprecher (Erreger) erzeugt Luftschwingungen (Schallwellen) und führt dabei pro Sekunde der umgebenden Luft 50 J Energie zu. Wieviel Energie geht pro Sekunde durch die beiden Wellenquerschnitte A_1 und A_2?



Lösung

Wenn es keine Reibungsverluste gibt, so gehen pro Sekunde wieder 50 J durch den Querschnitt A_1 und 50 J durch den Querschnitt A_2.

Intensität einer Welle

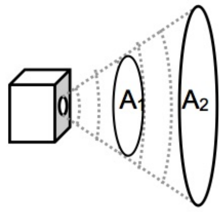
Die Intensität S einer Welle an einem bestimmten Ort ist die Energie ΔE, die dort pro Zeit Δt durch den Querschnitt A transportiert wird. Die Intensität entspricht daher auch der Leistung P pro Fläche A.

$$S = \frac{\Delta E}{\Delta t \cdot A} = \frac{P}{A} \tag{6.30}$$

Einheit: $[S] = [\frac{P}{A}] = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s \cdot m}^2}$

Die Intensität informiert uns darüber, wie stark eine Welle an einem bestimmten Ort wirkt, die Leistung informiert uns über die Stärke der gesamten Welle.

Beispiel (6.12)
Ein Lautsprecher (Erreger) erzeugt Luftschwingungen (Schallwellen) und führt dabei pro Sekunde der umgebenden Luft 50 J Energie zu. Wie groß ist die Intensität der Welle auf den Flächen $A_1 = 2\ \mathrm{m}^2$ und $A_2 = 8\ \mathrm{m}^2$?



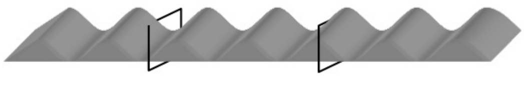
Lösung
Die Leistung durch beide Flächen ist gleich groß $P_1 = P_2 = P = 50$ W, aber die Welle ist dort nicht gleich stark.

$$S_1 = \frac{P}{A_1} = \frac{50}{2} = 25\,\mathrm{W}/m^2 \tag{6.31}$$
$$S_2 = \frac{P}{A_2} = \frac{50}{8} = 6,25\,\mathrm{W}/m^2 \tag{6.32}$$
$$\tag{6.33}$$

Abhängigkeit der Intensität vom Abstand

Ebene Wellen: Eine ebene Welle wird nicht breiter, die beiden Querschnitte sind gleich groß, $A_1 = A_2 = A$. Die Intensität ist auf beiden Flächen gleich groß und verändert sich nicht.

$$S = \frac{P}{A} = const \tag{6.34}$$



Die Intensität einer ebenen Welle ist unabhängig vom Abstand vom Sender.

Kreiswellen: Eine Kreiswelle breitet sich von einem punktförmigen Zentrum in 2 Dimensionen aus. Für die Fläche A kann man einen Kreis mit Radius r annehmen, sodass der Querschnitt gleich dem Umfang des Kreises ist $A = 2\pi \cdot r$ und damit ergibt sich

$$S = \frac{P}{A} = \frac{P}{2\pi \cdot r} = \frac{const}{r} \tag{6.35}$$

Die Intensität einer Kreiswelle ist umgekehrt proportional zum Abstand vom Sender.

Kugelwellen: Eine Kugelwelle breitet sich von einem punktförmigen Zentrum in 3 Dimensionen aus. Für die Fläche A nimmt man Kugelschalen mit Radius r an, sodass $A = 4\pi \cdot r^2$ und damit ergibt sich

$$S = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi \cdot r^2} = \frac{const}{r^2} \tag{6.36}$$

Die Intensität einer Kugelwelle ist umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes vom Sender.

Energiedichte einer Welle

Die Energiedichte ρ_E einer Welle ist die Energie E, die pro Volumen V durch die Welle transportiert wird.

$$\rho_E = \frac{E}{V} \tag{6.37}$$

Einheit: $[\rho_E] = [\frac{E}{V}] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}$

Es gelten folgende Zusammenhänge:
Intensität = Energiedichte mal Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$S = \rho_E \cdot c \tag{6.38}$$

Leistung = Energiedichte mal Ausbereitungsgeschwindigkeit mal Querschnitt

$$P = \rho_E \cdot c \cdot A = S \cdot A \tag{6.39}$$

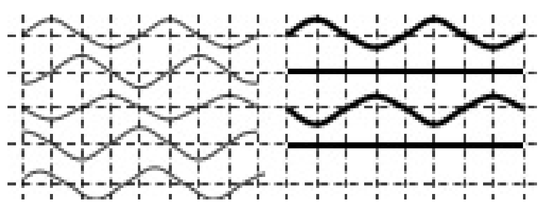
Beispiel (6.13)
Eine Welle transportiert pro Kubikmeter die Energie von 30 J. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit beträgt $c = 4$ m/s.
a) Berechnen Sie die Intensität der Welle!
b) Berechnen Sie die Leistung der Welle durch den Querschnitt $A = 6$ m^2!

Lösung
Die Energiedichte ist $\rho_E = 30$ J/m^3.
a) Die Intensität ist $S = \rho_E \cdot c = 30 \cdot 4 = 120$ W/m^2.
b) Die Leistung der Welle ist $P = \rho_E \cdot c \cdot A = S \cdot A = 120 \cdot 6 = 720$ W

6.11 Aufgaben

Laufende Wellen – stehende Wellen

(6.1) Die Abbildung zeigt eine laufende und eine stehende Welle. Beide Wellen werden zu verschiedenen Zeitpunkten abgebildet. Das rechte Bild und das linke Bild gelten immer für denselben Zeitpunkt. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit beträgt $c = 6$ m/s.
a) Welche ist die stehende und welche ist die laufende Welle?



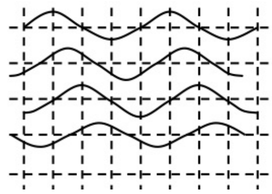
b) Für die beiden obersten Wellen gilt $t = 0$. Für die zweite Zeile gilt $t = 1$ s. Wie sieht das unterste

Bild rechts aus? Für welchen Zeitpunkt gilt es?
c) Berechnen Sie die Periode T, die Frequenz f und die Wellenlänge λ!

(6.2) Gegeben ist eine laufende Welle. Ein Wellenberg hat die Länge 5 cm und verwandelt sich in 2 s in ein Tal.
Berechnen Sie f, c und λ!

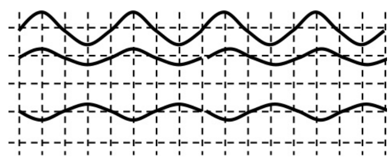
(6.3) Eine laufende Welle breitet sich mit 3 m/s von einem Punkt aus, der zur Zeit $t = 0$ die Auslenkung 0 hat. Die Auslenkung an diesem Punkt steigt dann innerhalb einer Sekunde bis auf den Maximalwert von 10 cm an.
Berechnen Sie die Periodendauer, die Frequenz und die Wellenlänge der Welle!

(6.4) a) Zeigt die Abbildung eine laufende oder eine stehende Welle?
b) Die Länge eines Kästchens beträgt 3 m und der Zeitunterschied zwischen den ersten beiden Zeilen beträgt 0,1 s.
Bestimmen Sie λ, c und f!

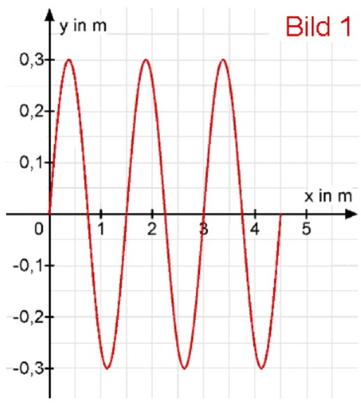


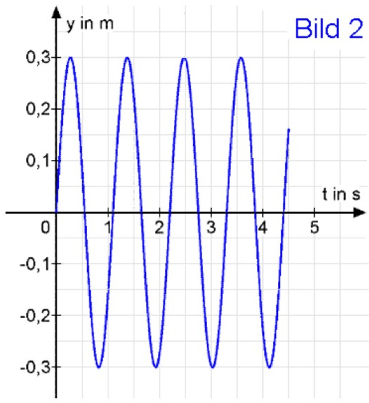
(6.5) Bei einer stehenden Welle ist der Abstand zwischen einem Knoten und einem Bauch gleich 4 cm. Außerdem ist alle 0,1 s keine Welle zu sehen.
Bestimmen Sie λ, c und f!

(6.6) a) Zeigt die Abbildung eine laufende oder eine stehende Welle?
b) Die Länge eines Kästchens beträgt 3 m und der Zeitunterschied zwischen den ersten beiden Zeilen beträgt 0,1 s.
Bestimmen Sie λ, c und f!



(6.7) Mit Hilfe eines Seils lässt sich sehr einfach eine Transversalwelle erzeugen. Die beiden Bilder zeigen zum einen die Momentaufnahme der Seilwelle und zum anderen den Verlauf der Schwingung eines "Seilteilchens".





a) Geben Sie an, welches der beiden Bilder die Momentaufnahme der Welle ist und welches die Schwingung eines Seilteilchens darstellt, und begründen Sie Ihre Entscheidung!
b) Bestimmen Sie aus den Bildern die Amplitude, die Frequenz, die Schwingungsdauer und die Wellenlänge der Seilwelle!
c) Bestimmen Sie die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Seilwelle!
d) Angenommen Sie würden nur das Bild 1 der Welle kennen. Geben Sie einen Grund an, warum Sie mit diesem Bild sofort die Behauptung "Bild 1 stellt eine hörbare Schallwelle in Luft dar" widerlegen könnten!

(6.8) In einem See beobachten Sie den Wellengang. In einer Minute zählen Sie 10 Wellen, die Sie erreichen. Der Abstand von zwei Wellenbergen beträgt etwa 12m. Wie groß ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen?

(6.9) a) Macht jeder Punkt einer laufenden Welle eine volle Schwingung oder gibt es Punkte die nicht schwingen?
b) Was können sie über die Schwingungsrichtung und die Ausbreitungsrichtung bei Transversalwellen und bei Longitudinalwellen sagen?
c) Erzeugt ein Musikinstrument in der Luft Transversalwellen?

(6.10) a) Gegeben ist eine Welle, bei der manche Punkte sehr stark schwingen und die Punkte in ihrer Umgebung gleichphasig aber schwächer mitschwingen. andere Punkte schwingen überhaupt nicht. Wie heißt eine solche Welle und wie entsteht sie?
b) Wie heißt eine Welle, bei der die Schwingungsrichtung parallel zur Ausbreitungsrichtung ist?

(6.11) Jemand sagt: "Ich sehe, wie sich die Berge und Täler einer Wasserwelle nach rechts bewegen. Daher bewegt sich auch das Wasser nach rechts". Hat er recht?

Interferenz

(6.12) Gegeben sind zwei Wellen mit gleicher Wellenlänge $\lambda = 12$ m und der Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = 3$ m/s. Die zweite Welle läuft um 1,5 m hinter der ersten Welle.
a) Wie groß ist der Zeitunterschied der beiden Wellen?
b) Wie groß ist der Phasenunterschied der beiden Wellen?

(6.13) Gegeben sind zwei Wellen mit gleicher Wellenlänge $\lambda = 25$ m und der Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = 5$ m/s. Die zweite Welle läuft um $0,5$ Sekunde hinter der ersten Welle.
a) Wie groß ist der Wegunterschied der beiden Wellen?
b) Wie groß ist der Phasenunterschied der beiden Wellen?

(6.14) Zwei Wellen haben die gleiche Wellenlänge $\lambda = 9$ m , eine Längenverschiebung von 1m und gleiche Amplitude $y_0 = 0,5$ m.
a) Bestimmen Sie die Phasendifferenz, die Zeitdifferenz zwischen den beiden Wellen!
b) Welche Amplitude und welche Phasenverschiebung hat die Welle, die durch Interferenz der beiden gegebenen Wellen entsteht?

(6.15) Von zwei Wellen mit gleicher Wellenlänge hat die zweite eine größere Amplitude als die erste und eine Phasenverschiebung von 45°.
Wieviel mal größer muß die zweite Amplitude im Vergleich zur ersten sein, damit die Amplitude der Interferenzwelle doppelt so groß wie bei der ersten Welle ist?

Stehende Wellen

(6.16) Draht aus Kunststoff ist $\frac{1}{2}$ m lang und zwischen zwei festen Enden eingespannt. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen bei dieser Spannung ist $c = 10$ m/s.
Können in diesem Draht stehende Wellen mit 50Hz entstehen?
Wenn ja, welche Oberschwingung ist das?

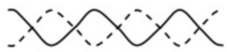
(6.17) Ein Lineal (Länge $l = 30$ cm) aus Kunststoff ist an einem Ende am Tisch festgemacht. Das andere Ende kann frei schwingen. Die Grundschwingung ist nicht gut zu sehen. Aber man beobachtet die erste Oberschwingung und mißt 25 Hz.
Wie groß die Ausbreitungsgeschwindigkeit in diesem Kunststoff?

(6.18) Ein Kunststofflineal ($l = 30$ cm) wird an einem Ende mit dem Daumen am Tisch festgehalten und das freie Ende in Schwingung versetzt. Man kann die Grundschwingung und die zweite

Oberschwingung sehen.
a) Machen Sie eine Skizze von diesen beiden Schwingungen!
b) Die Frequenz der Grundschwingung sei 5 Hz. Berechnen Sie die Frequenz der sichtbaren Oberschwingung und die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen in diesem Lineal!

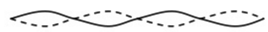
(6.19) Ein schwingendes Lineal mit der Länge $l = 50$ cm ist nur an einem Ende fest eingespannt. Können stehende Wellen mit der Wellenlänge von 20 cm entstehen? Wenn ja, welche Oberschwingung ist das?

(6.20) Die abgebildete stehende Welle ist 10 m lang, die Frequenz beträgt 4 Hz.
a) Bestimmen Sie die Wellenlänge und Ausbreitungsgeschwindigkeit!
b) Welche Oberschwingung ist zu sehen und wie groß ist die Frequenz der Grundschwingung?



(6.21) Die abgebildete stehende Welle ist 16,5 m lang, die Frequenz beträgt 22 Hz.
a) Bestimmen Sie die Wellenlänge und Ausbreitungsgeschwindigkeit!
b) Welche Oberschwingung ist zu sehen und wie groß ist die Frequenz der Grundschwingung?

(6.22) Die abgebildete stehende Welle ist 80 cm lang, die Frequenz beträgt 100 Hz.
a) Bestimmen Sie die Wellenlänge und Ausbreitungsgeschwindigkeit!
b) Welche Oberschwingung ist zu sehen und wie groß ist die Frequenz der Grundschwingung?



(6.23) Warum kann in einem 1m langen gespannten Draht keine stehende Welle mit $\lambda = 30$ cm entstehen?

(6.24) Ein schwingendes Lineal $l = 50$ cm ist nur an einem Ende fest eingespannt. Können stehende Wellen mit $\lambda = 20$ cm entstehen? Wenn ja, welche Oberschwingung ist das?

(6.25) a) Was geschieht bei der Reflexion eines Wellenberges an eine festen Ende? Wie ist das beim freien Ende?
b) Muß man Oberschwingungen erzeugen oder entstehen sie von selbst?
c) Wie hängt die Ausbreitungsgeschwindigkeit von der Wellenlänge und der Frequenz ab?

(6.26) a) Was entsteht, wenn sich zwei Wellen mit gleicher Wellenlänge, gleicher Amplitude aber entgegengesetzter Ausbreitungsgeschwindigkeit überlagern?
b) Was entsteht, wenn sich zwei Wellen mit gleicher Wellenlänge und gleicher Ausbreitungsgeschwindigkeit überlagern?

(6.27) Die Länge einer Orgelpfeife beträgt $l = 2$ m. Die Orgelpfeife ist am unteren Ende offen und am oberen Ende geschlossen.
a) Welche Frequenz besitzt der Grundton der Orgelpfeife?
b) Welche Frequenz besitzt der erste Oberton?
c) Wie ändert sich die Tonhöhe des Grundtons der Orgelpfeife, wenn das obere Ende ebenfalls offen ist?

Schallwellen

(6.28) An der Innenwand eines Glasrohrs der Länge $l = 46,2$ cm ist Korkstaub fein verteilt. Sobald man mit einem Lautsprecher einen bestimmten Ton erzeugt, sammelt sich dieser Korkstaub an ganz bestimmten Stellen des Rohrs und zwar: vom Anfang gezählt nach 6,6 cm, nach 19,8 cm, nach 33 cm und am Ende des Rohrs.
a) Was entsteht im Rohr und warum sammelt sich der Korkstaub an diesen Stellen?
b) Berechnen Sie die Frequenz des entstehenden Tons!

(6.29) In einem Kundt'schen Rohr (Länge $l = 35$ cm) sieht man Staubfiguren nach 5 cm, nach 15 cm, nach 25 cm und nach 35 cm.
a) Welche Art von Wellen entsteht im Rohr und an welchen Stellen sammelt sich der Staub?
b) Wie viele offenen Enden hat das Rohr und die wievielte Oberschwingung sieht man?
c) Bestimmen S ie die Frequenz dieser Oberschwingung und die Frequenz der zugehörigen Grundschwingung!

(6.30) In einem Kundt'schen Rohr (Länge $l = 24$ cm) sieht man Staubfiguren nach 6 cm und nach 18 cm.
a) Welche Art von Wellen entsteht im Rohr und an welchen Stellen sammelt sich der Staub?
b) Wie viele offenen Enden hat das Rohr und die wievielte Oberschwingung sieht man?
c) Bestimmen sie die Frequenz dieser Oberschwingung und die Frequenz der zugehörigen Grundschwingung!

(6.31) In einem Kundt'schen Rohr (Länge $l = 20$ cm) sieht man Staubfiguren am Anfang, nach 5 cm, nach 10 cm, nach 15 cm und am Ende.
a) Welche Art von Wellen entsteht im Rohr und an welchen Stellen sammelt sich der Staub?
b) Wie viele offenen Enden hat das Rohr und die wievielte Oberschwingung sieht man?
c) Bestimmen Sie die Frequenz dieser Oberschwingung und die Frequenz der zugehörigen Grundschwingung!

(6.32) a) In welche Richtung schwingen die Luftmoleküle bei einer Schallwelle?
b) Wo sammelt sich der Staub im Rohr von Kundt.? wozu dient dieses Rohr?

(6.33) a) Wieviel Staubfiguren erzeugt die Grundschwingung in einem beidseitig offenen Kundt'schen Rohr?
b) Wieviel Staubfiguren erzeugt die Grundschwingung in einem einseitig offenen Rohr?
c) Wieviel Staubfiguren erzeugt die Grundschwingung in einem beidseitig geschlossenen Rohr?

Schwebung

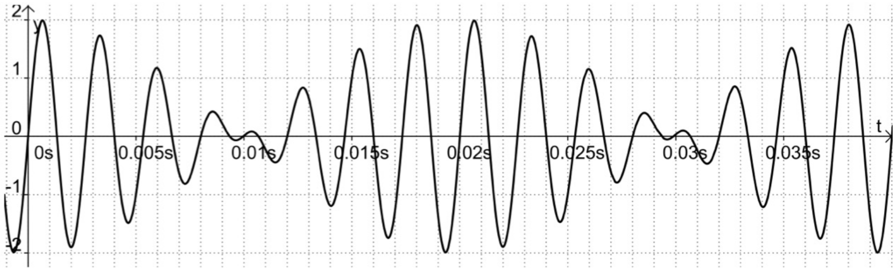
(6.34) Zwei Musikinstrumente spielen einen fast gleich hohen Ton. Der entstehende neue Ton wird jede halbe Sekunde besonders laut und schwillt dann wieder ab. Der tiefere Ton hat die Wellenlänge $\lambda_1 = 1$ m.
Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der resultierenden Welle!
Berechnen Sie die Wellenlänge λ_2!

(6.35) Zwei Musikinstrumente spielen zwei Töne mit den Wellenlängen $\lambda_1 = 0,5$ m und $\lambda_2 = 0,51$ m.
Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der resultierenden Welle!
In welchen Zeitabständen hört man die Impulse der Schwebung?

(6.36) a) Was entsteht bei der überlagerung von zwei Wellen mit gleicher Wellenlänge und gleicher Ausbreitungsgeschwindigkeit?

b) Was entsteht bei der überlagerung von zwei Wellen mit gleicher Wellenlänge und entgegengesetzter Ausbreitungsgeschwindigkeit?
c) Was entsteht bei der überlagerung von zwei Wellen mit fast gleicher Wellenlänge und gleicher Ausbreitungsgeschwindigkeit?

(6.37) Im unteren Diagramm ist das Ergebnis der überlagerung zweier Schwingungen mit den Frequenzen f_1 und f_2 gezeichnet.
Bestimmen Sie diese beiden Frequenzen!



(6.38) Zwei Lautsprecher senden Töne mit den Frequenzen $f_1 = 870$ Hz und der unbekannten Frequenz f_2 aus. Es wird eine Schwebung der Frequenz $f_{Schwebung} = 4$ Hz gemessen.
Berechnen Sie alle möglichen Werte der Frequenz f_2!

(6.39) Bei einer Schwebung beträgt der Abstand zweier Impulse mit maximaler Lautstärke 0,5 Sekunden. Wie groß ist die Frequenz des zweiten Tons, wenn der erste eine Frequenz von 440 Hz besitzt?

Doppler Effekt

(6.40) Ein Rettungsauto erzeugt einen Ton mit der Frequenz 400 Hz. Es fährt einem ruhenden Beobachter mit 30 m/s entgegen. Welche Frequenz hört dieser?

(6.41) In einem See gibt es Wasserwellen mit der Frequenz $f = 0,5$ Hz und der Wellenlänge $\lambda = 4$ m. Ein Schnellboot fährt diesen Wellen mit 18 m/s entgegen. Mit welcher Frequenz klatschen die Wellenberge gegen das Boot?

(6.42) Ein Rettungsauto erzeugt einen Ton mit der Frequenz 720 Hz. Ein Beobachter, der hinter dem Auto im Medium Luft ruht, hört aber nur 660 Hz. Wie schnell fährt das Auto?

(6.43) Ein Rettungsauto fährt mit unbekannter Geschwindigkeit $v = const$ und erzeugt einen Ton unbekannter Frequenz. Ein ruhender Beobachter hinter dem Auto hört die Frequenz 495 Hz. Ein anderer ruhender Beobachter vor dem Auto hört 594 Hz. Wie schnell fährt das Auto?

Energie, Leistung, Intensität

(6.44) Ein Lautsprecher strahlt pro Sekunde 40 J in Form einer Kugelwelle aus.
a) Wieviel Joule gehen pro Sekunde durch eine Kugelfläche mit Abstand $r = 10$ m?
b) Wieviel Joule gehen pro Sekunde durch eine Kugelfläche mit Abstand $r = 20$ m?
c) Wie groß sind die Intensitäten auf diesen Kugelflächen?

(6.45) Eine Wasserwelle breitet sich kreisförmig aus und hat im Abstand $r = 2$ m die Intensität $S = 0,04$ W/m^2.
a) Wie groß ist die Intensität im Abstand von 4 m?
b) Wie groß ist die Intensität im Abstand von 2 cm?

(6.46) Ein Lautsprecher erzeugt eine Kugelwelle mit der Leistung $P = 100$ W. Die öffnung des menschlichen Ohrs hat die Fläche $A = 1$ cm^2. Eine Person steht 2 m vom Lautsprecher entfernt.
a) Wie groß ist dort die Intensität der Welle?
b) Wie groß ist dort die Energiedichte?
c) Welche Leistung dringt in das Ohr?

7 Der Aufbau der Materie

Die gesamte Materie ist aus Atomen und deren Verbindungen aufgebaut. Es gibt sehr viele verschiedene Atomsorten, die alle im Periodensystem der Elemente aufgelistet und nach ihren Eigenschaften angeordnet sind.
Es stellt sich heraus, dass alle Atome einen gleichen inneren Aufbau haben, der sich aus Atomhülle und Atomkern zusammensetzt.

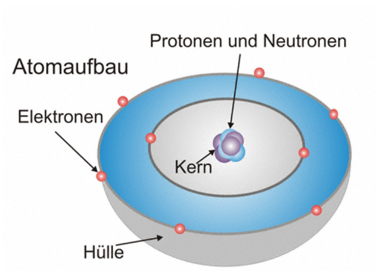
7.1 Die Kräfte in der Natur

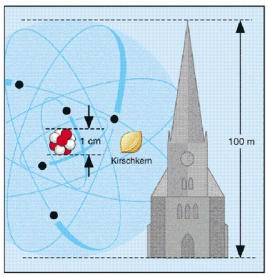
Die moderne Physik kennt vier Arten von grundlegenden Kräften: Gravitationskraft, Elektrische Kräft, schwache Kernkraft und starke Kernkraft.
Schwache und starke Kernkraft wirken nur innerhalb des Atomkerns und werden im Rahmen dieser Vorlesung nicht behandelt. Gravitationskräfte wirken (anziehend) zwischen Massen. Elektrische Kräfte können anziehend und abstoßend sein, und sind die dominierenden Kräfte zwischen den Atomen.

7.2 Der Aufbau des Atoms

Der Atomkern

Er befindet sich in der Mitte des Atoms und besteht aus positiv geladenen Teilchen, den Protonen p^+, und elektrisch neutralen Teilchen, den Neutronen n. Beide Teilchen haben ungefähr dieselbe Masse $m_p = m_n = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg. Die Größe des Atomkerns ist sehr klein und beträgt ungefähr 10^{-15} m.





Die Atomhülle

Die Hülle umgibt den Kern in vergleichsweise großer Entfernung. Sie besteht aus negativ geladenen Teilchen, den Elektronen e^-. Ihre Masse ist ungefähr 1800 mal kleiner als die Masse von Protonen oder Neutronen und beträgt $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg. Die Größe der Hülle beträgt ungefähr 10^{-10} m. Man kann auch noch äußere und innere Hülle unterscheiden, da nicht alle Elektronen gleich weit vom Kern entfernt sind.

Die Elementarladung

Die Ladung von Protonen und Elektronen ist entgegengesetzt aber gleich groß und heißt Elementarladung q_e. Die Größe der Elementarladung beträgt $q_e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C. (1C = 1 Coulomb ist die Einheit der Ladung). Es gilt: $Q_{p^+} = -Q_{e^-} = q_e$.

Die Unterscheidung der Elemente

Die verschiedene Elemente unterscheiden sich durch die Anzahl der Protonen im Kern.
Wasserstoff hat immer 1 Proton, Helium hat 2 Protonen, Sauerstoff hat 8 Protonen, Uran hat 92 Protonen.

Die Anzahl der Neutronen im Kern ist nicht festgelegt. Alle Elemente mit gleicher Protonenzahl aber verschiedener Neutronenzahl nennt man Isotope eines Elements.

Vom Wasserstoff gibt es 3 bekannte Isotope: 1 Proton und kein Neutron: normaler Wasserstoff, 1 Proton und 1 Neutron: schwerer Wasserstoff (Deuterium), 1 Proton und 2 Neutronen: überschwerer Wasserstoff (Tritium).

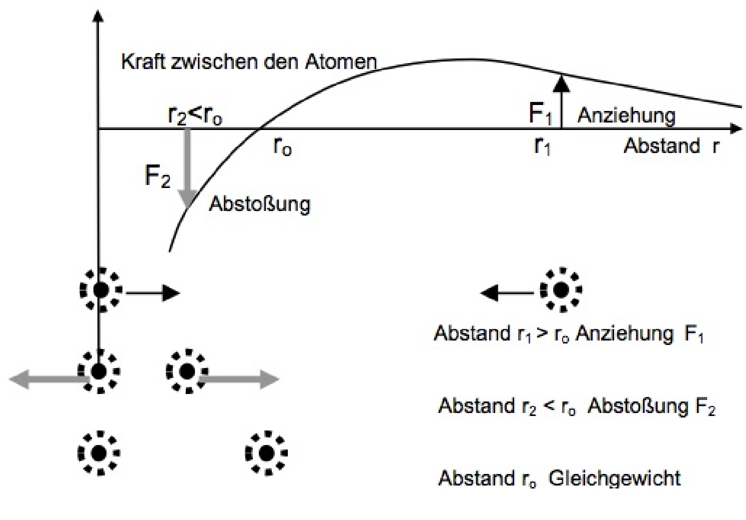
Elektrisch neutrale Atome

Atome sind im allgemeinen elektrisch neutral, das heißt die Anzahl ihrer Protonen im Kern ist gleich der Anzahl ihrer Elektronen in der Hülle. Die Elektronen sind in verschiedenen Hüllen angeordnet, die ihre chemischen Eigenschaften bestimmen.
Wasserstoff hat 1 Proton und 1 Elektron, Sauerstoff hat 8 Protonen und 8 Elektronen, Uran hat 92 Protonen und 92 Elektronen.

Die Messung von Ladung und Masse der Teilchen und die Messung der Ausdehnung von Hülle und Kern

Bewegte Ladungen werden in Magnetfeldern abgelenkt. Aus der Art der Ablenkung kann man zusammen mit anderen Daten die Masse, Geschwindigkeit und Ladung von Protonen und Elektronen bestimmen, die durch magnetische und elektrische Felder geschossen werden. Genaueres erfahren wir in der Elektrizitätslehre.
Der englische Physiker Ernest Rutherford hat zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts Strahlen geladener Teilchen durch extrem dünne Metallfolien geschossen. Dabei wurden die Strahlen je nach Masse und Geschwindigkeit der geschossenen Teilchen um bestimmte Winkel abgelenkt. Aus diesen Ablenkungswinkeln konnte man auf die Größe von Hülle und Kern schließen.

7.3 Die Kräfte zwischen den Atomen



Zwischen zwei Atomen wirken hauptsächlich elektrische Kräfte. Zwischen den beiden Kernen herrscht Abstoßung, zwischen den beiden Hüllen gibt es auch Abstoßung, aber zwischen dem Kern des einen Atoms und der Hülle des anderen Atoms herrscht Anziehung.
Es stellt sich heraus, dass bei großem Abstand der Atome die Anziehungskraft überwiegt. Hingegen bei kleinem Abstand der Atome dominiert die Abstoßungskraft. Es gibt immer einen sogenannten Gleichgewichtsabstand r_0, bei dem die Atome sich weder anziehen noch abstoßen. Bei diesem Abstand besitzt das gesamte System die minimalste Energie und ist daher stabil. Man sagt, das System befindet sich im Gleichgewicht.
Das Diagramm zeigt die Kräfte zwischen den Atomen in Abhängigkeit von ihrem Abstand. Diese überlegungen gelten nicht nur für Atome, sondern auch für Moleküle (Verbindungen von 2 oder mehreren Atomen).

Im atomaren Bereich werden Energien meist nicht in Joule sondern in der Einheit Elektronenvolt gemessen. Es gilt: 1 Elektronenvolt = $1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ J.

7.4 Aufgaben

(7.1) Wiederholen Sie die Definition der Energieeinheit 1 eV!

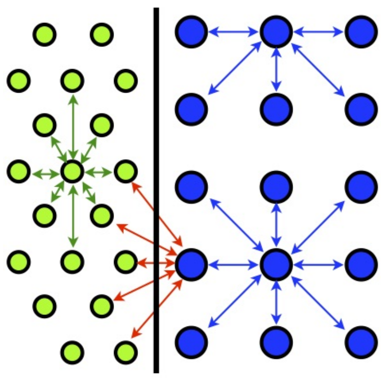
(7.2) Aus welchen Teilchen besteht der Atomkern und aus welchen besteht die Hülle?

(7.3) Vergleichen sie Massen und Ladungen von Protonen, Neutronen und Elektronen!

(7.4) Vergleichen sie den Durchmesser von Hülle und Kern! Wie kann man diese Größen messen?

8 Die Kräfte in ruhenden Flüssigkeiten

8.1 Die Kohäsion und die Adhäsion



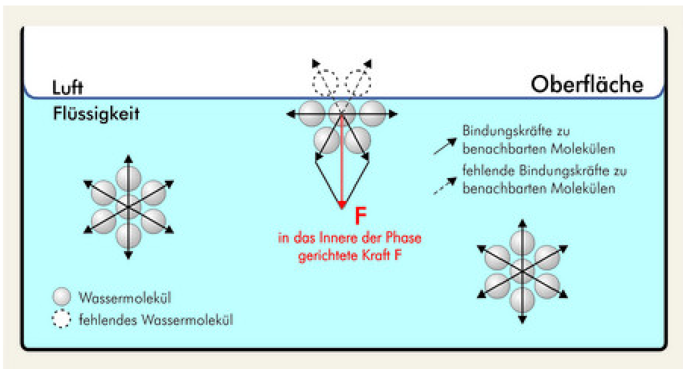
Wir betrachten im folgenden Flüssigkeiten, die aus Teilchen (meist Molekülen) bestehen, die leicht gegeneinander verschiebbar sind. Die Flüssigkeit befindet sich in einem Gefäß (Behälter), den wir uns auch aus Teilchen bestehend vorstellen.
Als einfaches Beispiel denken wir uns Wasser in einem Glas. Zwischen den Teilchen des Wassers gibt es Kräfte (blaue Pfeile in der Abbildung), aber auch zwischen den Teilchen des Glases (grüne Pfeile). Diese bewirken den inneren Zusammenhalt des Materials. Die Teilchen befinden sich jeweils im Gleichgewichtsabstand, der für das jeweilige Material charakteristisch ist. Diese Kräfte nennt man Kohäsionskräfte oder einfach nur Kohäsion. Es gibt aber auch Kräft zischen den Wasser und deen Glasteilchen (rote Pfeile), die wir Adhäsionskräfte oder Adhäsion nennen.
Für jede Kraft in eine bestimmte Richtung gibt es eine gleich große Kraft genau in die Gegenrichtung.

Kräfte zwischen gleichartigen Teilchen nennt man Kohäsionskräfte. Kräfte zwischen ungleichartigen Teilchen nennt man Adhäsionskräfte.

8.2 Die Oberflächenspannung

8.2.1 Die Resultierenden Kräfte in einer Flüssigkeit

Wir betrachten jetzt nur die Kohäsionskräfte in einer Flüssigkeit. Wir können dabei zwei Situationen unterscheiden:



- Teilchen im Inneren der Flüssigkeit:
  Im Inneren einer Flüssigkeit wird jedes Teilchen aus allen Richtungen von anderen Teilchen angezogen. Die Koähsionskräfte verteilen sich auf alle Richtungen gleichmäßig. Für jede Kraft in eine bestimmte Richtung gibt es eine gleich große Kraft genau in Gegenrichtung.
  Die Kohäsionskräfte auf ein Teilchen im Inneren der Flüssigkeit heben sich auf. Es wirkt keine resultierende Kraft, das Teilchen bleibt in Ruhe.

- Teilchen an der Oberfläche der Flüssigkeit:
  An der Oberfläche fehlen bei jedem Teilchen die Kräfte welche nach außen zeigen. Die Summe aller Kräfte auf ein Teilchen ist daher nicht gleich Null, sondern es gibt eine resultierende Kraft, die in das Innere der Flüssigkeit zeigt. Die Teilchen an der Oberfläche bewegen sich in Innere der Flüssigkeit.

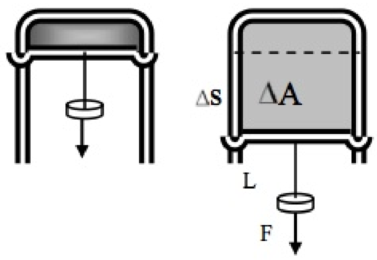
An der Oberfläche haben die Teilchen einen größeren Abstand als im Inneren der Flüssigkeit. Dadurch wirken anziehende Kräfte zwischen ihnen, die den Abstand wieder verringern wollen. Die Teilchen sind gegen die Anziehungkräfte (wie gegen eine Feder gespannt) verschoben und haben daher große potentielle Energie.

Dies führt zu folgenden Eigenschaften:

- möglichst viele Teilchen streben von der Oberfläche ins Innere der Flüssigkeit, wenige Teilchen bleiben an der Oberfläche zurück
- Teilchen an der Oberfläche haben sie einen größeren Abstand, die Teilchendichte an der Oberfläche ist kleiner als im Inneren
- Teilchen an der Oberlfäche haben mehr potentielle Energie als Teilchen im Inneren
- die Oberfläche versucht sich zu verkleinern, dadurch eintsteh eine Krümmung der Oberfläche nach innen

8.2.2 Die Oberflächenspannung

Die Abbildung zeigt einen "Drahtbügel" mit einem horizontalen Verbindungsstück der Länge L, welches man in vertikaler Richtung bewegen kann. Zwischen Bügel und Verbindungsstück wird ein Tropfen einer Flüssigkeit eingebracht, welcher durch ein kleines Gewicht (Kraft $F = m \cdot g$) zu einer "Flüssigkeitshaut" so weit auseinandergezogen wird bis die Summe aller Anziehungskräfte der Oberfläche gleich F ist. Es zeigt sich, dass die Kraft F nur von der Länge L und der der Art der Flüssigkeit abhängt, aber nicht von der Ausdehnung Δs.



Es gilt also folgender Zusammenhang:

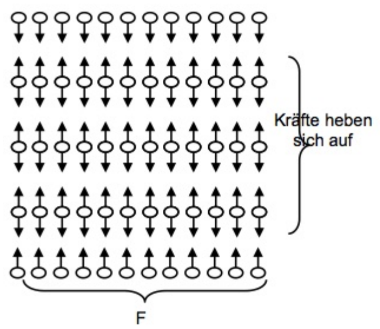
$$F = \sigma \cdot L \tag{8.1}$$

wobei F die Normalkraft auf den Rand der Flüssigkeitshaut ist und L die Länge des Randes. Die Konstante σ nennt man Oberflächenspannung, die ist eine Materialkonstante.
In den meisten Fällen bildet sich aber keine monomolekulare Haut (= Schicht mit Breite eines Molküldurchmessers) sondern ein Flüssigkeitsvolumen mit zwei Begrenzungen ("Aussenhäuten"). In diesem Fall gilt der Zusammenhang:

$$F = 2 \cdot \sigma \cdot L \tag{8.2}$$

Einheit:
$[\sigma] = [\frac{F}{L}] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2}$

Die Kraft F hängt nur von den Anziehungskräften zwischen den Oberflächenmolekülen ab und nicht von den Kräfte im Inneren der Flüssigkeit, die sich gegenseitig aufheben. Darum ist die Kraft F auch nicht von Δs abhängig. Die Anziehungskräfte zwischen horizontalen "Zeilen" von Oberflächenmolekülen heben sich gegenseitig auf, so dass die Kraft F wirklich nur die Summen aller Anziehungkräfte zwischen der untersten Zeile und ihrer ersten Nachbarzeile mißt. Dashalb ist auch F nur proportional zur Länge L.



8.2.3 Die Oberflächenenergie

Bei der Erzeugung der Fläche ΔA ändert sich die potentielle Energie des Gewichtes:

$$\Delta E_{\text{pot}}^{gewicht} = -F \cdot \Delta s = -\sigma \cdot L \cdot \Delta s = -\sigma \cdot \Delta A$$

Umgekehrt ist in der Flüssigkeitshaut die potentielle Energie

$$\Delta E_{\text{pot}}^{\text{fl}} = +\sigma \cdot \Delta A$$

gespeichert. Diese Energie nennt man Oberflächenenergie. Bei zwei Häuten hat man die doppelte Fläche und daher auch die doppelte Oberflächenenergie. Allgemein gilt:

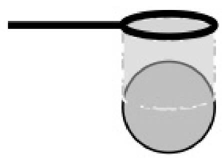
Oberflächenenergie = Oberflächenspannung mal Oberfläche

$$E_{oberfl} = \sigma \cdot A \tag{8.3}$$

Die Natur strebt Zustände mit möglichst kleiner potentieller Energie an (z. B. Körper fallen zu Boden, ausgedehnte Federn ziehen sich zusammen). Bei einer Flüssigkeit bewirkt dieses Prinzip, dass sich die Flüssigkeit so verformt, dass ihre Oberfläche und damit die Oberflächenenergie möglichst klein ist.

8.2.4 Die Messung der Oberflächenspannung mit der Bügelmethode

Ein Ring (auch Bügel genannt) wird in eine Flüssigkeit eingetaucht und dann langsam wieder herausgezogen. An dem Ring hängt dann ein Flüssigkeitstropfen, der durch eine Haut von ein oder zwei Oberflächenschichten gehalten wird. Die Anziehungskräfte zwischen zwei benachbarten (annähernd kreisförmigen) Teilchenreihen wirken dabei gegen die Schwerkraft. Wir nehmen an, dass der Bügel kreisförmig ist ($L = 2\pi \cdot r$) und der Tropfen kugelförmig ist ($m = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4\pi \cdot r^3}{3}$, mit der Dichte ρ) Es gilt:



$$\begin{aligned} F_g &= F_{oberfl} \\ m \cdot g &= \sigma \cdot L \\ \sigma &= \frac{m \cdot g}{L} = \frac{\rho \cdot 4\pi \cdot r^3 \cdot g}{3 \cdot 2\pi \cdot r} \end{aligned}$$

Die Oberflächenspannung ist gegeben durch

$$\sigma = \frac{2 \cdot \rho \cdot r^2 \cdot g}{3} \tag{8.4}$$

Die Formel ist allerdings nicht sehr genau, denn es kann sein, dass man mit diesem Experiment nicht die Kräfte zwischen den Teilchen der Flüssigkeitsoberfläche misst, sindern die Kräfte zwischen Metallring und Flüssigkeitsmolekülen. Eine genauere Behandlung ist schwierig.

8.3 Die Grenzflächenspannung

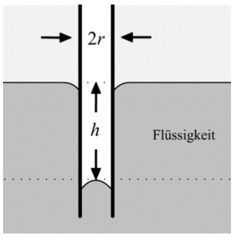
Die Oberfläche einer Flüssigkeit bildet die Grenze zwischen Flüssigkeit und Vakuum (ungenau auch zwischen Flüssigkeit und Luft oder anderen unproblematischen Gasen). An der Grenzfäche tritt eine Flüssigkeit mit einem anderen Körper (zum Beispiel einem Gefäß oder einer anderen Flüssigkeit) in Kontakt. Um das Verhalten der Flüssigkeit an der Grenzfläche zu bestimmen, muss man die Kohäsionskräfte (zwischen den Flüssigkeitsteilchen) mit den Adhäsionskräften (zwischen Flüssigkeit und anderem Körper (z.B. Gefäß) vergleichen.
Es gibt zwei Möglichkeiten:

- nicht benetzende Flüssigkeiten: die Kohäsionskräfte sind größer als die Adhäsionskräfte
- benetzende Flüssigkeiten: die Kohäsionskräfte sind kleiner als die Adhäsionskräfte

8.3.1 Nicht benetzende Flüssigkeiten

Die Kohäsinskräfte innerhalb der Flüssigkeit sind größer als die Adhäsionskrafte zwischen der Flüssigkeit und dem Gefäß. Dann zeigen die resultierenden Kräfte ins Innere der Flüssigkeit. Die Teilchen an der Grenzfläche verhalten sich sehr ähnlich zu Teilchen an der Oberfläche einer Flüssigkeit.
Eigenschaften:

- die Grenzfläche ist möglichst klein
- die Flüssigkeit krümmt sich von der Gefäßwand weg
- die Teilchen streben ins Innere der Flüssigkeit
- die Teilchen haben an der Grenzfläche einen größeren Abstand und eine kleiner Teilchendichte als im Inneren
- Grenzflächenspannung $\sigma_{grenz} > 0$
- Grenzflächenenergie W ist die Energie, die auf der Grenzfläche A gespeichert ist
  $E = \sigma_{grenz} \cdot A$
- Kapillarität:
  unter Kapillarität versteht man das Verhalten einer Flüssigkeit in einer Kapillare (= enges Rohr) die Flüssigkeitssäule nennt man Meniskus



Kapillardepression:
die Flüssigkeit sinkt in der Kapillare unter den Flüssigkeitsspiegel um den Wert h ab
negativer Meniskus, negative Steighöhe

Einheit:
$[\sigma_{grenz}] = [\frac{E}{A}] = \frac{J}{m^2} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$

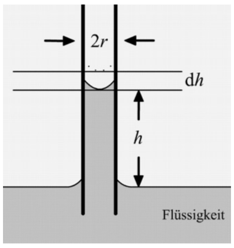
Beispiel: Quecksilber Hg
Das einzige bei Zimmertemperatur flüssige Metall ist eine nicht benetzende Flüssigkeit. Es stößt sich von Glaswänden ab. Die Kohäsionskräfte sind so stark, dass Hg auch am Boden (fast) kugelförmige Tropfen bildet. In engen Rohren wird die Flüssigkeit sogar unten den allgemeinen Flüssigkeitsspiegel gedrückt, um die Grenzfläche möglichst klein zu halten.

8.3.2 Benetzende Flüssigkeiten

Die Kohäsinskräfte innerhalb der Flüssigkeit sind kleiner als die Adhäsionskrafte zwischen der Flüssigkeit und dem Gefäß. Dann zeigen die resultierenden Kräfte in Richtung der Gefäßwand. Die Teilchen an der Grenzfläche verhalten sich umgekehrt wie Teilchen an der Oberfläche einer Flüssigkeit.
Eigenschaften:

- die Grenzfläche ist möglichst groß
- die Flüssigkeit krümmt sich zur Gefäßwand hin
- die Teilchen streben zur Grenzfläche hin

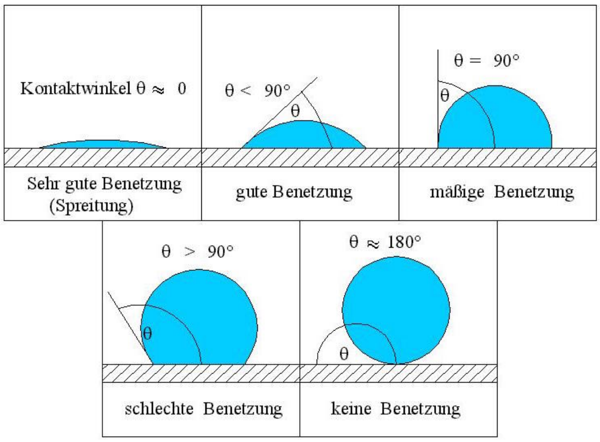
- die Teilchen haben an der Grenzfläche einen kleineren Abstand und eine größere Teilchendichte als im Inneren
- Grenzflächenspannung $\sigma_{grenz} < 0$
- Grenzflächenenergie E ist die Energie, die auf der Grenzfläche A gespeichert ist $E = \sigma_{grenz} \cdot A$
- Kapillarität:



Kapillaraszension:
die Flüssigkeit steigt in der Kapillare über den Flüssigkeitsspiegel um den Wert h an
positiver Meniskus, positive Steighöhe

8.3.3 Tropfenform und Kontaktwinkel

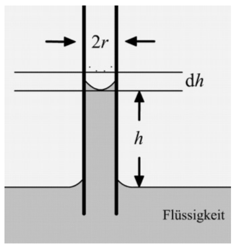
Bei einer optimalen Benetzung breitet sich die Flüssigkeit auf der Grenzfläche aus. Sie verteilt sich also in einer dünner werdenden Schicht selbstständig über immer größere Flächen. Bei guter Benetzung erhält man einen relativ flachen Tropfen mit großer Berührungsfläche zur Grenzfläche. Bei schlechter Benetzung besitzt der Tropfen die Form einer mehr oder weniger abgeflachten Kugel und perlt von der Oberfläche ab.



Mit Hilfe des Kontaktwinkels lässt sich die Qualität der Benetzbarkeit beschreiben. Ein Kontaktwinkel von 0° bedeutet vollständige Benetzung, das heißt, ein Wassertropfen zerläuft zu einem Film. Ein Kontaktwinkel von 180° bedeutet vollkommene Unbenetzbarkeit, der Tropfen berührt die Oberfläche in nur einem Punkt.

8.3.4 Die Messung der Grenzflächenspannung

Wir betrachten eine Flüssigkeit in einem engen Rohr (Kapillarität). Der Einfachheit halber wollen wir eine steigende Flüssigkeit (benetzende Flüssigkeit) betrachten. Die überlegungen gelten aber auch für nicht-benetzende Flüssigkeiten.



Die Flüssigkeit steigt im Rohr um Δh und es muß der Energieerhaltungssatz gelten: die änderung der potentiellen Energie und die änderung der Grenzflächenergie sind null. Die Flüssigkeitssäule hat die Grenzfläche $\Delta A = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \Delta h$ und die Masse $m = \rho \cdot V = \rho \cdot r^2 \cdot \pi \cdot \Delta h$.

$$\begin{aligned}\Delta W_{\text{pot}} + \Delta W_{grenz} &= 0\\ m \cdot g \cdot \Delta h + \sigma_{grenz} \cdot \Delta A &= 0\\ \sigma_{grenz} &= -\frac{m \cdot g \cdot \Delta h}{\Delta A} = -\frac{r \cdot \rho \cdot g \cdot \Delta h}{2}\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung kann bei bekanntem Radius der Kapillare und gemessener Steighöhe die Grenzflächenspannung berechnet werden. Umgekehrt kann auch bei bekannter Grenzflächenspannung die Steighöhe berechnet werden.

$$\Delta h = -\frac{2\sigma_{grenz}}{\rho \cdot g \cdot r}$$

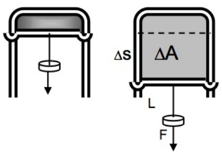
Für benetzende Flüssigkeiten ist die Steighöhe $\Delta h > 0$ positiv und die Grenzflächenspannung $\sigma_{grenz} < 0$ entsprechend negativ.
Für nicht benetzende Flüssigkeiten ist die Steighöhe $\Delta h < 0$ negativ und die Grenzflächenspannung $\sigma_{grenz} > 0$ entsprechend positiv.

Anmerkung:
Die Formel ist nicht sehr genau: Nicht nur die Grenzflächenspannung sondern auch auch die Oberflächenspannung spielt eine Rolle. Durch das Aufsteigen der Flüssigkeit im Rohr kommt es zu einem Absinken der Flüssigkeit außerhalb des Rohres. Je enger das Rohr und je weiter das Gefäß außerhalb des Rohres umso geringer sind diese Fehler.

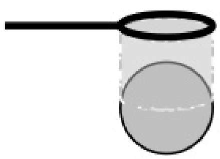
8.4 Aufgaben

(8.1) a) Vergleichen Sie die Summe aller Kräfte zwischen einem gegebene Teilchen und allen Nachbarteilchen im Inneren der Flüssigkeit und an der Oberfläche!
b) Vergleichen Sie Teilchenabstand und Teilchendichte im Inneren und an der Oberfläche der Flüssigkeit!
c) Warum haben Oberflächenteilchen eine größere potentielle Energie als die Teilchen im Inneren der Flüssigkeit?

(8.2) Ein Flüssigkeitstropfen (linkes Bild) wird in einem Drahtbügel (Länge $L = 1$ cm) durch ein kleines Gewicht ($m_{gewicht} = 5$ g) zu einer rechteckigen Flüssigkeitsschicht mit zwei Begrenzungshäuten ausdehnt ($\Delta s = 8$ mm, rechtes Bild).
a) Bestimmen Sie die Oberflächenspannung! In welcher Einheit wird sie angegeben?
b) Wie viel Energie ist auf der Oberfläche (beide Häute) gespeichert?
c) Wie groß ist die Energiedichte in J/m^2 auf den Häuten? d) Warum hängt die Kraft F nicht von Δs ab?



(8.3) Ein (fast) kugelförmiger Tropfen einer Flüssigkeit (Radius $r = 2$ mm, Dichte $\rho = 800$ kg/m^3) hängt – wie abgebildet – an einer zylinderförmigen Flüssigkeitshaut.
a) Bestimmen Sie die Oberflächenspannung!
b) Wie viel Energie ist auf der Zylinderhaut gespeichert, wenn die "Höhe" des Zylinders 5 mm beträgt?
c) Wie viel Oberflächenenergie ist auf der gesamten Flüssigkeit gespeichert?



(8.4) Eine Flüssigkeit der Dichte $\rho = 2000$ [Einheiten] steigt in einem Kapillarrohr ($r = 2$ mm) 4 cm hoch.

Ist die Flüssigkeit benetzend oder nicht benetzend?
Bestimmen Sie die Grenzflächenspannung!

(8.5) In eine horizintale Oberfläche einer Flüssigkeit ($\rho = 2000$ [Einheiten]) wird ein Kapillarrohr ($r = 3$ mm, $\sigma_{grenz} = +0,5$ [Einheiten]) getaucht.
Steigt die Flüssigkeit im Rohr oder wird sie nach unten gedrückt?
Wie weit?

(8.6) a) Was ist der Unterschied zwischen Oberflächenspannung und Grenzflächenspannung?
b) Was versteht man unter einer benetzenden und unter einer nicht-benetzenden Flüssigkeit?
c) Vergleichen Sie Kohäsion und Adhäsion bei benetzenden und nicht-benetzenden Flüssigkeiten!
d) Bei welcher Art von Flüssigkeit ist die Teilchendichte an der Grenzfläche höher als im Inneren?
e) Welche Flüssigkeiten steigen in einem dünnen Rohr von selbst auf, welche werden unter ein gegebenes Flüssigkeitsniveau gedrückt? Bei welchen Flüssigkeiten sinkt dabei die Grenzflächenenrgie?

(8.7) Die Abbildung zeigt zwei Flüssigkeitstropfen auf einer Glasplatte im Vakuum. Die Tropfen haben eine Oberfläche und eine Grenzfläche.
Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Korrigieren Sie die falschen Aussagen!

a) Der linke Tropfen besteht aus einer benetzenden Flüssigkeit!
b) Bei benetzenden Flüssigkeiten ist die Grenzfläche möglichst groß, die Oberfläche möglichst klein.
c) Bei nicht-benetzenden Flüssigkeiten ist die Grenzfläche möglichst klein, die Oberfläche möglichst groß.
d) Bei nicht-benetzenden Flüssigkeiten ist die Grenzfläche möglichst groß, die Oberfläche möglichst groß.

9 Strömende Flüssigkeiten und Gase

9.1 Begriffe, Einteilung der Strömungen

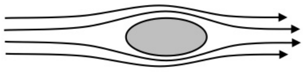
Ideale Strömung: Strömung ohne Reibeungsverluste, es gilt der Energieerhaltungssatz

Reale Strömung: Strömung mit Reibeungsverlusten

Ideale Flüssigkeit: inkompressible Flüssigkeit, ohne Reibung zwischen den Flüssigkeitsteilchen (keine Reibung zwischen benachbarten, verschieden schnell bewegten Flüssigkeitsschichten), z.B. Wasser

Viskose Flüssigkeit: in der Flüssgkeit gibt es starke Reibung zwischen den Flüssigkeitsteilchen, z.B. Honig
Viskosität = Zähigkeit

Flusslinien: jede Strömung kann durch Flusslinien dargestellt werden
eine ideale Flüssigkeit wird durch eine konstante Anzahl von Flusslinien dargestellt
die Dichte der Flusslinien ist proportional zur Strömungsgeschwindigkeit (eng zusammenliegende Flusslinien – große Geschwindigkeit, weit auseinander liegende Flusslinien – kleine Geschwindigkeit)

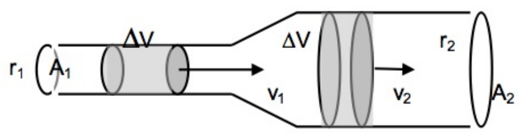
laminare Ströung: die Flusslinien reißen trotz eines Hindernisses oder einer Verengung nicht ab, sondern gehen durch 

turbulente Strömung: die Flusslinien reißen bei einem Hindernis ab, es bilden sich Wirbel und Turbulenzen

stationäre Strömung: die Geschwindigkeit der Strömung an einem gegebenen Punkt ändert sich zeitlich nicht

9.2 Die Kontinuitätsgleichung

Bei einer stationären Strömung muss im Zeitintervall Δt dasselbe Volumen ΔV in ein Rohr einfließen und auf der anderen Seite wieder ausfließen. Wenn sich der Querschnitt A eines Rohres ändert, muss sich daher auch die Strömungsgeschwindigkeit v der Flüssigkeit ändern.



Durch den Querschnitt A fließt in der Zeit Δt das Volumen $\Delta V = A \cdot v \cdot \Delta t$. In einem Rohr mit den Querschnitten A_1 und A_2 muss daher im selben Zeitintervall Δt gelten:

$$\begin{aligned} \Delta V_1 = A_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t &= A_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t = \Delta V_2 \\ A_1 \cdot v_1 &= A_2 \cdot v_2 \end{aligned}$$

Kontinuitätsgleichung

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 \tag{9.1}$$

9.3 Die Dynamik von Flüssigkeiten

Die Ursache von strömenden Volumina sind Drücke und Druckunterschiede. (vgl. in der Mechanik ist die Ursache von Bewegungen die Kraft). Es gibt verschieden Arten von Drücken.

9.3.1 Arten von Drücken

Druck bei statischen Flüssigkeiten Der Druck ist in einer statischen (=ruhenden) Flüssigkeit in alle Richtungen gleich groß (es handelt sich dabei um den hydrostatischen Druck). Wir sprechen in diesem Zusammenhang jetzt vom statischen Druck oder auch vom Wanddruck.
Zwischen der Gefäßwand und der Flüssikgeit gibt es einen Druck. Gartenschläuche aus Gummi können den Gesamtdruck in einer Flüssigkeit erniedrigen, wenn sie sich ausdehnen oder erhöhen, wenn sie sich zusammenziehen.

Druck bei strömenden Flüssigkeiten Durch die Bewegung einer Flüssigkeit entsteht ein Druck, der direkt von der Geschwindigkeit abhängt. Wir sprechen vom Geschwindigkeitsdruck oder vom Staudruck.
Er entsteht dadurch dass schnelle Teilchen ihren Impuls und damit Kraft und Druck auf die Umgebung übertragen.
Wenn Regentropfen auf eine Fensterscheibe treffen, üben sie auf diese einen Druck aus. Der Druck ist umso größer, wenn er von einem strömenden zusammen hängenden Flüssigkeitsvolumen ausgeübt wird.

9.3.2 Die Bernoulli-Gleichung für ideale horizontale Strömungen

Wir verwenden den Energieerhaltungssatz für die strömende Flüssigkeit. Die Gesamtenergie eines Flüssigkeitsvolumens ΔV mit der Geschwindigkeit v setzt sich zusammen aus der kinetischen Energie E_{kin} und der der potentiellen Energie E_{pot} gegen die elastischen Kräfte der Wand.

$$\begin{aligned} E_{ges} &= E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} \\ &= \frac{m \cdot v^2}{2} + E_{\text{pot}} \\ &= \frac{\rho \cdot \Delta V \cdot v^2}{2} + E_{\text{pot}} \end{aligned}$$

Wir dividieren jetzt diese Gleichung durch das Volumen ΔV und stellen fest, dass eine Energiedichte einem Druck entspricht $\frac{E}{V} = p$ (Druckenergie):

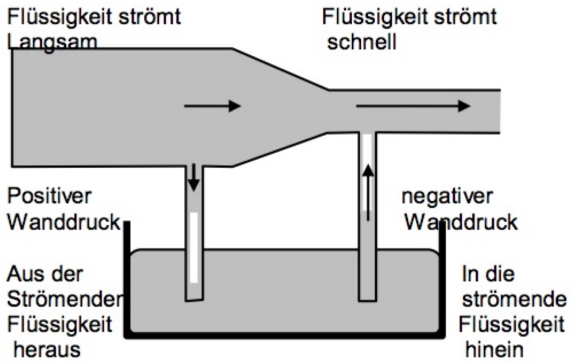
$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{ges}}}{\Delta V} &= \frac{\rho \cdot v^2}{2} + \frac{E_{\text{pot}}}{\Delta V} \\ p_{\text{ges}} &= p_{\text{v}} + p_{\text{wand}} = const \end{aligned}$$

Bernoulli-Gleichung (für horizontale Rohre)
In einer strömenden Flüssigkeit ist die Summe aus Geschwindigkeitsdruck $p_{\text{v}} = \frac{\rho \cdot v^2}{2}$ und Wanddruck p_{wand} immer konstant gleich dem Gesamtdruck p_{ges} ist. Es gilt:

$$p_{\text{ges}} = p_{\text{v}} + p_{\text{wand}} = const \tag{9.2}$$

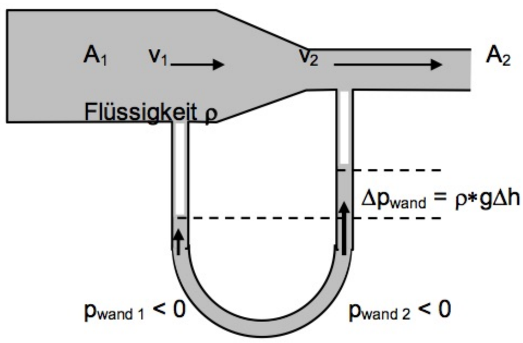
9.3.3 Die Sogwirkung bei Verengung – negativer Wanddruck

Wenn die Flüssigkeit ruht ($v = 0$) so gilt immer $p_{ges} = p_{wand}$.
ändert sich die Geschwindigkeit der Flüssigkeit im Rohr, so wird der Geschwindigkeitsdruck $p_{\mathrm{v}} = \frac{\rho \cdot v^2}{2}$ größer. Wegen $p_{ges} = const$ muss daher der Wanddruck p_{wand} kleiner werden. Bei sehr großer Geschwindigkeit wird der Wanddruck p_{wand} sogar negativ. Das bedeutet dass die Flüssigkeit nicht mehr gegen die Wand drückt, sondern dass eine Sogwirkung in die Flüssigkeit hinein wirkt.
Wie man aus der Abbildung erkennt, zeigt die Richtung des positiven Wanddrucks aus der strömenden Flüssigkeit heraus und die Richtung eines negativen Wanddrucks in die strömende Flüssigkeit hinein.



9.3.4 Die Messung und Berechnung der Strömungsgeschwindigkeit

Durch ein vertikales starres Rohr strömt laminar eine Flüssigkeit. Bei Verkleinerung des Querschnittes A werden die Geschwindigkeit v und der Geschwindigkeitsdruck p_v größer. Da der Gesamtdruck gleich bleibt, wird der Wanddruck p_{wand} kleiner (negativer). Die Abbildung zeigt links einen negativen Wanddruck bei großem Querschnitt und rechts einen noch negativeren Wanddruck bei kleinerem Querschnitt. Die Differenz der beiden Wanddrücke ist durch die Höhe der Flüssigkeitssäule Δh im gebogenen Rohr bestimmt. Es gilt:



$$\Delta p_{\mathrm{wand}} = p^{(2)}_{\mathrm{wand}} - p^{(1)}_{\mathrm{wand}} = \rho \cdot g \cdot \Delta h \tag{9.3}$$

Mit der Bernoulli-Gleichung

$$\frac{\rho \cdot v_1^2}{2} + p^{(1)}_{\mathrm{wand}} = \frac{\rho \cdot v_2^2}{2} + p^{(2)}_{\mathrm{wand}} \tag{9.4}$$

und der Kontinuitätsgleichung

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 \tag{9.5}$$

kann man daraus die Geschwindigkeit berechnen.

Beispiel

Wasser strömt ideal in einem starrem Rohr, dessen Querschnitt enger wird von $A_1 = 10$ cm^2 auf $A_2 = 2$ cm^2. Für den Wanddruck werden folgende Werte gemessen: $p^{(1)}_{wand} = 15000$ Pa, $p^{(2)}_{wand} = -17000$ Pa.
Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_1 der Füssigkeit im Querschnitt A_1!

Lösung

Wir verwenden zuerst die Kontinuitätsgleichung:

$$\begin{aligned} A_1 \cdot v_1 &= A_2 \cdot v_2 \\ v_2 &= \frac{A_1}{A_2} \cdot v_1 \\ v_2 &= \frac{10}{2} \cdot v_1 = 5 \cdot v_1 \end{aligned}$$

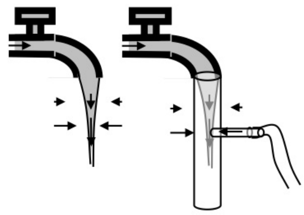
Wir verwenden die Bernoulli-Gleichung und setzen das Ergebnis von oben ein:

$$\begin{aligned} \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} + p_{wand}^{(1)} &= \frac{\rho \cdot v_2^2}{2} + p_{wand}^{(2)} \\ p_{wand}^{(1)} - p_{wand}^{(2)} &= \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \frac{\rho}{2}(25 \cdot v_1^2 - v_1^2) = \frac{\rho}{2}(24 \cdot v_1^2) \\ v_1^2 &= \frac{p_{wand}^{(1)} - p_{wand}^{(2)}}{12 \cdot \rho} = \frac{32\,000}{12 \cdot 1000} = \frac{8}{3} \\ v_1 &= \sqrt{\frac{8}{3}} = 1,63\,\mathrm{m}/s \\ v_2 &= 5 \cdot v_1 = 8,16\,\mathrm{m}/s \end{aligned}$$

Die Dichte von Wasser ist 1000 kg/m^3.

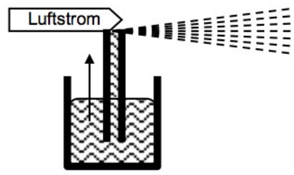
9.3.5 Anwendungen

Wasserstrahlpumpe



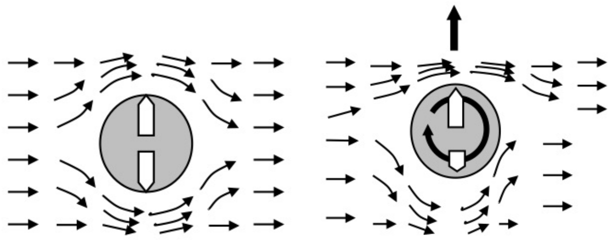
Beim freien Ausfluss des Wassers aus einem Rohr beobachtet man oft, dass der vertikal nach unten fließende Strahl bei steigender Geschwindigkeit immer dünner wird. Der Grund dafür liegt in der steigenden Geschwindigkeit des Wassers durch den freien Fall (Erdbeschleunigung), wodurch der "Wanddruck" sinkt und sogar negativ werden kann (Richtung des Wanddrucks zeigt normal zur Strömungsrichtung ins Innere der Flüssigkeit) (linkes Bild).
Durch diese Saugwirkung kann man durch ein Röhrchen, das seitlich im rechtem Winkel abzweigt, Flüssigkeiten oder Luft ansaugen und mit dem Wasserstrahl mittransportieren lassen. (rechtes Bild)

Zerstäuber (Spray)



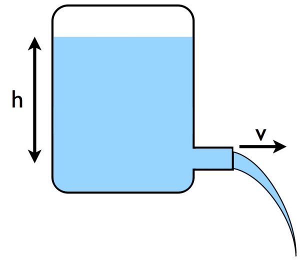
Ein vertikales Rohr taucht in ein Gefäß mit Flüssigkeit. Ein schneller Luftstrom über der oberen Rohröffnung lässt die Flüssigkeit im Rohr hoch steigen. Wenn der Wanddruck $p_{wand,luft}$ des Luftstroms negativ ist, so zeigt er vertikal nach oben. Man beachte, dass es für den Luftstrom gar keine "Wand" gibt. Trotzdem verwendet man das Wort "Wanddruck" oder "statischer Druck".
Unter der Wirkung eines Luftstroms mit seinem negativen Wanddruck steigen Flüssigkeiten (Farben, Lacke; Kosmetika) in einem sehr dünnen Rohr hoch und werden danach im Luftstrom in Form kleiner Tröpfchen verteilt (zerstäubt).
Ein Blatt Papier, welches sich gewöhnlich unter der Wirkung der Schwerkraft nach unten wölbt, wird nach oben gezogen, wenn der negative "Wanddruck" eines horizontalen Luftstroms stark genug ist.

Magnus- Effekt



Die Abbildung zeigt links eine Kugel im Luftstrom: Oberhalb und unterhalb der Kugel wird die Luft schneller, weil sie einen größeren Weg zurücklegen muss. Die weißen Pfeile zeigen den negativen Wanddruck (in Richtung Luftstrom), welcher nach oben und nach unten gleich stark ist.
Im rechten Bild sieht man eine rotierende Kugel im Luftstrom. Wenn es Reibung zwischen Luft und Kugel gibt, so wird die Kugel oberhalb beschleunigt und unterhalb abgebremst. Der Wanddruck ist an der Oberseite noch negativer (stärker) als unten. Die Gesamtwirkung ist, dass die rotierende Kugel im Luftstrom nach oben steigt.
Der Magnus-Effekt hat Bedeutung im Fußball (Effet, Bananenflanke) oder im Tischtennis und im Tennis (Tipspin, Slice).

Ausflussgeschwindigkeit aus Gefäßen



Befindet sich in der Tiefe h unter dem Flüssigkeitsspiegel eine kleine Ausflussöffnung, so kann die Ausflussgeschwindigkeit mit Hilfe der Bernoulli-Gleichung bestimmt werden. Wir vergleichen dazu die Bernoulli-Gleichung im Inneren der Flüssigkeit und an der Austrittsöffnung. Im Inneren ist der Wanddruck gleich dem hydrostatischen Druck und der Geschwindigkeitsdruck (annähernd) null, an der Austrittsöffnung ist der Wanddruck gleich null und der Geschwindigkeitsdruck ungleich null.

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{v}}^{(1)} + p_{wand}^{(1)} &= p_{\mathrm{v}}^{(2)} + p_{wand}^{(2)} \\ 0 + \rho \cdot g \cdot h &= \frac{\rho \cdot v^2}{2} + 0 \end{aligned}$$

Dadurch ergibt sich die Ausflussgeschwindigkeit als $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ (Ausflussformel von Torricelli). Das gleiche Ergebnis erhält man auch, wenn man den Energieerhaltunssatz verwendet.

9.4 Aufgaben

(9.1) Eine Flüssigkeit mit der Dichte $\rho = 800$ [Einheiten?] strömt ideal und stationär in einem starrem Rohr, dessen Querschnitt breiter wird: $A_1 = 10\ \mathrm{cm}^2$, $A_2 = 15\ \mathrm{cm}^2$. Für den statischen Druck misst man $p_{wand}^{(1)} = 60000$ Pa, $p_{wand}^{(2)} = 82500$ Pa. Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Füssigkeit im Querschnitt A_1!

(9.2) Wasser strömt ideal in einem starren Rohr, dessen Querschnitt sich erweitert $A_1 = 1\ \mathrm{cm}^2$, $A_2 = 5$ cm^2. Für den statischen Druck misst man $p_{wand}^{(1)} = -13000$ Pa, $p_{wand}^{(2)} = +5000$ Pa. Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Füssigkeit im Querschnitt A_1!

(9.3) a) Wie hoch muss Wasser in einem Gefäß stehen, damit es aus der öffnung am Gefäßboden mit 2 m/s ausfließt?
b) Versuchen Sie, die Formel für die Ausflussgeschwindigkeit mit Hilfe der Umwandlung von potentieller in kinetische Energie zu berechnen!

(9.4) a) Was versteht man unter Druckenergie?
b) Was versteht man unter einer idealen Flüssigkeit? Wie nennt man das Gegenteil?
c) Was versteht man unter einer laminaren Strömung? Wie nennt man das Gegenteil?

(9.5) Wie lautet die Kontinuitätsgleichung? Gilt sie für alle Flüssigkeiten oder nur für ideale Flüssigkeiten? Gilt sie nur für stationäre Strömungen oder auch für nicht stationäre Strömungen?

(9.6) Wie lautet die Bernoulli-Gleichung? Was bedeuten die Größen $p_v$und$p_{\mathrm{w}and}$?