

Vorstudienlehrgang der Wiener Universitäten VWU

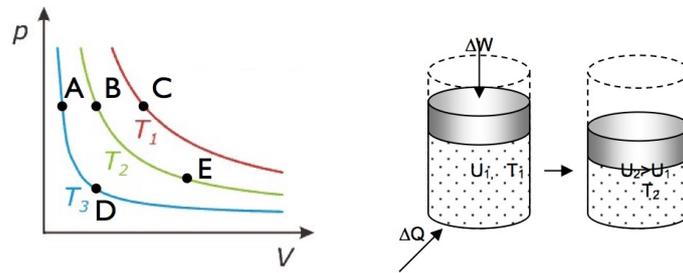
## Skriptum

# Physik-Kurs

## Teil 2: Wärmelehre

Katharina Durstberger-Rennhofer

Version März 2020



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Gesetze für ruhende Flüssigkeiten</b>	<b>1</b>
1.1	Wichtige Begriffe . . . . .	1
1.1.1	Die Ausdehnung eines Körpers . . . . .	1
1.1.2	Die Dichte eines Körpers . . . . .	2
1.1.3	Das Teilchenmodell und die Aggregatzustände der Materie . . . . .	2
1.2	Der Druck . . . . .	3
1.2.1	Der Druck in einem Gas . . . . .	3
1.2.2	Der Druck in einer Flüssigkeit . . . . .	4
1.2.3	Der Druck bei einem Festkörper . . . . .	7
1.3	Der Auftrieb in Flüssigkeiten . . . . .	8
1.3.1	Bestimmung des Auftriebs in einer Flüssigkeit . . . . .	8
1.3.2	Schwimmen eines Körpers . . . . .	9
1.4	Das Mischen von verschiedenen Flüssigkeiten . . . . .	10
1.5	Aufgaben . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Temperatur und Wärmemenge</b>	<b>15</b>
2.1	Temperatur . . . . .	15
2.1.1	Temperaturmessung . . . . .	15
2.1.2	Festlegung einer Temperaturskala . . . . .	15
2.2	Definition der Wärmemenge und Wärmeenergie . . . . .	16
2.2.1	Unterschied Temperatur – Wärme . . . . .	16
2.2.2	Spezifische Wärmekapazität . . . . .	16
2.2.3	Wärme eines Gefäßes (Gefäßwärme) . . . . .	17
2.2.4	Umwandlung von mechanischer Energie in Wärmeenergie . . . . .	18
2.3	Mischen von Flüssigkeiten mit Temperaturänderung . . . . .	19
2.4	Aufgaben . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Einfache Gesetze für ideale Gase</b>	<b>23</b>
3.1	Das ideale Gas und seine Zustandsänderungen . . . . .	23
3.2	Isotherme Zustandsänderung . . . . .	23
3.3	Die isobare Zustandsänderung . . . . .	25
3.4	Die Isochore Zustandsänderung . . . . .	26
3.5	Änderung aller drei Zustandsgrößen . . . . .	27
3.6	Aufgaben . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Die Stoffmenge</b>	<b>30</b>
4.1	Der Satz von Avogadro und der Satz von Dalton . . . . .	30
4.2	Die Stoffmenge - das Mol . . . . .	30
4.3	Die Gaskonstanten . . . . .	33
4.4	Aufgaben . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Kinetische Gastheorie – Druck und Temperatur im Teilchenmodell</b>	<b>36</b>
5.1	Wiederholung und Vorbereitung von wichtigen Begriffen . . . . .	36
5.1.1	Impuls, Kraftstoß und Druck . . . . .	36
5.1.2	Teilchendichte und Teilchenfluß . . . . .	37
5.1.3	Etwas Statistik . . . . .	38
5.2	Bestimmung des Zusammenhangs zwischen Druck und Teilchenbewegung . . . . .	39

5.3	Was ist Temperatur? . . . . .	41
5.3.1	Temperatur von Gasen . . . . .	41
5.3.2	Temperatur von festen und flüssigen Körpern . . . . .	42
5.3.3	Der Absolute Temperatur-Nullpunkt . . . . .	43
5.4	Aufgaben . . . . .	43
<b>6</b>	<b>Der erste Hauptsatz der Wärmelehre</b>	<b>46</b>
6.1	Die Druckenergie . . . . .	46
6.2	Die Innere Energie . . . . .	48
6.3	Der erste Hauptsatz der Wärmelehre . . . . .	48
6.4	Die Wärmekapazität von Gasen . . . . .	49
6.4.1	Die spezifische Wärmekapazität von Gasen . . . . .	49
6.4.2	Die molare Wärmekapazität von Gasen . . . . .	51
6.4.3	Die innere Energie bei der isochoren Zustandsänderung . . . . .	51
6.4.4	Die innere Energie bei der isobaren Zustandsänderung . . . . .	51
6.4.5	Die mittlere kinetische Energie und die innere Energie . . . . .	52
6.4.6	Die Freiheitsgrade eines Gases . . . . .	53
6.5	Aufgaben . . . . .	55
<b>7</b>	<b>Die adiabatische Zustandsänderung</b>	<b>58</b>
7.1	Die Zustandsgleichungen . . . . .	58
7.2	Der Vergleich von Adiabaten und Isothermen im $p$ - $V$ -Diagramm . . . . .	59
7.3	Zusammenfassung aller Zustandsänderungen im $p$ - $V$ -Diagramm . . . . .	60
7.4	Aufgaben . . . . .	60
<b>8</b>	<b>Die Umwandlung von Wärmeenergie in mechanische Energie – der Kreisprozess</b>	<b>61</b>
8.1	Allgemeines . . . . .	61
8.2	Der Kreisprozess von Stirling . . . . .	61
8.3	Der Kreisprozeß von Carnot . . . . .	62
8.4	Der thermische Wirkungsgrad . . . . .	64
8.4.1	Definition . . . . .	64
8.4.2	Der maximale Wirkungsgrad . . . . .	64
8.5	Die Wärmekraftmaschine . . . . .	65
8.5.1	Allgemeines . . . . .	65
8.5.2	Die Wärmekraftmaschine . . . . .	66
8.5.3	Die Kältemaschine . . . . .	67
8.6	Aufgaben . . . . .	69
<b>9</b>	<b>Der zweite Hauptsatz der Wärmelehre</b>	<b>71</b>
9.1	Verschiedene Formulierungen . . . . .	71
9.2	Entropie und Wahrscheinlichkeit . . . . .	72
9.2.1	Reversible und irreversible Prozesse . . . . .	72
9.2.2	Die Entropie . . . . .	72
9.3	Die Entropie und der zweite Hauptsatz . . . . .	76
<b>10</b>	<b>Der Transport von Wärme</b>	<b>78</b>
10.1	Die Wärmeströmung (Konvektion) . . . . .	78
10.2	Die Wärmeleitung . . . . .	79
10.3	Die Wärmestrahlung . . . . .	80

<b>11 Aggregatzustände</b>	<b>82</b>
11.1 Allgemeines . . . . .	82
11.2 Das Phasendiagramm . . . . .	83
11.3 Verdampfen und Kondensieren . . . . .	84
11.3.1 Der Dampfdruck . . . . .	84
11.3.2 Der Sättigungsdampfdruck . . . . .	84
11.3.3 Die Luftfeuchte . . . . .	85
11.3.4 Sieden . . . . .	86
11.3.5 Verdampfungswärme . . . . .	87
11.4 Schmelzen und Erstarren . . . . .	88
11.5 Sublimieren und Resublimieren . . . . .	91
11.6 Zusammenfassung . . . . .	92
11.7 Aufgaben . . . . .	92

# 1 Gesetze für ruhende Flüssigkeiten

## 1.1 Wichtige Begriffe

### 1.1.1 Die Ausdehnung eines Körpers

#### Die Länge

Die Länge  $s$  ist die eindimensionale Ausdehnung eines Körpers.

*Einheit:*  $[s] = m$  Meter

*Umrechnungen:*

$1\text{ m} = 10\text{ dm} (= 10^1\text{ dm}) = 100\text{ cm} (= 10^2\text{ cm}) = 1\,000\text{ mm} (= 10^3\text{ mm})$

#### Die Fläche

Die Fläche  $A$  ist die zweidimensionale Ausdehnung eines Körpers.

*Einheit:*  $[A] = m^2$  Quadratmeter

*Umrechnungen:*

$1\text{ m}^2 = 100\text{ dm}^2 (= 10^2\text{ dm}^2) = 10\,000\text{ cm}^2 (= 10^4\text{ cm}^2) = 1\,000\,000\text{ mm}^2 (= 10^6\text{ mm}^2)$

#### Das Volumen

Das Volumen  $V$  ist die dreidimensionale (räumliche) Ausdehnung (der Platzbedarf) eines Körpers.

*Einheit:*  $[V] = m^3$  Kubikmeter

*Andere Einheit:*

Liter  $\ell$ :  $1\text{ m}^3 = 1\,000\ell$       $1\ell = 1\text{ dm}^3$

*Umrechnungen:*

$1\text{ m}^3 = 1\,000\text{ dm}^3 (= 10^3\text{ dm}^3) = 1\,000\,000\text{ cm}^3 (= 10^6\text{ cm}^3) = 1\,000\,000\,000\text{ mm}^3 (= 10^9\text{ mm}^3)$

#### Ebene Körper

Körper	Länge (Umfang)	Fläche
Quadrat	$s = 4 \cdot a$	$A = a^2$
Rechteck	$s = 2 \cdot (a + b)$	$A = a \cdot b$
Kreis	$s = 2 \cdot \pi \cdot r$	$A = r^2 \cdot \pi$
Dreieck	$s = a + b + c$	$A = \frac{a \cdot h_a}{2}$

**Räumliche Körper**

Körper	Fläche (Oberfläche)	Volumen
Würfel	$A = 6 \cdot a^2$	$V = a^3$
Quader	$A = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$	$V = a \cdot b \cdot c$
Zylinder (kreisförmig)	$A = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$	$V = G \cdot h = r^2 \cdot \pi \cdot h$
Kugel	$A = 4\pi \cdot r^2$	$V = \frac{4\pi r^3}{3}$

**1.1.2 Die Dichte eines Körpers**

Zwei Körper können dasselbe Volumen haben, aber verschieden "schwer" sein. Ein Kubikmeter Eisen ist "schwerer" als ein Kubikmeter Holz, Eisen hat die größere Dichte. Die Dichte  $\rho$  eines Stoffes ist die Masse von 1 m<sup>3</sup> dieses Stoffes.

Die (Massen-) Dichte  $\rho$  eines Körpers ist Masse  $m$  des Körpers dividiert durch sein Volumen  $V$  (Masse pro Volumen)

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (1.1)$$

*Einheit:*  $[\rho] = \left[\frac{m}{V}\right] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = \frac{\text{g}}{\ell}$

**Einige Werte:**

Eichenholz:	$\rho = 800 \text{ kg/m}^3$
Eisen:	$\rho = 7900 \text{ kg/m}^3$
Aluminium:	$\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$
Öl:	$\rho = 700 \text{ kg/m}^3$
Wasser:	$\rho_W = 1000 \text{ kg/m}^3 = 1 \text{ kg/\ell}$
Luft:	$\rho = 1,29 \text{ kg/m}^3$
Sonne:	$\rho = 1400 \text{ kg/m}^3$
Weißer Zwergstern:	$\rho = 10^9 \text{ kg/m}^3$
Neutronenstern:	$\rho = 10^{18} \text{ kg/m}^3$

**Beispiel (1.1)**

Ein Quader aus Kunststoff mit der Grundfläche  $A = 24 \text{ cm}^2$  und der Höhe  $h = 5 \text{ cm}$  hat die Masse  $m = 36 \text{ kg}$ . Bestimmen Sie die Dichte  $\rho$  des Kunststoffs!

**Lösung**

$$\text{Volumen } V = A \cdot h = 24 \cdot 5 = 120 \text{ cm}^3 = 120 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\text{Dichte } \rho = \frac{m}{V} = \frac{36 \cdot 10^{-3}}{120 \cdot 10^{-6}} = 300 \text{ kg/m}^3$$

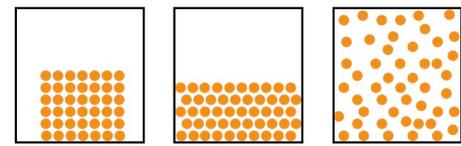
**1.1.3 Das Teilchenmodell und die Aggregatzustände der Materie**

Alles, was uns umgibt, ist aus Atomen aufgebaut. Es gibt ungefähr 120 verschiedene Atomsorten, die im sogenannten Periodensystem der Elemente angeordnet werden. Die Atome verbinden sich zu komplizierteren Verbindungen oder Moleküle (z.B. Wasserstoff (H) und Sauerstoff (O) bilden Wasser (H<sub>2</sub>O)) und bauen damit die gesamte Materie auf.

Einige grundlegende Eigenschaften der Materie können mit dem sogenannten **Teilchenmodell der Materie** erklärt werden. Dabei nimmt man an, dass die Bestandteile der Materie kleine Teilchen sind, die sich unterschiedlich anordnen. Die Teilchen können entweder einzelnen Atome, Moleküle oder andere Verbindungen sein.

Das Teilchenmodell ist eine Vereinfachung, mit der man nicht nur den Aufbau der Materie erklären kann, sondern auch wie sich Materie verändern kann (Zustandsänderungen).

Im Teilchenmodell der Materie unterscheidet man 3 verschiedenen Zustandsformen von Materie, die man auch als **Aggregatzustände** bezeichnet.



Festkörper

Flüssigkeit

Gas

- fester Zustand, Festkörper:  
Die Teilchen sind sehr nahe beieinander und befinden sich an bestimmten Plätzen (Gitterstruktur). Die Teilchen schwingen um ihren Platz hin und her. Zwischen den Teilchen wirken starke Kräfte. Festkörper haben eine bestimmte Form und lassen sich nicht (leicht) zusammendrücken.
- flüssiger Zustand, Flüssigkeit:  
Die Teilchen sind nahe beisammen, aber sie haben keinen festen Platz, sondern sind gegeneinander verschiebbar. Die Teilchen bewegen sich unregelmäßig herum. Zwischen den Teilchen wirken Kräfte, die aber kleiner sind, als in einem Festkörper. Flüssigkeiten passen sich der Gefäßform an und lassen sich nicht (leicht) zusammendrücken.
- gasförmiger Zustand, Gas:  
Die Teilchen sind weit voneinander entfernt und bewegen sich frei durch den Raum. Die Bewegung der Teilchen ist unregelmäßig. Zwischen den Teilchen wirken (fast) keine Kräfte. Gase passen sich der Gefäßform an und nehmen den gesamten Raum ein, der ihnen zur Verfügung steht. Sie lassen sich zusammendrücken.

## 1.2 Der Druck

Der Druck ist eine sogenannte Zustandsgröße und beschreibt den Zustand eines Gases oder einer Flüssigkeit oder eines Festkörpers. Der Druck kann einem bestimmten Volumen oder einem Raumpunkt zugeordnet werden und besitzt keine Richtung (er ist ein Skalar). Allgemein gilt:

Der Druck beschreibt das Gepreßtsein eines Gases oder einer Flüssigkeit oder eines Festkörpers.

### 1.2.1 Der Druck in einem Gas

Ein Gas (z.B. Luft) lässt sich zusammendrücken. Wenn ein Gas gepreßt ist, so sagt man, im Gas herrscht Druck. Je stärker ein Gas gepreßt ist, umso größer ist der Druck im Gas.

Die Größe des Drucks  $p$  in einem Gas erkennt man daran, wie stark das Gas gegen eine Begrenzung drückt.

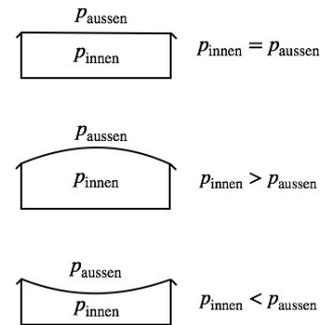
Im Rahmen der kinetischen Gastheorie (Kapitel 5.2) werden wir den Druck in einem idealen Gas durch die ungeordnete Bewegung der Teilchen erklären.

### Das Dosen-Manometer

Wenn die Begrenzung beweglich oder dehnbar ist, so kann man den Druck "sichtbar" und auch messbar machen. Das entsprechende Gerät nennt man Manometer.

Ein einfaches Manometer besteht aus einer elastischen Membran (dünne Haut z.B. aus Gummi), die über eine Dose gespannt wird.

Wenn auf beiden Seiten der gleiche Druck herrscht, so ist die Membran eben. Wenn auf einer Seite ein höherer Druck herrscht, so ist die Membran von dieser Seite weg gewölbt. Man spricht dann auch von Überdruck bzw. Unterdruck. Das Gas mit dem größeren Druck drückt stärker gegen die Wand als das Gas mit dem kleineren Druck. Nimmt man die Trennwand weg, so gibt es eine Bewegung vom größeren zum kleineren Druck hin.



Man kann mit einem Manometer die Differenz von Drücken messen.

Die Abwesenheit von Luft (oder anderen Gasen) bezeichnet man als **Vakuum**, wobei es (praktisch) nicht möglich ist, die gesamte Luft zu entfernen. Wenn man zwischen einem evakuierten Raum und einem gasgefüllten Raum die Trennung wegnimmt, so wird das Gas in den evakuierten Raum gedrückt.

### 1.2.2 Der Druck in einer Flüssigkeit

Auch in Flüssigkeiten herrscht ein Druck, auch wenn man sie nur sehr wenig zusammenpressen kann. Dies sieht man z.B. bei einer Tube mit Zahnpasta, wenn man sie im geschlossenen Zustand zusammendrückt und dann öffnet.

Die Größe des Drucks  $p$  in einer Flüssigkeit erkennt man (wie bei Gasen) an den Kräften auf die Begrenzungsfläche.

Bei Flüssigkeiten stellt man fest, dass der Druck in der Flüssigkeit mit steigender Tiefe zunimmt. Die Flüssigkeit drückt dabei aber in alle Richtungen gleich stark auf eine Begrenzungsfläche, sofern die Begrenzungsfläche in der gleichen Tiefe liegt.

Der zunehmende Druck in einer Flüssigkeit mit der Tiefe hängt mit der Gewichtskraft der Flüssigkeit zusammen. Je größer die Flüssigkeitsmenge ist, die sich über einem Punkt befindet, umso stärker wird die Flüssigkeit darunter zusammengedrückt. Deshalb spricht man auch vom Schweredruck einer Flüssigkeit, aber auch vom statischen Druck, weil dieser Druck in einer ruhenden Flüssigkeit entsteht.

Der Schweredruck (statische Druck)  $p_h$  in einer Flüssigkeit mit der Dichte  $\rho$  in einer bestimmten Tiefe  $h$  ist gegeben durch

$$p_h = \rho \cdot g \cdot h \quad (1.2)$$

Die Flüssigkeit drückt dabei in alle Richtungen gleich stark auf eine Begrenzungsfläche, wenn diese in der gleichen Tiefe liegt.

*Einheit:*  $[p_h] = [\rho \cdot g \cdot h] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{m} = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^2} = \text{Pa}$  Pascal

*Andere Einheiten:*

Bar: 1 bar = 100 000 Pa, 1 mbar = 100 Pa

Der Druck in einer Flüssigkeit hängt nicht von der Form des Gefäßes ab oder vom Gesamtvolumen des Gefäßes, sondern nur vom Abstand zur Oberfläche (der Tiefe  $h$ ).



Dies sieht man in sogenannten "kommunizierenden Gefäßen". Diese Gefäße haben alle unterschiedliche Formen, sie sind aber miteinander verbunden. Die Flüssigkeit steht überall

und unabhängig von der Form der Gefäße gleich hoch.

### Druckdefinition

Der Druck beschreibt das "Gepresst-sein" eines Gases oder einer Flüssigkeit. Den Druck in einem Gas oder einer Flüssigkeit erkennt man an den Kräften auf die Begrenzungsfläche. Daher scheint es sinnvoll die folgende Definition für den Druck allgemein einzuführen:

Der Druck  $p$  in einem Gas oder einer Flüssigkeit wird gemessen durch die Größe der Kraft  $F$ , die pro Fläche  $A$  vom Gas oder der Flüssigkeit auf eine Begrenzungsfläche ausgeübt wird

$$p = \frac{F}{A} \quad (1.3)$$

*Einheit:*  $[p] = \left[\frac{F}{A}\right] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$  Pascal

### Beispiel (1.2)

Ein Taucher taucht in einem See 20 m tief.

- Berechnen Sie den Druck auf seinen Kopf, wenn über dem See keine Luft wäre!
- Berechnen Sie den Druck auf seinen Kopf zusammen mit dem Luftdruck ( $p_0 = 100\,000 \text{ Pa}$ )!
- Berechnen Sie die Kraft, die auf das Trommelfell des Tauchers wirkt, wenn die Fläche des Trommelfells  $A = 1 \text{ cm}^2$  beträgt!

### Lösung

- a) Der statische Druck in  $h = 20 \text{ m}$  Tiefe ist

$$p_h = \rho \cdot g \cdot h = 1000 \cdot 10 \cdot 20 = 200\,000 \text{ Pa}$$

- b) Die Luft, die sich über dem See befindet, drückt natürlich auch auf den Taucher. Daher wirkt insgesamt der Druck :

$$p_{\text{ges}} = p_0 + p_h = 100\,000 + 200\,000 = 300\,000 \text{ Pa}$$

- c) Wir berechnen aus der allgemeinen Druckdefinition die Kraft durch

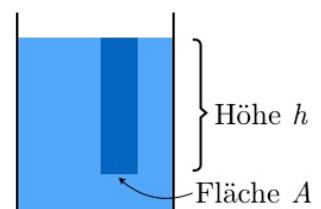
$$F = p_{\text{ges}} \cdot A = 300\,000 \cdot 1 \cdot 10^{-4} = 30 \text{ N}$$

Diese Kraft bzw. der Druckunterschied führt dazu, dass es uns unter Wasser die Ohren "ver-schlägt". Vorsichtiges Gegendrücken mit zugehaltener Nase kann hier helfen.

### Herleitung der Formel des statischen Drucks

Je tiefer man in eine Flüssigkeit (mit der Dichte  $\rho$ ) taucht, umso größer wird der Druck. Wir betrachten eine Flüssigkeitssäule (Zylinder) mit der Höhe  $h$  und der Grundfläche  $A$ . Der Druck, der in der Tiefe  $h$  auf die Grundfläche  $A$  wirkt, wird erzeugt durch die Gewichtskraft der Flüssigkeitssäule darüber, wobei die Flüssigkeitssäule die Masse  $m$  hat.

$$p = \frac{F_g}{A} = \frac{m \cdot g}{A} = \frac{\rho \cdot V \cdot g}{A} = \frac{\rho \cdot A \cdot h \cdot g}{A} = \rho \cdot g \cdot h$$



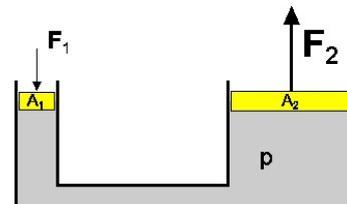
Wir bekommen unsere bekannte Formel. Der statische Druck hängt nur von der Tiefe / Höhe  $h$  ab. In derselben Tiefe ist der Druck überall gleich, wie man durch Einbringen eines Stückchens Papier, das sich nicht verformt, sehen kann.

### Der Kraftverstärker – die hydraulische Presse

Mit einer hydraulischen Presse kann man Kräfte einfach verstärken und dadurch zum Beispiel schwere Lasten heben.

Die hydraulische Presse besteht aus einem Flüssigkeitssystem mit zwei Kolben. (Ein Kolben ist ein abgeschlossener Hohlraum, der mit einem beweglichen Deckel versehen ist.) Der kleinere Kolben heißt Pumpkolben und hat den Querschnitt  $A_1$ , der größere Kolben heißt Press- oder Lastkolben und hat den Querschnitt  $A_2$ .

Drückt man auf den Pumpkolben  $A_1$  mit einer kleinen Kraft  $F_1$  so herrscht in der Flüssigkeit der Druck  $p = \frac{F_1}{A_1}$ . Die Wirkung dieses Drucks an der Fläche  $A_2$ , die ja größer ist als  $A_1$  erkennt man durch die Kraft  $F_2$  und es gilt:



$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

$$F_2 = F_1 \cdot \frac{A_2}{A_1} > F_1$$

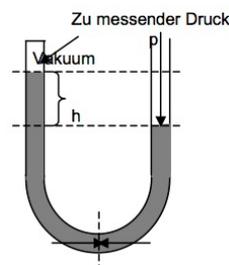
Diese Kraft ist größer als die ursprüngliche Kraft und man sagt, die Kraft  $F_1$  wurde verstärkt zur Kraft  $F_2$ . Man kann also mit einer kleinen Kraft  $F_1$  am kleinen Kolben eine große Kraft  $F_2$  am großen Kolben erzeugen.

Auf diesem Prinzip beruhen zum Beispiel Hebebühnen für Automobile, Bremsen bei Kraftfahrzeugen (der Fuß drückt auf den kleinen Kolben, seine Kraft wird durch einen größeren Kolben verstärkt), Hydraulische Kraftverstärker bei Baggern und Kränen.

### Das U-Rohr als Manometer

Zum Messen von Drücken kann man auch ein U-Rohr (U-förmig gebogenes Rohr) verwenden, das mit einer Flüssigkeit der Dichte  $\rho$  gefüllt ist.

Wenn auf beiden Seiten der Druck auf die Flüssigkeit gleich groß ist, so steht die Flüssigkeit in beiden Schenkeln des Rohres gleich hoch. Gibt es einen Druckunterschied  $\Delta p$  zwischen den beiden Schenkeln des Rohres, so stellt sich die Höhe der Flüssigkeit in beiden Schenkeln entsprechend des Druckunterschiedes ein. Wenn der Druck größer ist, so steht die Flüssigkeit entsprechend tiefer. Es gilt



$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot \Delta h$$

wobei  $\Delta h$  der Höhenunterschied der Flüssigkeit in beiden Schenkeln ist. Die Flüssigkeit im Rohr wirkt wie eine elastische Membran.

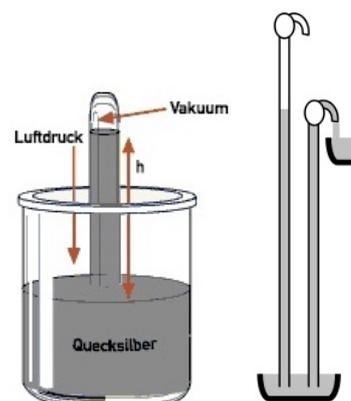
### Das Barometer

Ein Barometer verwendet man zur Messung des Luftdrucks. Meist wird ein Rohr verwendet, das an einem Ende verschlossen und evakuiert ist, und das mit Quecksilber gefüllt ist. Auf die Oberfläche von Quecksilber wirkt der Luftdruck  $p_{\text{Luft}}$ , dessen Wert man dann an der Höhe  $h$  der Flüssigkeitssäule ablesen kann

$$p_{\text{Luft}} = \rho_{\text{Hg}} \cdot g \cdot h$$

wobei  $\rho_{\text{Hg}} = 13\,546 \text{ kg/m}^3$  die Dichte von Quecksilber (Hg) ist.

Auch andere Flüssigkeiten zeigen das Verhalten, dass sie in einem evakuierten Rohr aufgrund des Außendruck der Luft nach oben steigen.



Das Prinzip verwendet man z.B. bei Pumpen, die Wasser nach oben bringen. Für Wasser ergibt sich eine Steighöhe (in einem evakuierten Rohr) von

$$p_{\text{Luft}} = \rho_{\text{Wasser}} \cdot g \cdot h$$

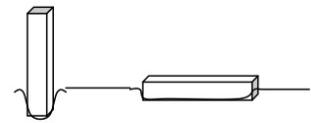
$$h = \frac{p_{\text{Luft}}}{\rho_{\text{Wasser}} \cdot g} \approx \frac{100\,000}{1000 \cdot 10} = 10 \text{ m}$$

Wegen der Reibung steigt das Wasser allerdings weniger hoch. Wenn das Rohr höher als 10 m ist, kann das Wasser nicht bis zur Pumpe steigen. Die Pumpe wirkt nicht. Für Höhenunterschiede über 10 m muß man mehrere Pumpen verwenden.

### 1.2.3 Der Druck bei einem Festkörper

Es gibt auch einen Druck zwischen zwei Festkörpern. Man spricht dann vom Auflagedruck.

Wir stellen den abgebildeten Quader auf einen sehr weichen Boden. Wenn wir ihn auf der kleinen Fläche aufstellen (links) so sinkt er tiefer ein als wenn man ihn auf die größere Fläche stellt (rechts). Die Schwerkraft ist aber in beiden Fällen gleich. Im linken Bild wirkt die Schwerkraft auf einer kleinen Fläche, rechts auf einer großen Fläche. Man sagt: "Der Auflagedruck ist links größer als rechts".



Der Auflagedruck  $p$  eines Körpers auf einer Fläche  $A$  wird gemessen durch die Größe der Kraft  $F_N$ , die von der (Gewichts-) Kraft des Körpers auf die Auflagefläche ausgeübt wird.

$$p = \frac{F_N}{A} \quad (1.4)$$

Dabei verwendet man den Teil der (Gewichts-) Kraft  $F_N$ , der normal auf die Fläche  $A$  wirkt.  $F_N$  wird auch als Normalkraft bezeichnet.

#### Beispiel (1.3)

Es ist ein Quader (Grundfläche  $A = 300 \text{ cm}^2$ , Höhe  $h = 5 \text{ cm}$ , Dichte  $\rho = 4000 \text{ kg/m}^3$ ) gegeben.

- Berechnen Sie die Masse des Quaders!
- Berechnen Sie den Druck, den der Quader ausübt, wenn er auf einer horizontalen Ebene liegt.
- Berechnen Sie den Druck, den der Quader ausübt, wenn er auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel  $\alpha = 20^\circ$  liegt.

#### Lösung

a)

$$\text{Masse } m = \rho \cdot V = \rho \cdot A \cdot h = 4000 \cdot (300 \cdot 10^{-4}) \cdot (5 \cdot 10^{-2}) = 6 \text{ kg}$$

$$\text{Schwerkraft } F_g = m \cdot g = 60 \text{ N}$$

b)

$$\text{Normalkraft } F_N = F_g = 60 \text{ N}$$

$$\text{Druck } p = \frac{F_N}{A} = \frac{60}{300 \cdot 10^{-4}} = 2000 \text{ Pa}$$

c)

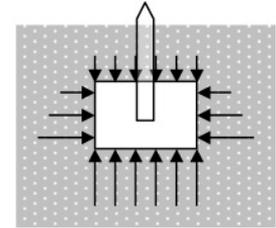
$$\text{Normalkraft } F_N = \cos \alpha \cdot F_g = \cos 20^\circ \cdot 60 = 56,4 \text{ N}$$

$$\text{Druck } p = \frac{F_N}{A} = \frac{56,38}{300 \cdot 10^{-4}} = 1880 \text{ Pa}$$

### 1.3 Der Auftrieb in Flüssigkeiten

Je tiefer man in einem Gas oder einer Flüssigkeit geht, desto größer wird der hydrostatische Druck  $p_h$ . An der Unterseite des abgebildeten Quaders wirkt der Druck nach oben, an der Oberseite wirkt der Druck nach unten. Der Druck von rechts und von links hebt sich auf. Die Differenz des Druckes von oben und von unten bewirkt eine Gesamtkraft, die nach oben zeigt und den Körper nach oben beschleunigt. Diese Kraft heißt Auftrieb  $F_A$ .

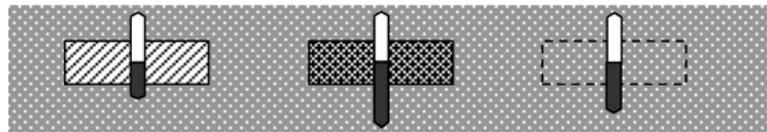
Ein beliebig geformter Körper dreht sich solange, bis sich die Seitenkräfte aufheben. Die vertikalen Kräfte können sich aber niemals aufheben, da unten immer der stärkere Druck wirkt. Es gilt daher:



Auf jeden Körper wirkt in einem Gas oder einer Flüssigkeit unter dem Einfluss der Schwerkraft eine Auftriebskraft  $F_A$  nach oben.

#### 1.3.1 Bestimmung des Auftriebs in einer Flüssigkeit

Die Abbildung zeigt drei gleich geformte Körper aus verschiedenen Stoffen, die sich in einer Flüssigkeit (z.B. Wasser) befinden. Sie haben alle dieselbe Auftriebskraft  $F_A$ , weil diese durch den Druckunterschied erzeugt wird, der von außen auf den Körper wirkt. Zusätzlich zur Auftriebskraft  $F_A$  wirkt noch die Schwerkraft  $F_g$  auf die Körper. Wir können 3 Fälle unterscheiden:



- Der linke Körper ist aus einem "leichten" Material (z.B. Holz in Wasser), sodass die Gewichtskraft kleiner ist als die Auftriebskraft  $F_g < F_A$ : er steigt also nach oben.
- Der mittlere Körper ist aus einem "schweren" Material (z.B. Eisen in Wasser), sodass die Gewichtskraft größer ist als die Auftriebskraft  $F_g > F_A$ : er sinkt also nach unten.
- Der rechte Körper besteht aus der Flüssigkeit selbst (z.B. Wasser in Wasser), sodass die Gewichtskraft gleich der Auftriebskraft ist  $F_g = F_A$ : er schwebt also in der Flüssigkeit.

Man sieht am rechten Körper, dass der Auftrieb eines Körpers in einer Flüssigkeit gleich der Gewichtskraft ist, die er hätte, wenn er vollständig aus dieser Flüssigkeit besteht. Ein Körper, der sich in einer Flüssigkeit befindet, "verdrängt" die Flüssigkeit von seinem Platz.

#### Prinzip von Archimedes:

Die Auftriebskraft eines Körpers ist gleich der Gewichtskraft der Flüssigkeit, die er verdrängt.

$$F_A = \rho_{Fl} \cdot V \cdot g = m_{Fl} \cdot g \quad (1.5)$$

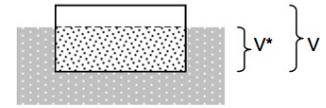
Damit kann man die 3 Fälle von oben mit der Dichte des Körpers  $\rho_K$  und der Dichte der Flüssigkeit  $\rho_{Fl}$  formulieren. Dabei ist die Auftriebskraft  $F_A = \rho_{Fl} \cdot V \cdot g$  und die Gewichtskraft  $F_g = m \cdot g = \rho_K \cdot V \cdot g$ . Wenn ein Körper vollständig in eine Flüssigkeit eintaucht, so gilt:

- Der Körper steigt in der Flüssigkeit nach oben, wenn  $\rho_{Fl} > \rho_K$ .
- Der Körper sinkt in der Flüssigkeit nach unten, wenn  $\rho_{Fl} < \rho_K$ .
- Der Körper schwebt in der Flüssigkeit, wenn  $\rho_{Fl} = \rho_K$ .

### 1.3.2 Schwimmen eines Körpers

Wenn die Dichte eines Körpers kleiner ist als die Dichte der Flüssigkeit, so steigt der Körper nach oben. Dabei taucht ein Teil des Körpers aus der Flüssigkeit auf und wir sprechen vom Schwimmen eines Körpers.

Beim Schwimmen eines Körpers in einer Flüssigkeit stellt sich wieder ein Kräftegleichgewicht ein zwischen der Auftriebskraft (hängt nur vom eingetauchten Teil des Körpers  $V^*$  ab) und der Gewichtskraft (hängt vom gesamten Körper  $V$  ab). Es gilt dann:



$$\begin{aligned} F_A &= F_g \\ \rho_{Fl} \cdot V^* \cdot g &= m_K \cdot g \\ \rho_{Fl} \cdot V^* &= m_K = \rho_K \cdot V \end{aligned}$$

Die Bedingung für das Schwimmen ist:

$$\rho_{Fl} \cdot V^* = \rho_K \cdot V \quad (1.6)$$

#### Aerometer

Dies sind besonders geformte Schwimmkörper. An ihrer Eintauchtiefe kann man die Dichte der Flüssigkeit, in welcher sie schwimmen, ablesen.

#### Beispiel (1.4)

Ein Quader besteht aus einem Kunststoff mit der Dichte  $\rho = 750 \text{ kg/m}^3$ . Der Quader schwimmt im Wasser. Berechnen Sie, wieviel Prozent seiner Höhe über dem Wasser sind!

#### Lösung

Wir verwenden direkt die Bedingung für das Schwimmen

$$\begin{aligned} F_A &= F_g \\ \rho_{Fl} \cdot V^* &= \rho_K \cdot V \end{aligned}$$

wobei wir das Volumen berechnen als  $V = A \cdot h$  mit Grundfläche  $A$  und Höhe  $h$  bzw.  $V^* = A \cdot h^*$  mit Grundfläche  $A$  und der Höhe  $h^*$  unter dem Wasser

$$\begin{aligned} \rho_{Fl} \cdot V^* &= \rho_K \cdot V \\ \rho_{Fl} \cdot A \cdot h^* &= \rho_K \cdot A \cdot h \\ \rho_{Fl} \cdot h^* &= \rho_K \cdot h \\ h^* &= \frac{\rho_K}{\rho_{Fl}} \cdot h = \frac{750}{1000} \cdot h = 0,75 \cdot h \end{aligned}$$

Das bedeutet 75% der Höhe sind unter dem Wasser und entsprechend sind  $100 - 75 = 25\%$  der Höhe über dem Wasser.

#### Beispiel (1.5)

Ein quaderförmiges Brett ( $l = 2 \text{ m}$ ,  $b = 1,2 \text{ m}$ ,  $h = 30 \text{ cm}$ ,  $\rho_{\text{Brett}} = 720 \text{ kg/m}^3$ ) schwimmt im Wasser. Eine Person ( $m_{\text{Person}} = 60 \text{ kg}$ ) sitzt auf dem Brett.

- Berechnen Sie, wie weit das Brett dabei noch aus dem Wasser ragt!
- Berechnen Sie die Masse, die eine Person noch haben darf, damit die Oberseite des Brettes genau mit der Wasseroberfläche abschließt!

**Lösung**

a) In diesem Fall trägt nicht nur das Brett zur Gewichtskraft bei, sondern auch die Person. Der Auftrieb wird aber nur durch den eingetauchten Teil des Brettes bestimmt. Es gilt hier

$$F_A = F_{g,\text{Brett}} + F_{g,\text{Person}}$$

Wir berechnen die Gewichtskraft des Brettes:

$$F_{g,\text{Brett}} = m_{\text{Brett}} \cdot g = \rho_{\text{Brett}} \cdot l \cdot b \cdot h \cdot g = 720 \cdot 2 \cdot 1,2 \cdot 0,3 \cdot 10 = 5\,184 \text{ N}$$

und der Person:

$$F_{g,\text{Person}} = m_{\text{Person}} \cdot g = 60 \cdot 10 = 600 \text{ N}$$

Der Auftrieb ist:

$$F_A = \rho_{\text{Fl}} \cdot V^* \cdot g = \rho_{\text{Fl}} \cdot l \cdot b \cdot h^* \cdot g = 1000 \cdot 2 \cdot 1,2 \cdot h^* \cdot 10 = 24\,000 \cdot h^* \text{ N}$$

und damit

$$\begin{aligned} F_A &= F_{g,\text{Brett}} + F_{g,\text{Person}} \\ 24\,000 \cdot h^* &= 5\,184 + 600 \\ h^* &= \frac{5\,184 + 600}{24\,000} = 0,241 \text{ m} \end{aligned}$$

Das Brett ragt noch  $h - h^* = 0,3 - 0,241 = 0,059 \text{ m} = 5,9 \text{ cm}$  aus dem Wasser.

b) Wir setzen jetzt die Höhe  $h^* = 0,3 \text{ m}$  ein und lassen die Masse der Person variabel. Der Auftrieb ist dann

$$F_A = \rho_{\text{Fl}} \cdot V^* \cdot g = \rho_{\text{Fl}} \cdot l \cdot b \cdot h^* \cdot g = 1000 \cdot 2 \cdot 1,2 \cdot 0,3 \cdot 10 = 7\,200 \text{ N}$$

und es ergibt sich

$$\begin{aligned} F_A &= F_{g,\text{Brett}} + F_{g,\text{Person}} \\ 7\,200 &= 5\,184 + 10 \cdot m_{\text{Person}} \\ m_{\text{Person}} &= \frac{7\,200 - 5\,184}{10} = 201,6 \text{ kg} \end{aligned}$$

Das heißt, das Brett hat eine ordentliche Tragfähigkeit und es kann mit einer Masse von bis zu 201,6 kg beladen werden ohne dass es unter geht.

**1.4 Das Mischen von verschiedenen Flüssigkeiten**

Wir haben zwei Flüssigkeiten. Flüssigkeit 1 hat die Masse  $m_1 = \rho_1 \cdot V_1$  mit der Dichte  $\rho_1$  und dem Volumen  $V_1$ , Flüssigkeit 2 hat die Masse  $m_2 = \rho_2 \cdot V_2$  mit der Dichte  $\rho_2$  und dem Volumen  $V_2$ . Wir mischen die beiden Flüssigkeiten zusammen. Für die Mischung gilt: die Gesamtmasse ist

$$m_{\text{ges}} = m_1 + m_2 \tag{1.7}$$

Wir nehmen an, dass das Volumen sich nicht ändert und daher ist das Gesamtvolumen

$$V_{\text{ges}} = V_1 + V_2 \tag{1.8}$$

Daraus ergibt sich für die Dichte

$$m_{\text{ges}} = m_1 + m_2 \quad (1.9)$$

$$\rho_{\text{ges}} \cdot V_{\text{ges}} = \rho_1 \cdot V_1 + \rho_2 \cdot V_2 \quad (1.10)$$

$$\rho_{\text{ges}} = \frac{\rho_1 \cdot V_1 + \rho_2 \cdot V_2}{V_{\text{ges}}} = \frac{\rho_1 \cdot V_1 + \rho_2 \cdot V_2}{V_1 + V_2} \quad (1.11)$$

$$(1.12)$$

### Beispiel (1.6)

100 g Wasser werden mit 200 cm<sup>3</sup> Glycerin gemischt (Dichte von Glycerin = 1,25 g/cm<sup>3</sup>). Berechnen Sie die Dichte der Mischung!

#### Lösung

Wir berechnen zuerst das Volumen vom Wasser  $V_1 = \frac{m_1}{\rho_1} = \frac{0,1}{1000} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$ . Die Dichte von Glycerin rechnen wir in SI-Einheiten um  $\rho_2 = 1,25 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1,25 \frac{10^{-3} \text{ kg}}{10^{-6} \text{ m}^3} = 1,25 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ . Dann setzen wir in die Formel ein

$$\rho_{\text{ges}} = \frac{\rho_1 \cdot V_1 + \rho_2 \cdot V_2}{V_1 + V_2} = \frac{1000 \cdot 10^{-4} + 1,25 \cdot 10^3 \cdot 200 \cdot 10^{-6}}{10^{-4} + 200 \cdot 10^{-6}} = 1166,67 \text{ kg/m}^3$$

### Beispiel (1.7)

Eine Flüssigkeit hat die Dichte von  $\rho_1 = 1,2 \text{ g/cm}^3$  und eine andere Flüssigkeit hat die Dichte  $\rho_2 = 0,9 \text{ g/cm}^3$ .

Wie viel Flüssigkeit 2 muß man zu 1 Liter der Flüssigkeit 1 mischen, damit die Mischung eine Dichte von 1 g/cm<sup>3</sup> hat?

#### Lösung

In diesem Fall ist es praktisch, das Volumen in cm<sup>3</sup> einzusetzen (1 Liter = 1000 cm<sup>3</sup>).

$$\rho_{\text{ges}} = \frac{\rho_1 \cdot V_1 + \rho_2 \cdot V_2}{V_1 + V_2}$$

$$1 = \frac{1,2 \cdot 1000 + 0,9 \cdot V_2}{1000 + V_2}$$

$$1000 + V_2 = 1200 + 0,9 \cdot V_2$$

$$V_2 - 0,9 \cdot V_2 = 1200 - 1000$$

$$0,1 \cdot V_2 = 200$$

$$V_2 = 2000 \text{ cm}^3 = 2 \text{ Liter}$$

## 1.5 Aufgaben

### Volumen, Dichte

(1.1) Ein Würfel mit der Seitenlänge  $l = 30 \text{ cm}$  hat die Masse  $m = 5400 \text{ kg}$ . Bestimmen Sie die Dichte!

(1.2) Ein Quader mit Länge und Breite  $l = b = 20 \text{ cm}$  und Höhe  $h = 70 \text{ cm}$  hat die Dichte  $\rho = 3000 \text{ kg/m}^3$ . Bestimmen Sie die Masse!

(1.3) Eine Kugel aus Kunststoff hat den Radius  $r = 2 \text{ cm}$  und die Dichte  $\rho = 700 \text{ kg/m}^3$ . Bestimmen Sie die Masse!

- (1.4) Ein Zylinder mit Radius  $r = 4$  cm und der Höhe  $h = 10$  cm hat die Masse  $m = 628$  g. Bestimmen Sie seine Dichte!
- (1.5) Was versteht man unter der Dichte eines Stoffes? Nennen Sie zwei Einheiten für die Dichte und den Umrechnungsfaktor!

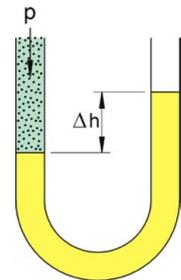
### Druck

- (1.6) a) Wie groß ist der Druck in einer Wassertiefe von 25 m? Wie groß ist die Kraft, die dort von außen auf das ca.  $1$  cm<sup>2</sup> große Trommelfell eines Tauchers wirkt?  
b) Pressluftflaschen, die von Tauchern verwendet werden, haben einen Innendruck von 150 bar. Welche Kraft wirkt auf den Verschluss (Ventil), wenn er eine Fläche von  $2$  cm<sup>2</sup> hat?
- (1.7) Eine bestimmte Flüssigkeit hat eine Dichte von  $\rho = 700$  kg/m<sup>3</sup>.  
a) Die Flüssigkeit befindet sich in einer Flasche und hat eine Höhe von 30 cm. Berechnen Sie den Druck auf den Boden der Flasche! (mit und ohne Luftdruck  $p_0 = 10^5$  Pa)  
b) Wie hoch steigt diese Flüssigkeit in einem evakuierten Rohr, wie man es für ein Barometer verwendet?
- (1.8) Als "Weiße Zwerge" bezeichnet man die sehr dichten Überreste von Sternen. Unsere Sonne wird auch einmal als Weißer Zwerg enden. Weiße Zwerge haben die sehr hohe Dichte von ca.  $10^6$  g/cm<sup>3</sup>.  
Berechnen Sie das Volumen eines Menschen mit der Masse von 75 kg, wenn er aus dem Material eines Weißen Zwerges bestehen würde! (Drücken Sie das Ergebnis in m<sup>3</sup> und mm<sup>3</sup> aus!)
- (1.9) Neutronensterne sind die Überreste von sehr massereichen Sternen, deren Material nur noch aus Neutronen besteht. Neutronensterne haben die unvorstellbare Dichte von ca.  $10^9$  kg/mm<sup>3</sup>.  
Berechnen Sie das Volumen eines Menschen mit der Masse von 75 kg, wenn er nur aus dem Material eines Neutronensterns bestehen würde! (Drücken Sie das Ergebnis in mm<sup>3</sup> und  $\mu\text{m}^3$  aus!)
- (1.10) Auf einer schiefen Ebene mit Neigungswinkel  $\alpha = 15^\circ$  steht eine Person ( $m = 100$  kg). Die gesamte Berührungsfläche der Schuhe mit der Ebene beträgt  $40$  cm<sup>2</sup>. Auf der Ebene befindet sich Eis, die Gleitreibungszahl beträgt  $\mu_G = 0,15$  und die Haftreibungszahl  $\mu_H = 0,2$ .  
a) Berechnen Sie den Druck, den die Person auf die Ebene ausübt!  
b) Entscheiden Sie durch Rechnung, ob die Person auf dem Eis stehen bleibt oder ob sie abrutscht!  
c) Entscheiden Sie durch Rechnung, ob eine Person mit der Masse von 50 kg auf dem Eis stehen bleibt oder ob sie abrutscht!
- (1.11) Die rechteckige Fläche eines Hausdaches ohne Neigung (Flachdach) ist 18 m lang und 9 m breit. Nach einem starken Schneefall ist es mit einer 20 cm hohen Schneeschicht bedeckt. Die Dichte von Schnee ist  $0,2$  g/cm<sup>3</sup>.  
a) Berechnen Sie die Masse des Schnees!  
b) Vergleichen Sie die Masse des Schnees mit der Masse eines Autos ( $m = 900$  kg). Wie viele Autos entsprechen der Schneelast auf dem Dach?  
c) Berechnen Sie den Druck, den der Schnee auf das Dach ausübt!
- (1.12) Das flüssige Metall Quecksilber (chemisches Zeichen Hg) steigt in einer evakuierten Röhre 760 mm hoch. Berechnen Sie die Dichte!

- (1.13) Hydraulische Pressen werden zum Anheben schwerer Lasten eingesetzt.
- Zeichnen Sie den prinzipiellen Aufbau einer einfachen hydraulischen Presse und erklären Sie deren Funktionsweise!
  - Der kleine Kolben (Pumpkolben) einer hydraulischen Presse hat eine Querschnittsfläche von  $10 \text{ cm}^2$  und wird mit der Kraft von  $250 \text{ N}$  betätigt. Welche Querschnittsfläche muss der große Kolben (Lastkolben) haben, um damit eine Kraft von  $15 \text{ kN}$  zu erhalten?

- (1.14) Auf der geschlossenen Seite eines Manometers in U-Form steigt die Flüssigkeitssäule ( $\rho = 2000 \text{ g/l}$ )  $20 \text{ cm}$  hoch. Wie groß ist der Druck auf der anderen Seite?

- (1.15) Eine Gasleitung wird an das linke Rohr eines U-Rohres angeschlossen, das mit einer Flüssigkeit ( $\rho_{\text{fl}} = 850 \text{ kg/m}^3$ ) gefüllt ist. Dadurch steht die Flüssigkeitssäule im rechten Rohr  $30 \text{ cm}$  höher als im linken. Die rechte Seite des U-Rohres ist nach oben hin offen.
- Wie hoch ist der Gasdruck  $p$ ?
  - Wie groß ist der Höhenunterschied der beiden Säulen in dem U-Rohr, wenn das Rohr mit Quecksilber ( $\rho_{\text{Hg}} = 13\,600 \text{ kg/m}^3$ ) gefüllt ist?



### Auftrieb, Schwimmen

- (1.16)
  - Was versteht man unter dem Auftrieb eines Körpers?
  - Wie lautet das Archimedische Prinzip?
  - Welche Größe misst man mit einem Aerometer?
  - Ein Körper sinkt in einer Flüssigkeit. Was können Sie über die Dichte von Körper und Flüssigkeit sagen?
- (1.17) Ein Körper schwimmt auf einer Flüssigkeit.
- Was können Sie über den Auftrieb des Körpers sagen?
  - Kann man über die Dichte von Körper und Flüssigkeit eine vergleichende Aussage machen?
- (1.18) Ein Stahlkörper von der Dichte  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$  hat eine Gewichtskraft von  $F_g = 3,12 \text{ N}$ . Berechnen Sie die Auftriebskraft des Körpers, wenn man ihn in Meerwasser ( $\rho_M = 1030 \text{ kg/m}^3$ ), Glycerin ( $\rho_G = 1260 \text{ kg/m}^3$ ) und Süßwasser ( $\rho_S = 1000 \text{ kg/m}^3$ ) taucht!
- (1.19) Ein Quader besteht aus einem Kunststoff mit der Dichte  $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$ . Wieviel Prozent seiner Höhe sind über dem Wasser?
- (1.20) Ein Quader hat die Höhe  $h = 20 \text{ cm}$ . Wenn er schwimmt, sind davon  $19 \text{ cm}$  unter Wasser. Bestimmen Sie seine Dichte!
- (1.21) Eine Person ( $m = 80 \text{ kg}$ ) sitzt auf einem Brett von der Form eines Quaders ( $l = 2,2 \text{ m}$ ,  $b = 0,8 \text{ m}$ ,  $h = 25 \text{ cm}$ ,  $\rho = 750 \text{ kg/m}^3$ ), das im Wasser schwimmt. Berechnen Sie, welcher Teil der Höhe noch aus dem Wasser ragt!
- (1.22) Ein Floß wird aus Holzbalken ( $\rho_{\text{holz}} = 600 \text{ kg/m}^3$ ) der Höhe  $h = 15 \text{ cm}$  zusammengefügt. Welche Grundfläche muss das Floß mindestens haben, damit es bei der Belastung mit einer Person ( $m = 70 \text{ kg}$ ) noch  $5 \text{ cm}$  aus dem Wasser herausragt?
- (1.23) Zwei gleich große Körper ( $V = 1 \text{ cm}^3$ ) aus Styropor ( $\rho_S = 20 \text{ kg/m}^3$ ) und Aluminium ( $\rho_A = 2700 \text{ kg/m}^3$ ) werden durch eine dünne Schicht Klebstoff (die vernachlässigt werden kann) verbunden

und ins Wasser geworfen.

Was passiert mit diesem Körper? (Er geht unter / schwebt im Wasser / schwimmt auf dem Wasser.) Begründen Sie Ihre Antwort rechnerisch.

- (1.24) Ein zylinderförmiges Fass ( $m = 10 \text{ kg}$ ,  $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$ ) schwimmt im Wasser. Berechnen Sie wie groß die Masse  $M$ , die man in das Fass gibt, maximal sein darf, damit das ganze System gerade noch schwimmt und nicht sinkt!
- (1.25) Ein Vollzylinder (Dichte  $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$ , Volumen  $V = 24 \text{ cm}^3$ ) schwimmt mit vertikaler Längsachse so in einer Flüssigkeit, dass ein Viertel seiner Höhe über der Flüssigkeit liegt. Die Flüssigkeit selbst befindet sich in einem quaderförmigen Gefäß mit der Grundfläche  $A_{gef} = 100 \text{ cm}^2$ .
- Bestimmen Sie die Dichte der Flüssigkeit!
  - Um wie viel cm sinkt die Flüssigkeit im Gefäß, wenn man den Zylinder heraus nimmt?

### Mischen von Flüssigkeiten

- (1.26) Es werden 9 Liter einer Flüssigkeit A ( $\rho_A = 700 \text{ g/m}^3$ ) mit 1 Liter einer Flüssigkeit B gemischt. Das Volumen ändert sich bei diesem Vorgang nicht. Die Dichte der Mischung beträgt  $\rho_{AB} = 1400 \text{ g/l}$ . Berechnen Sie die Dichte der Flüssigkeit B!
- (1.27) Es werden 8 Liter einer Flüssigkeit A ( $\rho_A = 1000 \text{ kg/m}^3$ ) mit einer Flüssigkeit B ( $\rho_B = 800 \text{ kg/m}^3$ ) gemischt. Das Volumen ändert sich bei diesem Vorgang nicht. Die Dichte der Mischung beträgt  $\rho_{AB} = 920 \text{ kg/m}^3$ . Berechnen Sie das zugeführte Volumen von B!

## 2 Temperatur und Wärmemenge

### 2.1 Temperatur

Es ist nicht leicht, eine genaue Definition von Temperatur zu geben: Es gibt Zustände, die der Mensch als "heiß" bezeichnet und andere, die man "kalt" nennt. Wie kann man aber verschiedene Temperaturen mit Zahlen vergleichen?

Was ändert sich, wenn sich die Temperatur ändert?

*Ausdehnung:* Die meisten Körper dehnen sich aus, wenn man sie erwärmt.

*Änderung des "Aggregatzustandes":* Viele Stoffe verdampfen oberhalb einer bestimmten Temperatur, andere erstarren unterhalb einer bestimmten Temperatur.

*Energiezufuhr:* Um einen Körper zu erwärmen, braucht man Energie.

#### Temperaturgleichheit (Nullter Hauptsatz der Wärmelehre)

Wird zwischen zwei Körpern eines abgeschlossenen Systems genügend lange Zeit Wärmeübertragung ermöglicht, so tritt von selbst Temperaturgleichheit ein.

#### 2.1.1 Temperaturmessung

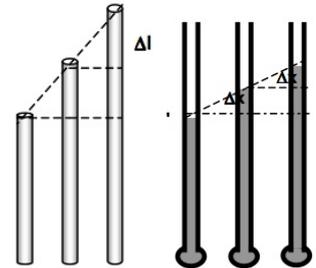
Eine Art der Temperaturmessung verwendet die Ausdehnung von Körpern bei der Temperaturerhöhung.

Wir erwärmen einen Metallstab (linkes Bild) und eine Flüssigkeit in einem Rohr (rechtes Bild).

Wir beginnen mit einer Temperatur  $t_1$  für beide Körper und erwärmen sie gleichzeitig auf eine neue Temperatur  $t_2$ . Der Eisenstab hat sich um  $\Delta l$  ausgedehnt und die Flüssigkeit um  $\Delta x$ .

Nun erwärmen wir wieder und zwar solange bis sich der Metallstab nochmals um  $\Delta l$  ausgedehnt hat. Diese Temperatur nennen wir  $t_3$ . Die Flüssigkeit hat sich auch um  $\Delta x$  ausgedehnt.

Die Ausdehnung zwischen  $t_3$  und  $t_2$  ist also bei beiden Körpern gleich der Ausdehnung zwischen  $t_2$  und  $t_1$ . Es sind daher auch die Temperaturintervalle  $\Delta t = t_3 - t_2 = t_2 - t_1$  gleich groß.



Die Änderung der Temperatur  $\Delta t$  ist proportional zur Wärmeausdehnung  $\Delta l$  von langen Körpern

$$\Delta t = \text{const} \cdot \Delta l \quad (2.1)$$

#### 2.1.2 Festlegung einer Temperaturskala

Um eine praktische Maßeinheit für die Temperatur zu bekommen, verwendet man das Gesetz der Längenausdehnung und legt zusätzlich zwei Fixpunkte auf der Skala fest.

Man kann Temperatur messen, indem man zwei Temperaturpunkte willkürlich festsetzt und annimmt, daß die Temperaturänderung  $\Delta t$  proportional zur Längenänderung  $\Delta l$  ist.

Diese Art der Temperaturmessung ist nicht die einzig mögliche, aber sie ist die einfachste Art. Verschiedene Temperatur-Skalen:

- Bei der **“Celsius-Skala”** (gemessen in Grad Celsius °C, seit 1742) legt man fest:
  - $t_1 = 0^\circ\text{C}$ : Temperatur, bei der Wasser gefriert (Gefrierpunkt des Wassers)
  - $t_2 = 100^\circ\text{C}$ : Temperatur, bei der Wasser (bei Normalluftdruck) siedet (Siedepunkt des Wassers)
- Bei der **“Kelvin-Skala”** (gemessen in Kelvin K, seit 1848, SI-Einheit) legt man fest:
  - $T_1 = 0\text{ K}$ : absoluter Temperatur-Nullpunkt
  - $T_2 = 273,15\text{ K}$ : Tripelpunkt von Wasser
 Umrechnung:  $t_C = T_K - 273,15$ ,  $T_K = t_C + 273,15$
- Bei der **“Fahrenheit-Skala”** (gemessen in Grad Fahrenheit °F, seit 1714) legt man fest:
  - $t_1 = 0^\circ\text{F}$ : Temperatur des strengen Winters 1708/09 in Danzig (auch durch “Kältemischung” herstellbar)
  - $t_2 = 32^\circ\text{F}$ : Gefrierpunkt des reinen Wassers (Eispunkt)
  - $t_3 = 96^\circ\text{F}$ : Körpertemperatur eines gesunden Menschen
 Umrechnung:  $t_C = (t_F - 32) \cdot \frac{5}{9}$ ,  $t_F = t_C \cdot 1,8 + 32$

### Beispiel (2.1)

Ein Metallstab hat am Gefrierpunkt des Wassers die Länge  $l_1 = 2\text{ m}$  und am Siedepunkt des Wassers die Länge  $l_2 = 2,4\text{ m}$ . Wie groß ist seine Temperatur  $t$  bei der Länge  $l = 2,17\text{ m}$ ?

#### Lösung

$$\begin{aligned} \text{es gilt: } \frac{\Delta t}{\Delta l} = \text{const} &\Rightarrow \frac{\Delta t_1}{\Delta l_1} = \frac{\Delta t_2}{\Delta l_2} \\ \text{eingesetzt: } \frac{t_2 - t_1}{l_2 - l_1} = \frac{t - t_1}{l - l_1} &\Rightarrow \frac{100 - 0}{2,4 - 2} = \frac{t - 0}{2,17 - 2} \Rightarrow t = \frac{100 \cdot 0,17}{0,4} = 42,5^\circ\text{C} \end{aligned}$$

## 2.2 Definition der Wärmemenge und Wärmeenergie

### 2.2.1 Unterschied Temperatur – Wärme

Die Temperatur wird manchmal mit der Wärme eines Körpers verwechselt. Die Wärme oder Wärmeenergie ist jedoch eine andere physikalische Größe.

Die Temperatur beschreibt den Zustand eines Systems. Die Änderung der Wärmeenergie charakterisiert die Änderung des Systemzustandes. Die Veränderung der Wärmeenergie führt dabei bei verschiedenen Arten von Zustandsänderungen (z. B. isobar oder isochor) zu unterschiedlichen Temperaturveränderungen.

Das Verhältnis von Wärmeänderung und Temperaturänderung heißt Wärmekapazität<sup>1</sup>.

### 2.2.2 Spezifische Wärmekapazität

Wenn man einen Körper erwärmt, muß man ihm Energie zuführen. Wenn er sich abkühlt, verliert er diese Energie wieder. Diese Energie heißt Wärmeenergie oder Wärmemenge  $\Delta Q$ .

*Einheit:*  $[\Delta Q] = \text{J Joule}$

<sup>1</sup>Das Wort Kapazität hat die Bedeutung von Aufnahmefähigkeit, Fassungsvermögen, Aufnahmevermögen. Es gibt also an, dass für etwas Platz ist.

Die Wärmeenergie  $\Delta Q$ , die man einem Körper zuführen muß, um ihn um die Temperatur  $\Delta t$  zu erwärmen ist proportional zu seiner Masse  $m$  und zur Temperaturänderung  $\Delta t$ .

$$\Delta Q = c \cdot m \cdot \Delta t \quad (2.2)$$

Die Konstante  $c$  hängt vom Material des Körpers ab und heißt spezifische Wärmekapazität (spezifische Wärme) des Körpers.

Wenn man die doppelte Masse erwärmt, braucht man auch die doppelte Energie. Wenn man dieselbe Masse um die doppelte Temperaturdifferenz erwärmt, braucht man ebenfalls die doppelte Energie (z.B. muss der Heizstrom doppelt so lang fließen oder man muß einen Körper doppelt so lange reiben). Wenn man  $m = 1 \text{ kg}$  eines Stoffes um  $\Delta t = 1^\circ\text{C}$  erwärmen will, braucht man  $\Delta Q = c$ .

Die spezifische Wärmekapazität  $c$  eines Stoffes ist die Energie, die nötig ist, um 1 kg dieses Stoffes um  $\Delta t = 1^\circ\text{C}$  zu erwärmen.

*Einheit:*  $[c] = \left[ \frac{\Delta Q}{m \cdot \Delta t} \right] = \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} = \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$

Die spezifische Wärmekapazität  $c$  ist fast unabhängig von der Temperatur. Es ist bei vielen Körpern fast gleichgültig, ob man den Körper von  $13^\circ\text{C}$  auf  $14^\circ\text{C}$  oder von  $53^\circ\text{C}$  auf  $54^\circ\text{C}$  erwärmt.

Material	spezifische Wärmekapazität $c$ in $\text{J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$
Wasser	4186
Meerwasser	3900
Wasserdampf (bei $110^\circ\text{C}$ )	2010
Eis (bei $-10^\circ\text{C}$ )	2220
Luft (bei $50^\circ\text{C}$ )	1050
Glas	840
Holz	1680
Alkohol	2430
Aluminium	920
Blei	130
Eisen, Stahl	460
Kupfer	390
Silber	240
Quecksilber	140

### 2.2.3 Wärme eines Gefäßes (Gefäßwärme)

Flüssigkeiten oder Gas werden meist in einem Gefäß (Kalorimetergefäß) erwärmt. Auch dafür ist Energie nötig. Man schreibt für diese sogenannte Gefäßwärme

$$\Delta Q_{\text{gef}} = C_{\text{gef}} \cdot \Delta t \quad (2.3)$$

Die Konstante  $C_{\text{gef}}$  ist die Energie für die Erwärmung des ganzen Gefäßes (nicht 1 kg) um  $\Delta t = 1^\circ\text{C}$ .

*Einheit:*  $[C_{\text{gef}}] = \left[ \frac{\Delta Q_{\text{gef}}}{\Delta t} \right] = \frac{\text{J}}{^\circ\text{C}} = \frac{\text{J}}{\text{K}}$

*Kalorimetergefäß:*

Für Wärme-Experimente benutzt man ein Gefäß mit doppelter Wand. Zwischen den beiden Wänden

herrscht Vakuum, damit die Wärme nicht nach außen fließen kann. Die Innenseite ist zusätzlich noch verspiegelt, damit die Wärmestrahlen in das Innere zurück reflektiert werden.

Man kann sich ein Kalorimetergefäß auch als eine Art Thermoskanne zum „Warmhalten“ vorstellen.

### 2.2.4 Umwandlung von mechanischer Energie in Wärmeenergie

Die Wärmeinheit Kilokalorie (kcal) ist in folgender Art und Weise definiert. Eine Kilokalorie ist die Menge an Wärme, die erforderlich ist, um 1 kg Wasser um  $1^\circ\text{C}$  zu erwärmen (von  $14,5^\circ\text{C}$  auf  $15,5^\circ\text{C}$ ). Es gilt  $1 \text{ kcal} = 4186 \text{ J}$ . Diese Wärme  $Q = 1 \text{ kcal}$  kann gemessen werden, indem man die zum Erhitzen von Wasser erforderliche Energie bestimmt.

Systematische Experimente, in denen mechanische Energie direkt in Wärme umgewandelt wird, wurden erstmals um 1840 von James Joule durchgeführt. Sein Versuchsaufbau ist schematisch in der Abbildung dargestellt. Diese Beziehung zwischen mechanischer und thermischer Energie wird mechanisches Wärmeäquivalent genannt.

#### Versuchsaufbau

Es wird ein Gewicht mit der Masse  $m$  von der Schwerkraft nach unten gezogen. Die mechanische Energie des fallenden Gewichts wird durch die Paddel (Schaufelrad) in der Flüssigkeit in Wärmeenergie umgesetzt. Die Paddel drehen sich, wenn das Gewicht sinkt, und erwärmen die Flüssigkeit im Gefäß. Der Temperaturanstieg der Flüssigkeit wird gemessen. Dadurch kann die spezifische Wärmekapazität der Flüssigkeit bestimmt werden.

Wir verwenden den Energieerhaltungssatz:

$$\Delta E_{\text{ges}} = \Delta E_{\text{kin}} + \Delta E_{\text{pot}} + \Delta Q_{\text{fl}} + \Delta Q_{\text{gef}} = 0 \quad (2.4)$$

Die Bewegung ist eine beschleunigte Bewegung. Das heißt am Anfang bewegt sich  $m$  gleichmäßig beschleunigt. Sehr bald ist aber die Reibung in der Flüssigkeit so groß, daß  $m$  gleichförmig sinkt und die Änderung der kinetischen Energie gleich Null ist  $\Delta E_{\text{kin}} = 0$ . Nun beginnt man die Messung der Temperatur und die Messung der Höhenänderung  $\Delta h$  der Masse.

Es gilt:

$$\Delta E_{\text{pot}} + \Delta Q_{\text{fl}} + \Delta Q_{\text{gef}} = 0 \quad (2.5)$$

$$m \cdot g \cdot \Delta h + c_{\text{F1}} \cdot m_{\text{F1}} \cdot \Delta T + c_{\text{gef}} \cdot \Delta T = 0 \quad (2.6)$$

Wir führen den Versuch mit zwei unterschiedlichen Mengen der Flüssigkeit  $m_1$  und  $m_2$  durch, die um die Temperaturen  $\Delta T_1$  und  $\Delta T_2$  erwärmt werden und das Gewicht um  $\Delta h_1$  und  $\Delta h_2$  sinkt. Damit ergibt sich

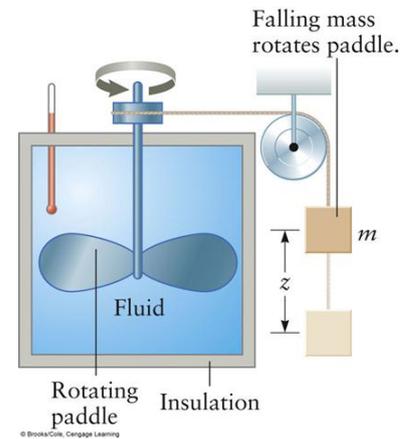
$$m \cdot g \cdot \Delta h_1 + c_{\text{F1}} \cdot m_1 \cdot \Delta T_1 + c_{\text{gef}} \cdot \Delta T_1 = 0 \quad (2.7)$$

$$m \cdot g \cdot \Delta h_2 + c_{\text{F1}} \cdot m_2 \cdot \Delta T_2 + c_{\text{gef}} \cdot \Delta T_2 = 0 \quad (2.8)$$

In diesem Gleichungssystem gibt es eigentlich nur zwei Unbekannte:  $c_{\text{F1}}$  und  $c_{\text{gef}}$ . Das Gleichungssystem kann also gelöst werden.

#### Beispiel (2.2)

In einem Gefäß befindet sich eine Flüssigkeit mit unbekannter spezifischer Wärmekapazität. Sie soll durch ein rotierendes Schaufelrad erwärmt werden, das über eine Rolle mit einem sinkenden



Gewicht ( $m = 10$  kg) verbunden ist. Nach dem Start des Gewichts wartet man, bis es gleichförmig sinkt. Danach beginnt die Temperaturmessung.

Für die Erwärmung von  $m_1 = 1$  kg der Flüssigkeit um  $1^\circ\text{C}$  sinkt das Gewicht um  $\Delta h_1 = -51,86$  m nach unten. Nun wiederholt man das Experiment mit  $m_2 = 2$  kg Flüssigkeit. Für eine Erwärmung um  $1^\circ\text{C}$  muss jetzt das Gewicht um  $\Delta h_2 = -93,72$  m sinken.

Berechnen Sie die spezifische Wärmekapazität der Flüssigkeit!

### Lösung

Wir setzen in den Energieerhaltungssatz ein:

$$m \cdot g \cdot \Delta h_1 + c_{\text{Fl}} \cdot m_1 \cdot \Delta T_1 + c_{\text{gef}} \cdot \Delta T_1 = 0$$

$$m \cdot g \cdot \Delta h_2 + c_{\text{Fl}} \cdot m_2 \cdot \Delta T_2 + c_{\text{gef}} \cdot \Delta T_2 = 0$$

$$10 \cdot g \cdot (-51,86) + c_{\text{Fl}} \cdot 1 \cdot 1 + c_{\text{gef}} \cdot 1 = 0$$

$$10 \cdot g \cdot (-93,72) + c_{\text{Fl}} \cdot 2 \cdot 1 + c_{\text{gef}} \cdot 1 = 0$$

$$c_{\text{Fl}} + c_{\text{gef}} = 5186 \quad (\text{I})$$

$$2 \cdot c_{\text{Fl}} + c_{\text{gef}} = 9372 \quad (\text{II})$$

Durch Subtraktion der beiden letzten Gleichungen (II)-(I) ergibt sich

$$c_{\text{Fl}} = 4186 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}) \quad (2.9)$$

Bei dieser Flüssigkeit handelt es sich um Wasser.

## 2.3 Mischen von Flüssigkeiten mit Temperaturänderung

Kommen zwei oder mehr Körper unterschiedlicher Temperatur in Kontakt und bleiben sich selbst überlassen, so erfolgt zwischen ihnen ein Wärmeaustausch und damit ein Temperaturengleich. Es gilt:

### Grundgesetz des Wärmeaustausches:

Wenn zwei oder mehr Körper unterschiedlicher Temperatur in engen Kontakt miteinander kommen, so geben die Körper höherer Temperatur Wärme ab, die Körper niedrigerer Temperatur nehmen Wärme auf. Die abgegebene Wärme ist genauso groß wie die aufgenommene Wärme.

$$Q_{\text{ab}} = Q_{\text{auf}} \quad (2.10)$$

Die Änderung der gesamten Wärme ist dann Null.

$$\Delta Q_{\text{ges}} = 0 \quad (2.11)$$

Wir mischen zwei Flüssigkeiten (oder andere Stoffe) mit den Massen  $m_1$  und  $m_2$  und den spezifischen Wärmekapazitäten  $c_1$  und  $c_2$  und den Temperaturen  $t_1$  und  $t_2$  miteinander. Nach dem Wärmeausgleich ergibt sich die gemeinsame Temperatur von  $T$ . Eine der Flüssigkeiten befindet sich am Anfang in einem Kalorimetergefäß mit der Gefäßwärme  $c_{\text{gef}}$  und der Temperatur  $t_{\text{gef}}$  und die andere Flüssigkeit wird dazu geschüttet. Es gilt der Energieerhaltungssatz:

$$\Delta Q_{\text{ges}} = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_{\text{gef}} = 0 \quad (2.12)$$

$$c_1 \cdot m_1 \cdot (t - t_1) + c_2 \cdot m_2 \cdot (t - t_2) + c_{\text{gef}} \cdot (t - t_{\text{gef}}) = 0 \quad (2.13)$$

Mit diesem Ansatz kann man die spezifische Wärmekapazität einer Flüssigkeit berechnen. Wenn man die spezifische Wärmekapazität kennt, kann man damit auch die Gefäßwärme bestimmen.

### Beispiel (2.3)

In einem Kalorimetergefäß ( $c_{\text{gef}} = 500 \text{ J}/^\circ\text{C}$ ) befinden sich 2 kg Wasser mit der Temperatur  $t_1 = 10^\circ\text{C}$ . Wir tauchen ein Stück Kunststoff ( $m_2 = 0,8 \text{ kg}$ ) mit der Temperatur  $t_2 = 60^\circ\text{C}$  ins Wasser. Nun wird der Kunststoff so lange kälter und das Wasser mit dem Gefäß wärmer, bis alle dieselbe Temperatur  $t = 20^\circ\text{C}$  haben.

Berechnen Sie  $c_k$ !

### Lösung

Wir benutzen den Energieerhaltungssatz:

$$\begin{aligned}\Delta Q_{\text{ges}} &= \Delta Q_{\text{wasser}} + \Delta Q_k + \Delta Q_{\text{gef}} = 0 \\ c_{\text{wasser}} \cdot m_1 \cdot (t - t_1) + c_k \cdot m_2 \cdot (t - t_2) + c_{\text{gef}} \cdot (t - t_{\text{gef}}) &= 0\end{aligned}$$

daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}c_k &= \frac{-c_{\text{wasser}} \cdot m_1 \cdot (t - t_1) - c_{\text{gef}} \cdot (t - t_{\text{gef}})}{m_2 \cdot (t - t_2)} \\ c_k &= \frac{-4186 \cdot 2 \cdot (20 - 10) - 500 \cdot (20 - 10)}{0,8 \cdot (20 - 60)} \\ c_k &= 2772,5 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})\end{aligned}$$

## 2.4 Aufgaben

### Temperaturmessung

- (2.1) Eine Flüssigkeit in einem Glaskolben hat am Gefrierpunkt des Wassers die Länge  $x_1 = 2 \text{ m}$  und am Siedepunkt des Wassers die Länge  $x_2 = 2,74 \text{ m}$ . Wie groß ist die Temperatur, wenn die Flüssigkeit 2,5 m lang ist?
- (2.2) Ein Stab aus Metall ist am Gefrierpunkt des Wassers 2,95 m lang, bei  $20^\circ\text{C}$  ist er 3 m lang. Wie lang ist er bei  $4^\circ\text{C}$ ?
- (2.3) Wir erwärmen zwei lange Körper von  $t_1$  auf  $t_2$ . Körper A wird um 10 mm länger, Körper B wird um 3 mm länger. Nun erwärmen wir die beiden Körper weiter auf  $t_3$ . A wird um 15 mm länger. Um wieviel mm verlängert sich B?
- (2.4) Welche Größe ist bei der Temperaturmessung zur Längenänderung proportional?  
Wie viele Punkte einer Temperaturskala muß man willkürlich festsetzen?  
Wie nennt man die Temperatur  $t = 0^\circ\text{C}$ ? Wie heißt die Temperatur  $t = 100^\circ\text{C}$ ?

### Spezifische Wärmekapazität und Mechanisches Wärmeäquivalent

- (2.5) a) Was gibt die spezifische Wärmekapazität eines Körpers an? Was ist die Gefäßwärme? Welche Formeln und Einheiten gelten für diese Größen?  
b) Ein Behälter enthält 100 l Wasser. Berechnen Sie die Wärme, die erforderlich ist, um diese Wassermenge von  $20^\circ\text{C}$  auf  $82^\circ\text{C}$  zu erwärmen!

- (2.6) In einem Schwimmbad ist die Heizung ausgefallen. Dadurch ist die Wassertemperatur im Schwimmerbecken von  $23^{\circ}\text{C}$  auf  $18^{\circ}\text{C}$  gesunken. Das Schwimmerbecken ist 50 m lang, 25 m breit und 2,3 m tief.
- Berechne die Masse des Wassers im Schwimmerbecken!
  - Berechne die notwendige Energie, das Wasser im Schwimmerbecken wieder auf  $23^{\circ}\text{C}$  zu erwärmen!
- (2.7) Die spezifische Wärmekapazität einer unbekanntenen Flüssigkeit soll bestimmt werden. In einem Gefäß befindet sich die Flüssigkeit. Sie soll durch ein rotierendes Schaufelrad erwärmt werden, das über eine Rolle mit einem sinkenden Gewicht ( $m = 20\text{ kg}$ ) verbunden ist. Nach dem Start des Gewichts wartet man, bis es gleichförmig sinkt. Danach beginnt die Temperaturmessung. Für die Erwärmung von  $m_1 = 1\text{ kg}$  der Flüssigkeit um  $1^{\circ}\text{C}$  sinkt das Gewicht um 70 m nach unten. Nun wiederholt man das Experiment mit  $m_2 = 2\text{ kg}$  Flüssigkeit. Für eine Erwärmung um  $1^{\circ}\text{C}$  muss jetzt das Gewicht um 130 m sinken.
- Berechnen Sie die spezifische Wärmekapazität der Flüssigkeit!
  - Warum muss man warten bis das Gewicht gleichförmig sinkt?
  - Warum muss man das Experiment mit verschiedenen Massen der Flüssigkeit durchführen?
- (2.8) In einem Gefäß ( $C_{\text{gef}} = 10\text{ J}/^{\circ}\text{C}$ ) befinden sich  $m_1 = 5\text{ kg}$  einer unbekanntenen Flüssigkeit mit der spezifischen Wärme  $c_{\text{fl}} = 2000\text{ Einheiten}$ . Sie soll durch ein rotierendes Schaufelrad erwärmt werden, das über eine Rolle mit einem sinkenden Gewicht ( $m = 20\text{ kg}$ ) verbunden ist. Nach dem Start des Gewichts wartet man, bis es gleichförmig sinkt. Danach beginnt die Messung der Temperatur der Flüssigkeit und der Höhe der sinkenden Masse  $m$ . Während das Gewicht um  $\Delta h$  sinkt, erhöht sich die Temperatur der Flüssigkeit um  $3^{\circ}\text{C}$ .
- Formulieren Sie die potentielle Energieänderung der Masse  $m$ !
  - Berechnen Sie  $\Delta h$ !
  - Warum muss man warten bis das Gewicht gleichförmig sinkt?
- (2.9) Die spezifische Wärme einer Flüssigkeit soll durch Reibung (Schaufelrad) bestimmt werden: Wenn die Masse  $m = 15\text{ kg}$  um 12 m gleichförmig sinkt, dann werden 0,2 kg dieser Flüssigkeit im Gefäß um  $3^{\circ}\text{C}$  erwärmt. Wenn die Masse 15 kg um 20 m sinkt, so werden 0,4 kg der Flüssigkeit um  $3^{\circ}\text{C}$  erwärmt. Berechnen Sie die spezifische Wärmekapazität der Flüssigkeit!

### Mischen von Flüssigkeiten

- (2.10) In einem Kalorimetergefäß ( $c_{\text{gef}} = 200\text{ J}/^{\circ}\text{C}$ ) befinden sich 5 kg Wasser bei  $20^{\circ}\text{C}$ . Wir mischen es mit 2 kg eines  $90^{\circ}\text{C}$  heißen Öls. Nach dem Wärmeaustausch ergibt sich eine gemeinsame Temperatur  $t = 40^{\circ}\text{C}$ . Bestimmen Sie die spezifische Wärme des Öls!
- (2.11) In einem Kalorimetergefäß befinden sich 4 kg Wasser bei  $20^{\circ}\text{C}$ . Wir mischen es mit 4kg Wasser mit  $60^{\circ}\text{C}$ . Nach dem Temperatenausgleich beträgt die gemeinsame Temperatur  $t = 39^{\circ}\text{C}$ . Bestimmen Sie die Gefäßwärme!
- (2.12) In einem Kalorimetergefäß ( $c_{\text{gef}} = 200\text{ J}/^{\circ}\text{C}$ ) befinden sich 0,5 kg Wasser bei  $10^{\circ}\text{C}$ . Welche Temperatur ergibt sich nach dem Wärmeaustausch, wenn wir 1,5 kg eines  $50^{\circ}\text{C}$  heißen Öls mit  $c_{\text{öl}} = 2000\text{ J}/\text{kg}^{\circ}\text{C}$  zugeben?
- (2.13) Man erwärmt einen Kupferwürfel (Masse  $m_1 = 200\text{ g}$ , spezifische Wärmekapazität  $c_1 = 394\text{ J}/(\text{kg }^{\circ}\text{C})$ ) auf die Temperatur  $t_1 = 100^{\circ}\text{C}$  und legt ihn in ein Kalorimetergefäß, das mit einer unbekanntenen Flüssigkeit der Masse  $m_2 = 0,5\text{ kg}$  und der Temperatur  $t_2 = 20^{\circ}\text{C}$  gefüllt ist. Das

Kalorimetergefäß hat die Gefäßwärme  $c_{\text{gef}} = 58 \text{ J/}^\circ\text{C}$ .

Welche spezifische Wärmekapazität  $c_2$  hat die Flüssigkeit, wenn die Mischtemperatur  $t = 25^\circ\text{C}$  beträgt?

- (2.14) Es werden 200 l Badewasser mit der Temperatur von  $38^\circ\text{C}$  benötigt. Wie viel Liter heißes Wasser mit der Temperatur von  $65^\circ\text{C}$  und wie viel Liter kaltes Wasser mit der Temperatur von  $14^\circ\text{C}$  müssen dafür gemischt werden?
- (2.15) In einem Gefäß (Gefäßwärme  $c_{\text{gef}} = 200 \text{ J/}^\circ\text{C}$ ) befinden sich 2 kg einer Flüssigkeit A mit der spezifischen Wärmekapazität  $c_A = 4000 \text{ J/(kg }^\circ\text{C)}$  bei  $90^\circ\text{C}$ . Wir geben 3 kg einer Flüssigkeit B mit  $c_B = 2000 \text{ J/(kg }^\circ\text{C)}$  und  $20^\circ\text{C}$  dazu.  
Berechnen Sie die gemeinsame Temperatur  $t$ , die sich nach dem Wärmeaustausch ergibt!
- (2.16) Ein Aluminium-Meßbecher der Masse  $m_B = 0,1 \text{ kg}$  mit der spezifischen Wärme  $c_B = 920 \text{ J/(kg }^\circ\text{C)}$  wird bei einer Temperatur von  $T_W = 20^\circ\text{C}$  mit Wasser gefüllt. Die Masse des Wasser ist  $m_W = 0,4 \text{ kg}$ . Eine unbekannte Substanz mit einer Masse von  $m_P = 0,39 \text{ kg}$  und einer Anfangstemperatur von  $T_P = 200^\circ\text{C}$  wird zugegeben. Nach einer Weile stellt sich die Temperatur des Wassers und der unbekannt Substanz bei  $t = 25^\circ\text{C}$  ein.  
Berechnen Sie die spezifische Wärmekapazität der unbekannt Substanz!

## 3 Einfache Gesetze für ideale Gase

### 3.1 Das ideale Gas und seine Zustandsänderungen

Gase werden durch drei Zustandsgrößen beschrieben:

- Druck  $p$
- Temperatur  $t$  (bzw.  $T$ )
- Volumen  $V$

Es gibt einige wichtige Zustandsänderungen von Gasen:

- isotherme Zustandsänderung: hier ist die Temperatur konstant  $t = \text{const}$ , Druck und Volumen ändern sich
- isobare Zustandsänderung: hier ist der Druck konstant  $p = \text{const}$ , Temperatur und Volumen ändern sich
- isochore Zustandsänderung: hier ist das Volumen konstant  $V = \text{const}$ , Druck und Temperatur ändern sich
- adiabatische Zustandsänderung: hier ist die ausgetauschte Wärme konstant  $\Delta Q = 0$ , Druck, Temperatur und Volumen ändern sich

Ein ideales Gas hat folgende Eigenschaften:

- die Teilchen können als sehr klein angenommen werden
- der Abstand der Teilchen ist sehr groß
- die Kräfte zwischen den Teilchen sind (fast) gleich Null

Beim idealen Gas bewegen sich die Teilchen ungeordnet umher und zwischen den Teilchen und den Wänden finden nur elastische Stöße statt. Ein Gasteilchen bewegt sich also geradlinig mit einer konstanten Geschwindigkeit, bis ein Stoß es in eine andere Richtung lenken und dabei beschleunigen oder abbremsen kann.

Für ideale Gase gelten besonders einfache Gesetze

Beispiele: Helium (He), Neon (Ne), Sauerstoff ( $\text{O}_2$ ), Stickstoff ( $\text{N}_2$ ), Wasserstoff ( $\text{H}_2$ )

Ein Gas kann komprimiert werden, dies nennt man Kompression. Dabei wird das Volumen verkleinert. Ein Gas kann expandiert werden, dies nennt man Expansion. Dabei wird das Volumen vergrößert.

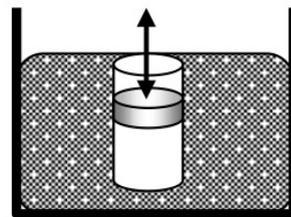
### 3.2 Isotherme Zustandsänderung

Bei der isothermen Zustandsänderung bleibt die Temperatur konstant.

$$t = \text{const} \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = t_2 \tag{3.1}$$

Man ändert das Volumen in einem Gaszylinder, in dem man den Kolben hinein drückt oder heraus zieht. Dabei kann sich die Temperatur ändern:

- Bei der Kompression wird das Gas im allgemeinen wärmer. Wenn man aber sehr langsam komprimiert, so kann diese überschüssige Wärme (Kompressionswärme) in die Umgebung abfließen, und es bleibt die Temperatur  $t$  konstant.
- Bei der Expansion wird das Gas im allgemeinen kalt, wenn man aber sehr langsam expandiert, so kann die fehlende Wärme (Expansionswärme) aus der Umgebung zufließen, und es bleibt die Temperatur  $t$  konstant.



Als Umgebung nimmt man am besten eine große Menge Flüssigkeit (z.B. Wasser). Sie kann viel Wärme vom Gas aufnehmen oder viel Wärme an das Gas abgeben. Man nennt so etwas einen Wärmespeicher, ein Wärmereservoir oder ein Wärmebad.

Die isotherme Zustandsänderung erfolgt sehr langsam. Dabei kann sich die Temperatur mit der Umgebung (Wärmebad) ausgleichen. Es gilt (Gesetz von Boyle-Mariotte):

$$t = \text{const} \Leftrightarrow t_1 = t_2 \qquad p \cdot V = \text{const} \Leftrightarrow p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 \qquad (3.2)$$

Die Konstante hängt von der Temperatur ab.

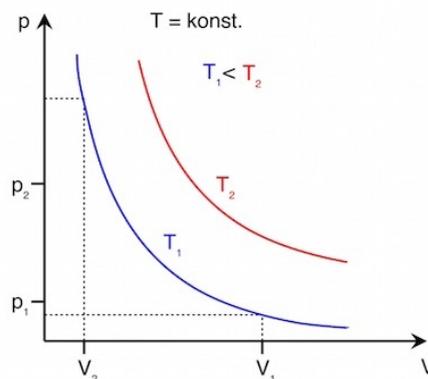
Das Gesetz wurde nach Robert Boyle und Edme Mariotte benannt, die es 1662 bzw. 1676 unabhängig voneinander entdeckten.

**p-V-Diagramm**

Die Zustandsänderung kann in einem p-V-Diagramm dargestellt werden. Der funktionale Zusammenhang betrachtet den Druck als eine Funktion des Volumens bei konstanter Temperatur. Es ist dann

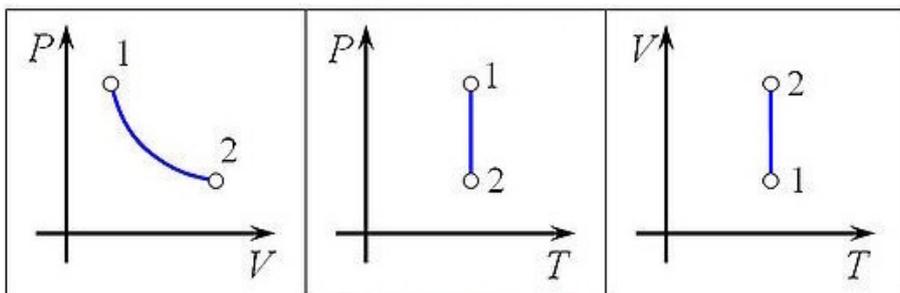
$$p(V) = \frac{\text{const}}{V} \qquad (3.3)$$

Dies entspricht einer Schar von Hyperbeln, die man Isothermen nennt. Alle Punkte ( $p \mid V$ ) mit gleicher Temperatur liegen auf einer Hyperbel. Wenn man die Temperatur verändert, so wechselt man auf eine andere Hyperbel. Es gilt, je tiefer die Hyperbel der Isotherme liegt, desto kleiner ist die zugehörige Temperatur.



**Weitere Diagramme**

Man kann die Zustandsänderung nicht nur in einem p-V-Diagramm einzeichnen, sondern auch in ein p-T-Diagramm und ein V-T-Diagramm. Hier haben die Isothermen andere Formen.

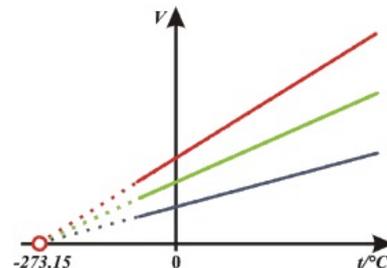


### 3.3 Die isobare Zustandsänderung

Bei der isobaren Zustandsänderung bleibt der Druck konstant.

$$p = \text{const} \quad \Leftrightarrow \quad p_1 = p_2 \quad (3.4)$$

Man nimmt eine bestimmte Menge eines Gases in einem Gaszylinder. Den Druck kann man ganz einfach dadurch konstant halten, dass der Kolben über dem Gasvolumen immer dasselbe Gewicht hat. Nun mißt man das Volumen bei verschiedenen Temperaturen und zeichnet ein  $V$ - $t$ -Diagramm. Man erhält eine Gerade. Wenn man eine andere Menge des Gases verwendet, oder ein anderes Gas, so erhält man auch eine Gerade. Die Verlängerung all dieser Geraden schneidet die  $t$ -Achse im Punkt  $t = -273,15^\circ\text{C}$ . Das bedeutet, dass an diesem Punkt das Gas kein Volumen mehr hat und eine noch tiefere Temperatur nicht sinnvoll ist. Wir nennen diesen Punkt daher **absoluter Nullpunkt** der Temperatur.



Viele Gesetze werden einfacher, wenn man eine neue Temperaturskala wählt, die sogenannte **absolute Temperatur**  $T$ . Es gilt:

Die absolute Temperatur ist gegeben durch

$$T = t + 273,15 \quad (3.5)$$

mit  $\Delta T = \Delta t$ .

*Einheit:*  $[T] = \text{K}$  Kelvin

Wir können jetzt die isobare Zustandsänderung formulieren:

Die isobare Zustandsänderung erfolgt mit konstantem Druck. Es gilt (Gesetz von Gay-Lussac):

$$p = \text{const} \quad \Leftrightarrow \quad p_1 = p_2 \quad \frac{V}{T} = \text{const} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad (3.6)$$

Die Konstante hängt vom Druck ab.

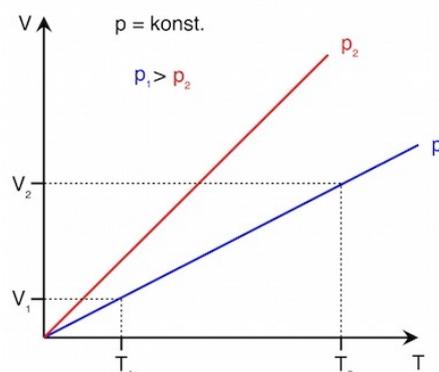
Das Gesetz wurde 1787 von Jacques Charles und 1802 von Joseph Louis Gay-Lussac entdeckt.

#### $V$ - $T$ -Diagramm

Die isobare Zustandsänderung kann in einem  $V$ - $T$ -Diagramm dargestellt werden. Der funktionale Zusammenhang betrachtet das Volumen als eine Funktion der absoluten Temperatur bei konstantem Druck. Es ist dann

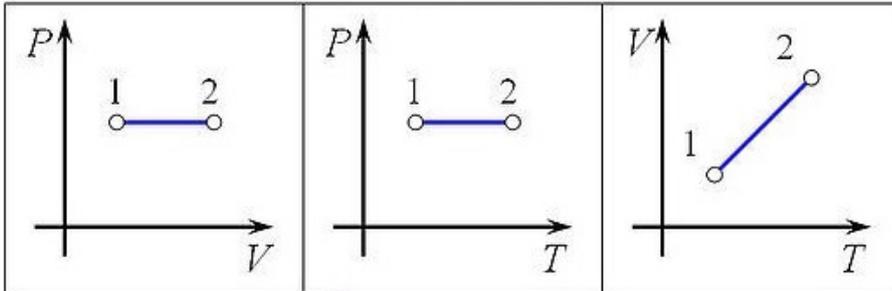
$$V(T) = \text{const} \cdot T \quad (3.7)$$

Dies entspricht einer Schar von Geraden, die man Isobaren nennt. Alle Punkte  $(V | T)$  mit gleichem Druck liegen auf einer Geraden. Wenn man den Druck verändert, so wechselt man auf eine andere Gerade. Es gilt, je tiefer die Gerade der Isobare liegt, desto größer ist der zugehörige Druck.



### Weitere Diagramme

Die isobare Zustandsänderung im  $p$ - $V$ -Diagramm, im  $p$ - $T$ -Diagramm und im  $V$ - $T$ -Diagramm. In diesen Diagrammen haben die Isobaren andere Formen.



### 3.4 Die Isochore Zustandsänderung

Bei der isochoren Zustandsänderung bleibt das Volumen konstant. Es gilt (Gesetz von Amontons):

$$V = \text{const} \Leftrightarrow V_1 = V_2 \quad \frac{p}{T} = \text{const} \Leftrightarrow \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \quad (3.8)$$

Die Konstante hängt vom Volumen ab.

Das Gesetz wurde von Guillaume Amontons entdeckt.

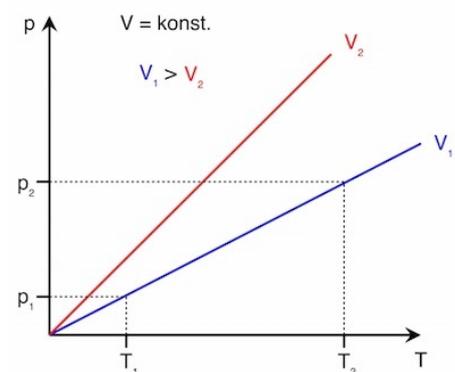
Dieser Zusammenhang wurde von Guillaume Amontons 1702 entdeckt.

#### $p$ - $T$ -Diagramm

Die isochore Zustandsänderung kann in einem  $p$ - $T$ -Diagramm dargestellt werden. Der funktionale Zusammenhang betrachtet den Druck als eine Funktion der absoluten Temperatur bei konstantem Volumen. Es ist dann

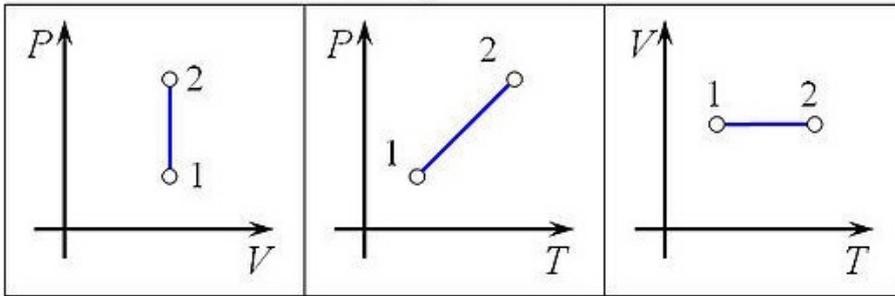
$$p(T) = \text{const} \cdot T \quad (3.9)$$

Dies entspricht einer Schar von Geraden, die man Isochoren nennt. Alle Punkte  $(p | T)$  mit gleichem Volumen liegen auf einer Geraden. Wenn man das Volumen verändert, so wechselt man auf eine andere Gerade. Es gilt, je tiefer die Gerade der Isochore liegt, desto größer ist das zugehörige Volumen.



### Weitere Diagramme

Die isochore Zustandsänderung im  $p$ - $V$ -Diagramm, im  $p$ - $T$ -Diagramm und im  $V$ - $T$ -Diagramm. Die Isochoren haben unterschiedliche Formen.



### 3.5 Änderung aller drei Zustandsgrößen

Meist ändern sich bei den Vorgängen in der Natur alle drei Zustandsgrößen  $p$ ,  $V$  und  $T$  eines Gases. Fasst man die drei speziellen Zustandsänderungen zusammen so ergibt sich folgender Zusammenhang.

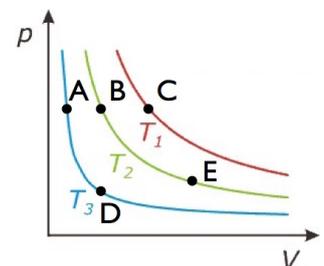
Eine allgemeine Zustandsänderung ist gegeben durch

$$\frac{p \cdot V}{T} = \text{const} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \quad (3.10)$$

### 3.6 Aufgaben

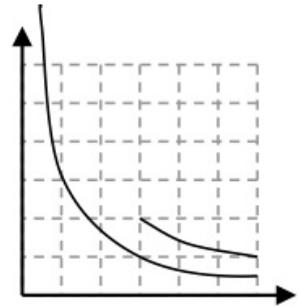
#### Isotherme Zustandsänderungen

- (3.1) Ein bestimmtes Gas hat jetzt bei Normalluftdruck das Volumen  $V = 5$  Liter und wird isotherm auf die Hälfte seines Volumens komprimiert.
- Wie muß man die Kompression durchführen?
  - Von wo und wohin fließt dabei die Wärme  $\Delta Q$ ?
  - Berechnen Sie den Druck nach der Kompression!
- (3.2) Ein bestimmtes Gas hat bei Normalluftdruck das Volumen  $V = 6$  Liter und wird isotherm auf das Vierfache seines Volumens expandiert.
- Wie muß man die Expansion durchführen?
  - Von wo und wohin fließt dabei die Wärme  $\Delta Q$ ?
  - Berechnen Sie den Druck nach der Expansion!
- (3.3) Die Abbildung zeigt ein  $p$ - $V$ -Diagramm, in dem fünf Zustände A, B, C, D und E eingezeichnet sind.
- Welche Zustandsänderung wird hier dargestellt? Wie heißen die Kurven der Zustandsänderung?
  - Welche der drei Temperaturen ist die größte?
  - Welche Zustände haben dasselbe Volumen?
  - Welche Zustände haben denselben Druck?
  - Welche Zustände haben dieselbe Temperatur?



(3.4) Das Diagramm zeigt zwei Kurven für eine Zustandsänderung eines Gases.

- Wie heißt diese Zustandsänderung? Beschriften Sie die Achsen! Wie heißen die Kurven der Zustandsänderung?
- Welche der drei Zustandsgrößen eines Gases werden verändert? Welche bleibt konstant? Wie wird die Änderung durchgeführt? Welches mathematische Gesetz gilt für sie?
- Setzen Sie die zweite Kurve fort, in dem Sie einige Punkte berechnen!



(3.5) In einem See befindet sich eine Luftblase. Das Volumen der Luftblase ist an der Oberfläche ( $p = 101\,300\text{ Pa}$ ) doppelt so groß wie auf den Seegrund. Berechnen Sie die Tiefe des Sees!

### Isobare Zustandsänderungen

(3.6) Gegeben ist eine bestimmte Menge Gas bei der Temperatur  $10^\circ\text{C}$ .

- Auf welche Temperatur muß man es bei konstantem Druck erwärmen, um das doppelte Volumen zu bekommen?
- Wie kann man den Druck konstant halten?

(3.7) Gegeben ist eine bestimmte Menge Gas bei der Temperatur  $10^\circ\text{C}$ .

Auf welche Temperatur muß man es bei konstantem Druck abkühlen, um das halbe Volumen zu bekommen?

(3.8) Wir erwärmen eine bestimmte Menge Gas von  $20^\circ\text{C}$  auf  $80^\circ\text{C}$ .

Um wieviel Prozent erhöht sich das Volumen?

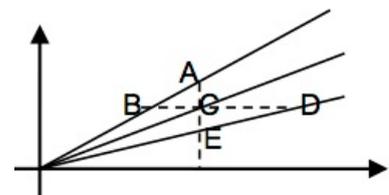
(3.9) Wir kühlen ein bestimmte Gasmenge von  $100^\circ\text{C}$  auf  $0^\circ\text{C}$  ab.

Um wieviel Prozent sinkt sich das Volumen?

(3.10) Wie viel Luft entweicht aus einem quaderförmigen Raum mit 10m Länge, 6m Breite und 4m Höhe, wenn die Raumtemperatur von  $12^\circ\text{C}$  auf  $20^\circ\text{C}$  erhöht wird und der Luftdruck konstant bleibt?

(3.11) Das Diagramm zeigt zwei Geraden für eine Zustandsänderung eines Gases.

- Wie heißt diese Zustandsänderung? Beschriften Sie die Achsen!
- Welche der drei Zustandsgrößen eines Gases werden verändert? Welche bleibt konstant? Wie wird die Änderung durchgeführt? Welches mathematische Gesetz gilt für sie?
- Wie heißen mehrere Geraden in einem Diagramm, die dasselbe Gesetz beschreiben?
- Welche Zustände A, B, C, D, E haben dieselbe Temperatur? Welche haben dasselbe Volumen? Welche haben denselben Druck?



**Isochore Zustandsänderungen**

- (3.12) Bei einer Temperatur von  $18^\circ\text{C}$  beträgt der Druck in einem Autoreifen  $220\text{ kPa}$ . Das Auto steht auf einem Parkplatz in der Sonne. Dadurch erhöht sich die Temperatur im Reifen auf  $55^\circ\text{C}$ . Auf welchen Wert vergrößert sich dadurch der Reifendruck?
- (3.13) In einem absolut dicht schließenden Tiefkühlschrank herrscht vor der Inbetriebnahme eine Temperatur von  $20^\circ\text{C}$  bei  $101\,325\text{ Pa}$ . Nach dem Einschalten sinkt die Temperatur auf  $-10^\circ\text{C}$ .
- Welche Zustandgröße bleibt hier konstant?
  - Berechnen Sie den Druck im Inneren des Tiefkühlschranks nach dem Abkühlen!
  - Welche Kraft ist zum Öffnen der Kühlschranktür (Fläche  $A = 0,8\text{ m}^2$ ) nach der Abkühlung erforderlich, wenn der äußere Luftdruck  $101\,325\text{ Pa}$  beträgt?
  - Stellen Sie die Zustandsänderung in einem  $p$ - $V$ -Diagramm und einem  $V$ - $T$ -Diagramm dar!
- (3.14) In einer verschlossenen Gasflasche erhöht sich der Gasdruck von  $2,5\text{ bar}$  bei  $10^\circ\text{C}$  auf  $5\text{ bar}$ .
- Wie groß war die Temperaturerhöhung?
  - Welche Temperaturerniedrigung wäre notwendig, damit der Druck von  $2,5\text{ bar}$  bei  $10^\circ\text{C}$  auf  $1,8\text{ bar}$  sinkt?  
( $1\text{bar} = 10^5\text{ Pa}$ )

**Allgemeine Zustandsänderungen**

- (3.15) Am Grund eines Sees befindet sich ein schlaffer Luftballon mit dem Volumen von  $100\text{ cm}^3$ . Dort, in  $40\text{ m}$  Tiefe, beträgt die Temperatur  $4^\circ\text{C}$ . Der Luftballon steigt zur Wasseroberfläche auf, wo angenehme  $24^\circ\text{C}$  herrschen. Die Temperatur im Inneren des Luftballons nimmt jeweils den Wert der Umgebung an.  
Berechnen Sie das Volumen des Ballons beim Erreichen der Wasseroberfläche!  
Hinweis 1: Nehmen Sie an, der Luftballon ist mit einem idealen Gas gefüllt!  
Hinweis 2: Verwenden Sie den hydrostatischen Druck zur Berechnung!
- (3.16) Wie viel Luft entweicht aus einem quaderförmigen Raum mit  $10\text{m}$  Länge,  $6\text{m}$  Breite und  $4\text{m}$  Höhe, wenn die Raumtemperatur von  $12^\circ\text{C}$  auf  $20^\circ\text{C}$  erhöht wird und der Luftdruck von  $1020\text{ mbar}$  auf  $981\text{ mbar}$  sinkt?
- (3.17) Ein Gas mit einem Volumen von  $V_1 = 50\text{ cm}^3$ , einem Druck von  $p_1 = 2,5\text{ bar}$  und einer Temperatur von  $t_1 = 0^\circ\text{C}$  wird erwärmt. Dabei beträgt die neue Temperatur  $t_2 = 30^\circ\text{C}$ , gleichzeitig wird der Druck auf  $p_2 = 6\text{ bar}$  erhöht.  
Mit Hilfe der Zustandsgleichung für ideale Gase soll das neue Volumen  $V_2$  berechnet werden!
- (3.18) Bei einer Temperatur von  $18^\circ\text{C}$  und einem Luftdruck von  $1,01 \cdot 10^5\text{ Pa}$  wird ein Behälter von  $40\text{ Liter}$  Inhalt verschlossen. Bringt man den Behälter auf einen Berg, so kühlt sich die Luft im Behälter auf  $-12^\circ\text{C}$  ab. Auf dem Berg herrscht ein Außendruck von  $9,7 \cdot 10^5\text{ Pa}$ .  
Strömt beim Öffnen des Behälters Luft ein oder aus?  
Wie groß ist das Volumen dieser Luft?

## 4 Die Stoffmenge

### 4.1 Der Satz von Avogadro und der Satz von Dalton

Es gibt Gase, die chemisch miteinander so reagieren, daß wieder ein Gas entsteht (z.B. Wasserstoff  $H_2$  mit Sauerstoff  $O_2$  zu Wasserdampf  $H_2O$ ). Dabei beobachtet man etwas Besonderes:

- Moleküle von chemischen Elementen sind aus Atomen zusammengesetzt und
- gleiche Volumina enthalten unter gleichen Bedingungen die gleiche Anzahl von Molekülen.

Der erste Beobachtung wurde 1803 vom englischen Philosophen John Dalton formuliert:

Satz von Dalton:

Jedes Element besteht aus Atomen oder aus Molekülen, die sich selbst aus mehreren gleichartigen Atomen zusammensetzen.

Verschiedene Elemente verbinden sich chemisch zu neuen Molekülen (chemischen Verbindungen), die aus den verschiedenen Atomen der Elemente bestehen.

#### Beispiel

Es gibt also Elemente, die nur aus einem Atom bestehen: Helium He, Neon Ne

#### Beispiel

Viele Elemente, vor allem die bekanntesten Gase, bestehen aus Molekülen, die aus zwei gleichartigen Atomen zusammensetzen: Sauerstoff  $O_2$ , Stickstoff  $N_2$ , Wasserstoff  $H_2$ , Chlor  $Cl_2$

#### Beispiel

Chemische Verbindungen bestehen aus verschiedenen Atomen: Wasser  $H_2O$ , Kohlendioxid  $CO_2$ , Schwefeltrioxid  $SO_3$

Die zweite Beobachtung stammt vom italienischen Physiker Amadeo Avogadro von 1811.

Satz von Avogadro:

Bei gleichem Druck und gleicher Temperatur befindet sich im gleichen Gasvolumen dieselbe Anzahl von Teilchen.

#### Wichtige Bemerkungen:

- Teilchen bedeutet hier entweder Atome oder Moleküle.
- Die beiden Sätze kann man eigentlich nicht beweisen, sondern nur in vielen Beispiel bestätigt finden. Wenn man sie aber als richtig annimmt, kann man viele Ergebnisse der Chemie und Physik auf einfach Weise erklären.

### 4.2 Die Stoffmenge - das Mol

Der Satz von Avogadro sagt uns, dass zum Beispiel in  $1\text{ m}^3$  Gas unter gleichen Bedingungen (gleicher Druck und gleiche Temperatur) gleich viel Teilchen zu finden sind, egal um welches Gas es sich handelt. Er sagt aber nicht, wieviel Teilchen das wirklich sind.

### Stoffmenge und Teilchenzahl

Darum führt man eine neue Größe ein, die Stoffmenge. Sie ist eine der sieben Basisgrößen. Die Stoffmenge gibt an, aus wie vielen Einzelteilchen (Atomen, Molekülen, Ionen, Elektronen, ...) ein System besteht.

Definition der Stoffmenge  $n$ :

Ein System hat die Stoffmenge  $n = 1$  mol, wenn es ebenso viele Teilchen enthält wie Atome in 12 g des Kohlenstoffisotops C-12 enthalten sind. Das entspricht einer Anzahl von  $6,022 \cdot 10^{23}$  Teilchen. Diese Zahl nennt man Avogadrozahl oder Avogadro-Konstante  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

*Einheiten:*  $[n] = \text{mol}$       Mol  
 $[N_A] = \text{mol}^{-1}$       (Teilchen) pro Mol

Die Teilchenzahl  $N$  eines Gases ergibt sich aus der Stoffmenge  $n$  (Molzahl) multipliziert mit der Avogadrozahl  $N_A$ .

$$N = n \cdot N_A \quad (4.1)$$

*Einheit:*  $[N] = 1$       keine Einheit (Teilchen)

### Molvolumen

Unter dem Molvolumen  $V_m$  versteht man das Volumen, welches 1 mol eines Stoffes unter Normalbedingungen einnimmt.

*Einheit:*  $[V_m] = \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$       Kubikmeter pro Mol

Die Normalbedingungen oder Standardbedingungen für Temperatur und Druck sind:

- $T_0 = 273,15 \text{ K}$  (entspricht  $0^\circ\text{C}$ )
- $p_0 = 101325 \text{ Pa}$  (Normalluftdruck)

Es gilt:

$$V_m = \frac{V}{n} \quad (4.2)$$

Das Molvolumen unter Normalbedingungen ist für alle (idealen) Gase gleich und beträgt

$$V_m = 22,4 \frac{\ell}{\text{mol}} = 22,4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}} \quad (4.3)$$

#### Beispiel (4.1)

Es sind 44,8 Liter Neongas bei Normalbedingungen vorhanden. Berechnen Sie die Stoffmenge!

#### Lösung

Wir verwenden die Formel (gilt nur bei Normalbedingungen)

$$n = \frac{V}{V_m} = \frac{44,8}{22,4} = 2 \text{ mol}$$

**Molmasse**

Die Masse eines Mols eines Stoffs bezeichnet man als molare Masse oder Molmasse  $M$ .

*Einheiten:*  $[M] = \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$  Kilogramm pro Mol

$[M] = \frac{\text{g}}{\text{mol}}$  Gramm pro Mol (wird in diesem Zusammenhang häufiger verwendet)

Die molare Masse  $M$  hat den gleichen Zahlenwert wie die relative Atommasse bzw. die Massenzahl, die man in einem Periodensystem ablesen kann.

*Wichtige Beispiele:*

Stoff	Molmasse in $\frac{\text{g}}{\text{mol}}$
Wasserstoff H	1
Wasserstoff H <sub>2</sub>	2
Sauerstoff O	16
Sauerstoff O <sub>2</sub>	32
Stickstoff N	14
Stickstoff N <sub>2</sub>	28
Helium He	4
Kohlenstoff C	12
Chlor Cl	35
Argon Ar	40

Wir erkennen an der obigen Tabelle:

Bei zusammengesetzten Teilchen werden die einzelnen Molmassen einfach addiert. Dasselbe gilt auch für chemische Gleichungen.

**Beispiel (4.2)**

Es sind 80 g Helium gegeben. Berechnen Sie die Stoffmenge und die Anzahl der Teilchen!

**Lösung**

Die Molmasse von Helium ist  $M(\text{He}) = 4 \text{ g/mol}$ . Damit ergibt sich die Stoffmenge (Molzahl):

$$n = \frac{m}{M} = \frac{80}{4} = 20 \text{ mol}$$

Die Teilchenzahl erhält man durch

$$N = n \cdot N_A = 20 \cdot 6,022 \cdot 10^{23} = 1,2 \cdot 10^{25} \text{ Teilchen}$$

**Beispiel (4.3)**

Es sind 56 g Stickstoff N<sub>2</sub> gegeben. Berechnen Sie die Stoffmenge und die Anzahl der Teilchen!

**Lösung**

Die Molmasse von Stickstoff ist  $M(\text{N}_2) = 28 \text{ g/mol}$ . Damit ergibt sich die Stoffmenge (Molzahl):

$$n = \frac{m}{M} = \frac{56}{28} = 2 \text{ mol}$$

Die Teilchenzahl erhält man durch

$$N = n \cdot N_A = 2 \cdot 6,022 \cdot 10^{23} = 1,2 \cdot 10^{24} \text{ Teilchen}$$

#### Beispiel (4.4)

Es sind 85 g Ammoniak  $\text{NH}_3$  gegeben. Berechnen Sie die Stoffmenge und die Anzahl der Teilchen!

#### Lösung

Die Molmasse von Ammoniak ist  $M(\text{NH}_3) = M(\text{N}) + 3 \cdot M(\text{H}) = 14 + 3 \cdot 1 = 17 \text{ g/mol}$ . Damit ergibt sich die Stoffmenge (Molzahl):

$$n = \frac{m}{M} = \frac{85}{17} = 5 \text{ mol}$$

Die Teilchenzahl erhält man durch

$$N = n \cdot N_A = 5 \cdot 6,022 \cdot 10^{23} = 3,01 \cdot 10^{24} \text{ Teilchen}$$

### 4.3 Die Gaskonstanten

Wir kommen noch einmal zur allgemeinen Zustandsänderung für ideale Gase zurück und betrachten die Konstante auf der rechten Seite der Gleichung näher

$$\frac{p \cdot V}{T} = \text{const} \quad (4.4)$$

Man kann die Konstante auf verschiedene Arten schreiben:

$$\frac{p \cdot V}{T} = \begin{cases} m \cdot R_{\text{spez}} \\ n \cdot R \\ N \cdot k \end{cases} \quad (4.5)$$

Im ersten Fall hängt sie von der Masse  $m$  des Gases und der spezifischen Gaskonstante  $R_{\text{spez}}$  ab, die für jedes Gas unterschiedlich ist und in Tabellen verzeichnet ist (siehe unten). Im zweiten Fall hängt sie von der Molzahl  $n$  und der allgemeinen Gaskonstante  $R$  ab, die für alle Gase gleich ist. Ihr Wert ist  $R = 8,314 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ . Im dritten Fall hängt sie von der Teilchenzahl  $N$  und der Boltzmannkonstante  $k$  ab, die ebenfalls für alle Gase gleich groß ist und den Wert  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$  hat.

Je nach gesuchter Größe wird eine der drei Gleichungen verwendet.

Es gibt folgende Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Konstanten:

$$R_{\text{spez}} = \frac{R}{M} \quad (4.6)$$

$$k = \frac{R}{N_A} \quad (4.7)$$

Beispiele für die spezifische Gaskonstante:

Stoff	spezifische Gaskonstante in $\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$	Molmasse in $\text{kg/mol}$
Wasserstoff $\text{H}_2$	4124	0,002016
Sauerstoff $\text{O}_2$	260	0,032
Stickstoff $\text{N}_2$	297	0,028
Helium He	2078	0,004

**Beispiel (4.5)**

- a) Berechnen Sie die molare Masse von Luft!  
 b) Bestimmen Sie die Dichte der Luft bei Normalbedingungen!

**Lösung**

a)

Luft besteht näherungsweise aus 80% Stickstoff und 20% Sauerstoff. Die molare Masse von Luft entspricht der gewichteten molaren Masse ihrer Bestandteile.

$$M(\text{Luft}) = 0,8 \cdot M(\text{N}_2) + 0,2 \cdot M(\text{O}_2) = 0,8 \cdot 28 + 0,2 \cdot 32 = 28,8 \text{ g/mol} = 28,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol} \quad (4.8)$$

b)

Anhand der molaren Masse eines Gases kann mittels der allgemeinen Gasgleichung die Dichte bei einem bestimmten Druck und einer bestimmten Temperatur bestimmt werden

$$\frac{p \cdot V}{T} = \frac{m}{M} \cdot R \Rightarrow V = \frac{m \cdot R \cdot T}{M \cdot p} \Rightarrow \rho = \frac{m}{V} = \frac{p \cdot M}{R \cdot T} \quad (4.9)$$

Für Luft gilt unter Normalbedingungen, also bei  $p = 101\,325 \text{ Pa}$  und  $T = 273 \text{ K}$ :

$$\rho_{\text{Luft}} = \frac{p \cdot M}{R \cdot T} = \frac{101\,325 \cdot 28,8 \cdot 10^{-3}}{8,314 \cdot 273} = 1,28 \text{ kg/m}^3 \quad (4.10)$$

Der so berechnete Dichte-Wert von Luft stimmt mit experimentellen Messungen sehr gut überein.

**4.4 Aufgaben****Satz von Dalton und Avogadro**

- (4.1) a) Unter welchen Bedingungen befinden sich in gleichen Volumina verschiedener Gase dieselbe Anzahl von Teilchen?  
 b) Wie lautet der Satz von Dalton?  
 c) Wie lautet der Satz von Avogadro?

**Stoffmenge**

- (4.2) a) Welches Volumen hat ein Mol Sauerstoff bei Normalbedingungen? Wie ist es bei Stickstoff?  
 b) Welches Volumen hat ein Mol Luft bei Normalbedingungen?
- (4.3) a) Sind in einem Mol Chlorgas und in einem Mol Wasserstoffgas dieselbe Anzahl von Teilchen?  
 b) Hat ein Mol Sauerstoff und ein Mol Stickstoff dieselbe Masse?
- (4.4) Bestimmen Sie die Molmasse von  
 a) Ozon  $\text{O}_3$   
 b) Lachgas  $\text{N}_2\text{O}$   
 c) Salpetersäure  $\text{HNO}_3$   
 d) Salmiak  $\text{NH}_4\text{OH}$   
 e) Wasser  $\text{H}_2\text{O}$   
 f) Salzsäure  $\text{HCl}$
- (4.5) a) Wieviel Mol sind 0,8 g  $\text{O}_2$  ?  
 b) Wieviel Mol sind 421 g Gold (Au)?

- (4.6) a) Wieviele Gramm entsprechen 55,55 mol Wasser( $\text{H}_2\text{O}$ )?  
 b) Was ist die Masse in Gramm von 5,1 mol Schwefelsäure ( $\text{H}_2\text{SO}_4$ )?
- (4.7) Luft besteht zu 78% aus Stickstoffmolekülen  $\text{N}_2$ , zu 21% aus Sauerstoffmolekülen  $\text{O}_2$  und zu 1% aus Argon Ar. Berechnen Sie die Molmasse von Luft!

### Allgemeine Gasgleichung

- (4.8) a) Bestimmen Sie  $R_{\text{spez}}$  für Luft!  
 b) Bestimmen Sie  $R_{\text{spez}}$  für Ozon  $\text{O}_3$ !
- (4.9) Berechnen Sie das Volumen von  
 a) 160 g Sauerstoff  
 b) 70 g Stickstoff  
 bei  $20^\circ\text{C}$  und Normalluftdruck!
- (4.10) a) Berechnen Sie das Volumen von 300 g Luft (20% Sauerstoff, 80% Stickstoff) bei  $20^\circ\text{C}$  und Normalluftdruck!  
 b) Berechnen Sie die Anzahl der Atome in 1 Liter Helium bei Normalbedingungen!  
 c) Berechnen Sie die Masse von 1 Liter Sauerstoff bei Normalbedingungen!
- (4.11) a) Berechnen Sie die Masse von 1 Liter Luft bei  $30^\circ\text{C}$  und Normalluftdruck!  
 b) Berechnen Sie die Anzahl der Teilchen in einem Kubikmikrometer ( $\mu\text{m}^3$ ) eines idealen Gases bei  $727^\circ\text{C}$  und 140 000 Pa!
- (4.12) a) Berechnen Sie die Anzahl der Teilchen in 3,2 kg Sauerstoff!  
 b) Eine chemische Verbindung hat die Molmasse  $M = 120,44$  g/mol. Berechnen Sie die Masse eines Teilchens (Teilchenmasse)  $m_T$ !  
 c) Berechnen Sie die Anzahl der Teilchen in  $1 \text{ mm}^3$  Wasserstoff bei  $226,85^\circ\text{C}$  und 200 000 Pa!
- (4.13) a) Berechnen Sie die Anzahl der Teilchen in 0,16 mg Sauerstoff!  
 b) Gegeben sind 20 000 000 000 000 Atome von Helium. Wie groß ist die Masse aller dieser Teilchen?
- (4.14) a) Berechnen Sie die Masse von 0,5 Liter Sauerstoff beim Druck 200 000 Pa!  
 b) Wie groß ist das Volumen von 0,64 g Sauerstoff bei 100 000 Pa und  $27^\circ\text{C}$ ?
- (4.15) Welche physikalische Größe ist durch die Kombination von physikalischen Größen gegeben?  
 a) Volumen / Molvolumen  
 b) Teilchenzahl/Avogadrozahl  
 c) allgemeine Gaskonstante/Avogadrozahl  
 d) Molmasse mal spezifische Gaskonstante  
 e) Molmasse/Avogadrozahl  
 f) Dichte/Teilchenzahl  
 g) Teilchenzahl/Volumen  
 h) Avogadrozahl/Teilchendichte  
 i) Teilchendichte mal Volumen  
 j) Avogadrozahl mal Teilchenmasse  
 k) Molzahl mal Molmasse  
 l) Teilchenmasse mal Teilchendichte

## 5 Kinetische Gastheorie – Druck und Temperatur im Teilchenmodell

Beim idealen Gas stellen wir uns das Gas aus vielen kleinen Teilchen vor, die sich ständig in alle möglichen Richtungen bewegen (ungeordnete Bewegung).

Bei der kinetischen Gastheorie kann man das thermische Verhalten von Gasen mit Hilfe der Gesetze der Mechanik erklären.

*Grundannahmen der kinetischen Gastheorie:*

- Der Durchmesser der Teilchen ist sehr viel kleiner als ihre Abstände.
- Die Teilchen üben nur im Augenblick des Zusammenstoßes Kräfte aufeinander aus.
- Die Stöße zwischen den Teilchen und der Gefäßwand sind elastisch.
- Die Bewegung der Teilchen erfolgt völlig regellos und ungeordnet.

Die kinetische Gastheorie beschreibt die räumliche Verteilung der Gase sowie ihre Geschwindigkeitsverteilung.

### 5.1 Wiederholung und Vorbereitung von wichtigen Begriffen

#### 5.1.1 Impuls, Kraftstoß und Druck

In der Mechanik haben wir gelernt, dass ein Kraftstoß  $F \cdot \Delta t$  mit der Stoßzeit  $\Delta t$  einer Impulsänderung  $\Delta I = m \cdot \Delta v$  entspricht.

$$F \cdot \Delta t = \Delta I \quad F = \frac{\Delta I}{\Delta t} = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} = m \cdot a \quad (5.1)$$

Der Druck  $p$  ist die Normalkraft durch die Fläche

$$p = \frac{F_N}{A} \quad (5.2)$$

#### Beispiel (5.1)

Ein Gummiball ( $m = 30 \text{ g}$ ) stößt mit der Geschwindigkeit  $v = 3 \text{ m/s}$  elastisch gegen eine vertikale Wand mit der Fläche  $A = 1 \text{ m}^2$ . Die Stoßzeit beträgt  $1/2$  Sekunde.

- Wie groß ist der Impuls  $\Delta I$ , den die Wand bekommt?
- Wie groß ist die Kraft auf die Wand?
- Welcher Druck wirkt auf die Wand?

#### Lösung

- Der Impulsübertrag bei einem elastischen Stoß gegen eine starre Wand ist

$$\Delta I = 2 \cdot m \cdot v = 2 \cdot 30 \cdot 10^{-3} \cdot 3 = 0,18 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

- Die Kraft ist

$$F = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{0,18}{0,5} = 3,6 \text{ N}$$

- Der Druck ist

$$p = \frac{F}{A} = \frac{3,6}{1} = 3,6 \text{ Pa}$$

### 5.1.2 Teilchendichte und Teilchenfluß

Die Teilchendichte  $\rho_N$  ist die Anzahl der Teilchen  $N$  pro Volumen  $V$ .

$$\rho_N = \frac{N}{V} \quad (5.3)$$

*Einheit:*  $[\rho_N] = \frac{1}{\text{m}^3}$  Teilchen pro Kubikmeter

Wenn sich die Teilchen in einem Rohr mit derselben Geschwindigkeit  $v$  nach rechts bewegen, so strömen in einer bestimmten Zeit  $\Delta t$  eine Menge  $\Delta N$  Teilchen durch einen Querschnitt  $A$ .

Der Teilchenfluß  $\Delta N$  ist die Anzahl der Teilchen mit der Geschwindigkeit  $v$  und der Teilchendichte  $\rho_N$ , die pro Zeiteinheit  $\Delta t$  durch eine Fläche  $A$  transportiert werden.

$$\Delta N = A \cdot v \cdot \rho_N \cdot \Delta t \quad (5.4)$$

*Einheit:*  $[\Delta N] = [A \cdot v \cdot \rho_N \cdot \Delta t] = \text{m}^2 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1}{\text{m}^3} \cdot \text{s} = 1$  Teilchen

#### Geschwindigkeit nicht normal zur Fläche

Wenn die Geschwindigkeit der Teilchen nicht normal zur Fläche  $A$  ist, so muß man die Normalkomponente der Geschwindigkeit  $v_n$  verwenden.

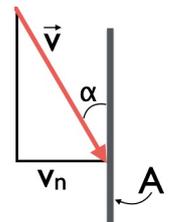
Der Teilchenfluß ist daher allgemein gegeben als:

$$\Delta N = A \cdot v_n \cdot \rho_N \cdot \Delta t \quad (5.5)$$

#### Beispiel (5.2)

Die Dichte von Regentropfen beträgt  $\rho_N = 100 \text{ m}^{-3}$ . Ihre Geschwindigkeit beträgt  $v = 1,5 \text{ m/s}$  und  $\vec{v}$  schließt mit einer vertikalen Fensterfläche  $A = 2 \text{ m}^2$  den Winkel  $\alpha = 30^\circ$  ein.

Wie viele Tropfen stoßen pro Sekunde gegen das Fenster?



#### Lösung

Die Geschwindigkeit normal zur Fläche ergibt sich in diesem Fall (siehe Abbildung) als

$$v_n = v \cdot \sin \alpha = 1,5 \cdot \sin 30 = 0,75 \text{ m/s}$$

und damit ist der Teilchenfluß

$$\Delta N = A \cdot v_n \cdot \rho_N \cdot \Delta t = 2 \cdot 0,75 \cdot 100 \cdot 1 = 150 \text{ Teilchen}$$

das heißt es stoßen pro Sekunde 150 Regentropfen gegen das Fenster.

#### Teilchen mit verschiedenen Geschwindigkeiten

Wenn es Teilchen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten  $v_1, v_2, v_3, \dots$  gibt, so teilt man die Teilchen in Klassen ein.

- Klasse 1 mit Geschwindigkeit  $v_1$  und Teilchendichte  $\rho_{N,1}$
- Klasse 2 mit Geschwindigkeit  $v_2$  und Teilchendichte  $\rho_{N,2}$
- Klasse 3 mit Geschwindigkeit  $v_3$  und Teilchendichte  $\rho_{N,3}$
- ⋮

Die Gesamtzahl der Teilchen, die durch den Querschnitt  $A$  gehen ist die Summe der Teilchen aus den einzelnen Klassen, die durch  $A$  gehen.

$$\begin{aligned} \Delta N_{\text{ges}} &= \Delta N_1 + \Delta N_2 + \Delta N_2 + \dots & (5.6) \\ &= A \cdot v_1 \cdot \rho_{N,1} \cdot \Delta t + A \cdot v_2 \cdot \rho_{N,2} \cdot \Delta t + A \cdot v_3 \cdot \rho_{N,3} \cdot \Delta t + \dots \end{aligned}$$

**Beispiel (5.3)**

In einem Raum gibt es zwei Arten von Teilchen.

Teilchenart 1:  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$  und Teilchendichte  $\rho_{N,1} = 50 \text{ m}^{-3}$

Teilchenart 2:  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$  und Teilchendichte  $\rho_{N,2} = 40 \text{ m}^{-3}$

Wieviel Teilchen gehen in einer Minute durch einen Querschnitt  $A = 0,3 \text{ m}^2$  normal zur  $x$ -Achse?

**Lösung**

Da die Fläche normal zur  $x$ -Achse ist, kann man einfach die  $x$ -Komponente des Geschwindigkeitsvektors verwenden. Der Teilchenfluss ist daher

$$\begin{aligned} \Delta N_{\text{ges}} &= A \cdot v_1 \cdot \rho_{N,1} \cdot \Delta t + A \cdot v_2 \cdot \rho_{N,2} \cdot \Delta t \\ &= 0,3 \cdot 8 \cdot 50 \cdot 60 + 0,3 \cdot 5 \cdot 40 \cdot 60 = 10\,800 \text{ Teilchen} \end{aligned}$$

**5.1.3 Etwas Statistik**

Bei vielen Teilchen ist es praktisch mit gemittelten Größen zu rechnen. Die bekannteste gemittelte Größe ist der Mittelwert selbst. Es gibt aber auch das mittlere Quadrat.

Nehmen wir an, wir haben eine physikalische Größe  $X$ , die  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) verschiedene gemessene Werte hat, die jeweils mit der Häufigkeit  $n_i$  vorkommen. Die Summe aller Messwerte ist  $\sum_{i=1}^n n_i = N$ .

Es gilt:

Der Mittelwert einer Größe  $X$  ist

$$\langle X \rangle = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot n_i}{\sum_{i=1}^n n_i} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot n_i}{N} \tag{5.7}$$

Der Mittelwert des Quadrates einer Größe  $X$  (mittleres Quadrat) ist

$$\langle X^2 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot n_i}{\sum_{i=1}^n n_i} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot n_i}{N} \tag{5.8}$$

Es gilt im allgemeinen:

$$\langle X^2 \rangle \neq \langle X \rangle^2 \tag{5.9}$$

Die Wurzel aus dem mittleren Quadrat wird auch oft als  $x_{\text{rms}}$  bezeichnet (root mean square) und ist gegeben durch

$$x_{\text{rms}} = \sqrt{\langle X^2 \rangle}$$

Man benützt auch oft folgende Beziehungen:

$$\langle X \rangle \cdot N = \sum_{i=1}^n x_i \cdot n_i = x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + x_3 \cdot n_3 + \dots \quad (5.10)$$

$$\langle X^2 \rangle \cdot N = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot n_i = x_1^2 \cdot n_1 + x_2^2 \cdot n_2 + x_3^2 \cdot n_3 + \dots \quad (5.11)$$

**Beispiel (5.4)**

40 Studenten wurden über ihr Alter befragt. Das Ergebnis:

Alter $x_i$	20	21	23	24	30
Häufigkeit $n_i$	6	3	10	12	9

Berechnen Sie den Mittelwert des Alters und das mittlere Quadrat des Alters!

**Lösung**

Der Mittelwert ist

$$\langle X \rangle = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot n_i}{N} = \frac{1}{40} \cdot (20 \cdot 6 + 21 \cdot 3 + 23 \cdot 10 + 24 \cdot 12 + 30 \cdot 9) = 24,275$$

und das mittlere Quadrat ist

$$\langle X^2 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot n_i}{N} = \frac{1}{40} \cdot (20^2 \cdot 6 + 21^2 \cdot 3 + 23^2 \cdot 10 + 24^2 \cdot 12 + 30^2 \cdot 9) = 600,625$$

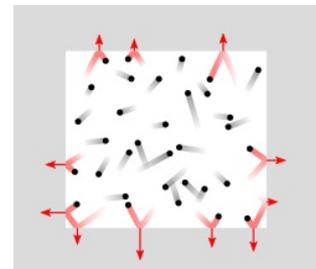
die Wurzel aus dem mittleren Quadrat  $x_{\text{rms}}$  ist in diesem Fall

$$x_{\text{rms}} = \sqrt{\langle X^2 \rangle} = \sqrt{600,625} = 24,5$$

und liegt sehr nahe beim Mittelwert  $\langle X \rangle = 24,275$ .

**5.2 Bestimmung des Zusammenhangs zwischen Druck und Teilchenbewegung**

Druck und Temperatur sind im Modell der Teilchen statistische Größen, die nur für eine große Anzahl von Teilchen sinnvoll berechenbar sind. Einem einzelnen Teilchen kann man weder Druck noch Temperatur zuodnen. Der Druck einer in einem Behälter eingeschlossenen Gasmenge macht sich durch den Aufprall vieler Gasteilchen senkrecht zur Begrenzungsfläche bemerkbar.



- Wir denken uns den abgebildeten Würfel mit dem Volumen  $V$  mit einem Gas gefüllt, das aus vielen kleinen Teilchen besteht.
- Die Teilchendichte ist  $\rho_N = \frac{N}{V}$  und jedes Teilchen hat dieselbe Masse  $m_T$ .
- Es gibt viele verschiedene Geschwindigkeiten  $v_i$ , da sich die Teilchen ungeordnet bewegen. Wir können für jede Geschwindigkeit  $v_i$  eine eigene Klasse von Teilchen bilden mit der jeweiligen Teilchendichte  $\rho_{N,i}$ . Es gilt  $\sum_i \rho_{N,i} = \rho_N$ .

- Je ein Sechstel der Teilchen bewegt sich senkrecht auf eine der sechs Wände des Würfels zu. (In der Wirkung erfasst das auch die schräg zu den Wänden fliegenden Teilchen.)
- Da die Wechselwirkung der Teilchen mit den Wänden ein elastischer Stoß ist, so bekommt die Wand von den Teilchen der Geschwindigkeit  $v_i$  dabei einen Impulsübertrag von

$$\Delta I_i = 2 \cdot m_T \cdot v_i$$

- In der Zeit  $\Delta t$  treffen alle Teilchen auf die Fläche  $A$ , die zu Beginn der Zeitspanne höchstens um die Strecke  $v_i \cdot \Delta t$  von ihr entfernt waren. Das ergibt den Teilchenfluss in diese Richtung von

$$\Delta N_i = A \cdot v_i \cdot \Delta t \cdot \rho_{N,i} \cdot \frac{1}{6}$$

- Während der Zeit  $\Delta t$  bekommt die Wand also den Impuls

$$\begin{aligned} \Delta I_{\text{ges}} &= \sum_i \Delta I_i \cdot \Delta N_i = \sum_i \frac{2}{6} \cdot m_T \cdot v_i \cdot A \cdot v_i \cdot \Delta t \cdot \rho_{N,i} \\ &= \sum_i \frac{1}{3} \cdot A \cdot \Delta t \cdot m_T \cdot \rho_{N,i} \cdot v_i^2 \\ &= \frac{1}{3} \cdot A \cdot \Delta t \cdot m_T \cdot \sum_i \rho_{N,i} \cdot v_i^2 \\ &= \frac{1}{3} \cdot A \cdot \Delta t \cdot m_T \cdot \langle v^2 \rangle \cdot \sum_i \rho_{N,i} \\ &= \frac{1}{3} \cdot A \cdot \Delta t \cdot m_T \cdot \langle v^2 \rangle \cdot \rho_N \end{aligned}$$

- Dies führt zu einer Kraft  $F$ , die die Teilchen auf die Wand ausüben

$$F = \frac{\Delta I_{\text{ges}}}{\Delta t} = \frac{1}{3} \cdot A \cdot m_T \cdot \langle v^2 \rangle \cdot \rho_N$$

- Und daraus kann man den Druck  $p$  auf die Wand berechnen

$$p = \frac{F}{A} = \frac{1}{3} \cdot m_T \cdot \langle v^2 \rangle \cdot \rho_N = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot \langle v^2 \rangle$$

wobei  $\rho = m_T \cdot \rho_N = \frac{m}{N} \cdot \frac{N}{V} = \frac{m}{V}$  die Dichte des Gases ist.

Der Druck  $p$  eines ruhenden Gases ist gleich dem Produkt aus Teilchenmasse  $m_T$ , Teilchendichte  $\rho_N$  und mittlerem Quadrat der Teilchengeschwindigkeiten  $v$  oder dem Produkt aus Gasdichte  $\rho$  und mittlerem Quadrat der Teilchengeschwindigkeit  $v$

$$p = \frac{1}{3} \cdot m_T \cdot \rho_N \cdot \langle v^2 \rangle = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot \langle v^2 \rangle \quad (5.12)$$

## 5.3 Was ist Temperatur?

### 5.3.1 Temperatur von Gasen

Wir können die Formel für den Druck noch etwas umschreiben

$$p = \frac{1}{3} \cdot m_T \cdot \rho_N \cdot \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} \cdot \rho_N \cdot \frac{m_T \cdot \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{2}{3} \cdot \rho_N \cdot \langle E_{\text{kin}} \rangle$$

Mit der allgemeinen Gasgleichung konnten wir den Druck auch bestimmen

$$\begin{aligned} p \cdot V &= N \cdot k \cdot T \\ p &= \frac{N}{V} \cdot k \cdot T = \rho_N \cdot k \cdot T \end{aligned}$$

Hier war  $N$  die Anzahl der Teilchen im Volumen  $V$  und  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  die Boltzmann-Konstante. Gleichsetzen der beiden Ausdrücke liefert

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T$$

Diese Formel sagt sehr viel darüber aus, was Temperatur wirklich ist.

Die absolute Temperatur  $T$  eines Gases ist proportional zur mittleren kinetischen Energie  $\langle E_{\text{kin}} \rangle$  der Gasteilchen.

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T \quad (5.13)$$

Mit Hilfe der Gleichung (5.13) kann einerseits bestimmt werden, welche kinetische Gesamtenergie die Teilchen einer Gasmenge bei einer bestimmten Temperatur aufweisen, andererseits auch berechnet werden, wie groß die durchschnittliche Geschwindigkeit der einzelnen Gasteilchen bei einer bestimmten Temperatur ist.

#### Beispiel (5.5)

Wie groß ist die kinetische Gesamtenergie aller Teilchen eines idealen Gases bei einer Temperatur von  $0^\circ\text{C}$  und einer Stoffmenge von  $n = 1$  mol?

#### Lösung

Nach der kinetischen Gastheorie gilt für die durchschnittliche kinetische Energie eines einzelnen Gasteilchens

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T = \frac{3}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273 = 5,65 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

Multipliziert man diesen Wert mit der Anzahl  $N_A$  an Teilchen pro Mol, so erhält man als Gesamtenergie für ein Mol an Teilchen

$$E_{\text{kin,ges}} = \langle E_{\text{kin}} \rangle \cdot N_A = 5,65 \cdot 10^{-21} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} = 3403 \text{ J/mol}$$

Die in einem Mol enthaltene kinetische Energie  $E_{\text{kin,ges}}$  aller Teilchen entspricht in etwa der kinetischen Energie einer Masse  $m = 1$  kg, die sich mit einer Geschwindigkeit von  $v = \sqrt{\frac{2 \cdot E}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3403}{1}} = 82,5 \text{ m/s} \approx 297 \text{ km/h}$  bewegt. Diese beachtliche Energiemenge ist beispielsweise der Grund dafür, weshalb Wärmepumpen einen Teil der kinetischen Teilchen-Energien einer kälteren Umgebung abzupfen und einer wärmeren Umgebung zuführen können.

**Beispiel (5.6)**

Wie groß ist die Wurzel aus der mittleren quadratischen Geschwindigkeit  $v_{\text{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$  von Luftmolekülen bei  $T = 20^\circ\text{C}$ ?

**Lösung**

Nach der kinetischen Gastheorie gilt für die durchschnittliche kinetische Energie eines einzelnen Gasteilchens der Masse  $m_T$

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{m_T \cdot \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T \quad \Leftrightarrow \quad \langle v^2 \rangle = \frac{3 \cdot k \cdot T}{m_T}$$

Die Teilchenmasse ergibt sich aus  $m_T = \frac{M}{N_A}$  und damit ergibt sich für Luft, die ja aus Stickstoff und Sauerstoff besteht

$$m_{T,\text{N}_2} = \frac{28}{6,022 \cdot 10^{23}} = 4,65 \cdot 10^{-23} \text{ g} = 4,65 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$$

$$m_{T,\text{O}_2} = \frac{32}{6,022 \cdot 10^{23}} = 5,31 \cdot 10^{-23} \text{ g} = 5,31 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$$

Setzt man diese Werte in die obige Gleichung ein, so erhält man für die Geschwindigkeiten der Stickstoff- und Sauerstoffteilchen

$$v_{\text{rms},\text{N}_2} = \sqrt{\langle v_{\text{N}_2}^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 293,15}{4,65 \cdot 10^{-26}}} = 511 \text{ m/s}$$

$$v_{\text{rms},\text{O}_2} = \sqrt{\langle v_{\text{O}_2}^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 293,15}{5,31 \cdot 10^{-26}}} = 478 \text{ m/s}$$

Die Stickstoffteilchen sind schneller als die Sauerstoffteilchen. Es gilt allgemein, je geringer die molare Masse eines Gases ist, desto höher ist bei einer bestimmten Temperatur die durchschnittliche Geschwindigkeit der enthaltenen Teilchen.

**5.3.2 Temperatur von festen und flüssigen Körpern**

Auch bei festen und flüssigen Körpern kann man einen Zusammenhang zwischen Temperatur und Teilchenbewegung erkennen. Allgemein gilt:

Wärme ist eine Form von ungeordneter Teilchenbewegung. Die mittlere Bewegungsenergie der Teilchen ist proportional zur absoluten Temperatur

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T \quad \Leftrightarrow \quad T = \frac{2 \cdot \langle E_{\text{kin}} \rangle}{3 \cdot k} \quad (5.14)$$

Bei Gasen ist die Teilchenbewegung ziemlich frei und es gibt elastische Stöße zwischen den Teilchen. Bei Flüssigkeiten gibt es auch diese ungeordnete Bewegungen der Teilchen (Brown'sche Bewegung), die z.B. dazu führt dass sich Flüssigkeiten vermischen.

In Festkörpern sind die Moleküle (oder Atome) regelmäßig angeordnet. Sie bilden ein sogenanntes Gitter. Dabei hat jedes Atom einen bestimmten Platz. Je wärmer der Körper ist, desto stärker schwingen die Moleküle. Das Zentrum jeder Schwingung ist der Gitterplatz des Teilchens. Bei Festkörpern führen die Teilchen also ungeordnete Schwingungen um ihre Gitterplätze aus.

### 5.3.3 Der Absolute Temperatur-Nullpunkt

Die mittlere kinetische Energie

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{m \cdot \langle v^2 \rangle}{2} \geq 0$$

enthält ein Quadrat und ist daher immer größer oder gleich Null. Damit kann auch die absolute Temperatur

$$T = \frac{2 \cdot \langle E_{\text{kin}} \rangle}{3 \cdot k} \geq 0$$

nur immer größer oder gleich Null sein.

Der absolute Temperatur-Nullpunkt  $T = 0 \text{ K}$  ( $t = -273^\circ\text{C}$ ) ist die tiefste mögliche Temperatur. Hier ist die mittlere kinetische Energie der Teilchen gleich Null, die Teilchen bewegen sich nicht mehr.

## 5.4 Aufgaben

### Impuls, Kraft, Druck, Teilchenfluss

- (5.1) Ein Gummiball ( $m = 0,1 \text{ kg}$ ), stößt mit der Geschwindigkeit  $v = 5 \text{ m/s}$  gegen eine starre vertikale Wand. Die Stoßzeit beträgt  $0,2 \text{ Sekunden}$ .
- Wie groß ist vor dem Stoß die kinetische Energie des Balls?
  - Wie groß ist der Impuls  $\Delta I$ , den der Ball auf die Wand überträgt?
  - Wie groß ist die Kraft auf die Wand?
- (5.2) In einem Raum fliegen alle Teilchen mit derselben Geschwindigkeit  $v = 10 \text{ m/s}$  normal gegen eine Wand mit der Fläche  $A = 2 \text{ m}^2$ . Die Dichte der Teilchen beträgt  $\rho_N = 2000 \text{ m}^{-3}$ , ihre Masse beträgt  $5 \text{ mg}$ .
- Wie viele Teilchen fliegen in einer Minute gegen die Wand?
  - Wie viele Teilchen fliegen in der Zeit  $\Delta t$  gegen die Wand?
  - Welchen Impuls bekommt die Wand in einer Minute?
  - Welche Kraft wirkt auf die Wand?
  - Welcher Druck wirkt auf die Wand?
- (5.3) Regentropfen mit der Tropfengröße  $V_{\text{tr}} = 1 \text{ mm}^3$  fallen mit der Geschwindigkeit  $v = 1,5963 \text{ m/s}$  im Neigungswinkel von  $70^\circ$  zur Erdoberfläche. In einem Kübel (horizontale Öffnungsfläche  $A = 0,1 \text{ m}^2$ ) findet man nach 10 Minuten  $0,9 \text{ Liter}$  Wasser.
- Berechnen Sie die Anzahl der Tropfen, die in den Kübel gefallen sind!
  - Berechnen Sie die Tropfendichte der Regentropfen!
- (5.4) Regentropfen (Masse  $m = 0,1 \text{ g}$ , Tropfendichte  $1500 \text{ Tropfen/m}^3$ ) fallen im Neigungswinkel von  $60^\circ$  zur Erdoberfläche mit der Geschwindigkeit  $v = 1,2 \text{ m/s}$  auf ein  $2 \text{ m}^2$  großes vertikales Fenster.
- Wie viele Tropfen stoßen in der Zeit  $\Delta t$  an das Fenster?
  - Wie groß ist der Impuls  $\Delta I$ , den das Fenster von den Tropfen in der Zeit  $\Delta t$  erhält, wenn der Stoß elastisch ist und nur die Normalkomponente der Geschwindigkeit wichtig ist?
  - Wie groß sind die Kraft und der Druck auf das Fenster?
- (5.5) In einem Raum gibt es fünf Arten von Teilchen (siehe Tabelle). In diesem Raum steht eine Wand mit der Fläche  $A$  normal zur  $x$ -Achse.
- Welche Teilchen werden niemals an diese Wand stoßen?
  - Wie viele Teilchen von jeder Sorte stoßen in der Zeit  $\Delta t$  an diese Wand?

- c) Wie groß ist der Impuls, den jedes Teilchen in der Zeit  $\Delta t$  an die Wand überträgt?  
 d) Wie groß ist der Druck gegen diese Wand?

Teilchenart	Geschwindigkeit	Masse	Teilchendichte
1	$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 200 \\ 40 \end{pmatrix}$	2 mg	$\rho_{N,1} = 2000 \text{ m}^{-3}$
2	$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 100 \\ 40 \end{pmatrix}$	2 mg	$\rho_{N,2} = 5000 \text{ m}^{-3}$
3	$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 80 \\ 60 \end{pmatrix}$	2 mg	$\rho_{N,3} = 1000 \text{ m}^{-3}$
4	$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}$	2 mg	$\rho_{N,4} = 3000 \text{ m}^{-3}$
5	$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \end{pmatrix}$	2 mg	$\rho_{N,5} = 4000 \text{ m}^{-3}$

(5.6) Führen Sie die Aufgabe (5.5) für eine Wand durch, die normal zur  $y$ -Achse steht!

- (5.7) In einem Rohr mit Querschnitt  $A = 1/2 \text{ m}^2$  gibt es zwei Arten von Staubteilchen. Die Teilchen 1 haben die Geschwindigkeit  $v_1 = 20 \text{ m/s}$  und die Teilchendichte  $\rho_{N,1} = 3000 \text{ m}^{-3}$ . Die Teilchen 2 haben die Geschwindigkeit  $v_2 = 10 \text{ m/s}$  und die Teilchendichte  $\rho_{N,2} = 7000 \text{ m}^{-3}$ . Alle Teilchen fliegen in Richtung der Achse des Rohrs.  
 Wie viele Teilchen fliegen pro Sekunde durch den Rohrquerschnitt?

### Statistik

- (5.8) In einer Wetterstation wurden Temperaturmessungen an verschiedenen Tagen durchgeführt (siehe Tabelle).  
 a) Bestimmen Sie die mittlere Temperatur!  
 b) Bestimmen Sie das Quadrat der mittleren Temperatur!  
 c) Bestimmen Sie das mittlere Quadrat der Temperatur!

Häufigkeit $n_i$	5	6	3	10	6
Temperatur in °C	20	18	25	28	30

- (5.9) Die Tabelle zeigt die Häufigkeit von Teilchen der Masse  $m = 0,1 \text{ g}$  mit bestimmten Geschwindigkeiten.

Häufigkeit	$n_1 = 9$	$n_2 = 8$	$n_3 = 1$	$n_4 = 2$
Geschwindigkeit in m/s	$v_1 = 3$	$v_2 = 5$	$v_3 = 6$	$v_4 = 10$

- a) Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit dieser Teilchen!  
 b) Berechnen Sie das mittlere Quadrat der Geschwindigkeit dieser Teilchen!  
 c) Berechnen Sie die mittlere kinetische Energie dieser Teilchen!

(Hinweis: die mittlere Kinetische Energie ist  $\langle E_{\text{kin}} \rangle = \sum_i E_{\text{kin},i} = \sum_i \frac{m \cdot v_i^2}{2} = \frac{m \langle v^2 \rangle}{2}$ )

### Geschwindigkeit, Druck und Temperatur

- (5.10) Wir betrachten Luft bei Normalluftdruck. Die Dichte der Luft beträgt  $\rho = 1,29 \text{ kg/m}^3$ .  
 a) Berechnen Sie mittlere quadratische Geschwindigkeit der Luftmoleküle!  
 b) Ziehen Sie daraus die Wurzel um  $v_{\text{rms}}$  zu erhalten! Dies ist eine Abschätzung der mittleren Geschwindigkeit der Teilchen ( $\langle v \rangle \approx v_{\text{rms}}$ ).

- (5.11) Wir betrachten Stickstoff-Gas bei einer Temperatur von  $27^\circ\text{C}$ . Berechnen Sie die mittlere kinetische Energie, die mittlere quadratische Geschwindigkeit und die Wurzel daraus  $v_{\text{rms}}$  für ein Gasteilchen!
- (5.12) In einem Behälter befindet sich Stickstoff unter einem Druck von 1,1 MPa. Die Teilchendichte beträgt  $10^{20} \text{ cm}^{-3}$ .
- Wie groß ist die mittlere kinetische Energie der Stickstoffmoleküle?
  - Welche Temperatur herrscht in dem Gas?
  - Bestimmen Sie die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle!
- (5.13) In einem Behälter von 2 Liter befindet sich 1 mol Argongas. Die Argonteilchen haben eine mittlere quadratische Geschwindigkeit von 400 m/s.
- Berechnen Sie den Druck des Gases!
  - Berechnen Sie die Temperatur des Gases!
- (5.14) a) Wie groß ist die durchschnittliche kinetische Energie eines Sauerstoffteilchens  $\text{O}_2$  bei Normalbedingungen?  
b) Wie groß ist die gesamte kinetische Energie von 2 mol Sauerstoff bei  $20^\circ\text{C}$ ?

## 6 Der erste Hauptsatz der Wärmelehre

### 6.1 Die Druckenergie

#### Druckenergie bei konstantem Druck

Das Produkt aus Druck und Volumen  $p \cdot V$  hat die Einheit einer Energie und hat auch wirklich die Bedeutung einer Energie.

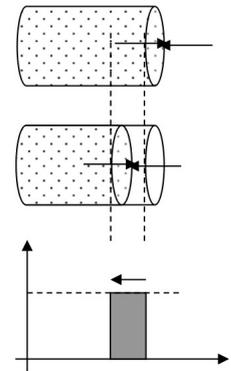
Wir komprimieren ein Gas von  $V_1$  auf  $V_2$  bei konstantem Druck  $p_1 = p_2 = p$ . Dabei muß man gegen die Kraft des Gases arbeiten

$$F_{\text{gas}} = p \cdot A$$

Die Änderung der potentiellen Energie des Systems (=Gas) ist daher:

$$\Delta E_{\text{gas}} = -F_{\text{system}} \cdot \Delta s = -p \cdot A \cdot \Delta s = -p \cdot \Delta V$$

Im  $p$ - $V$ -Diagramm ist die Energieänderung  $\Delta E$  als Fläche eines Rechtecks mit den Seiten  $p$  und  $\Delta V$  sichtbar.



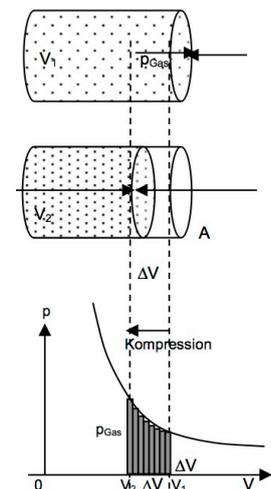
#### Das Vorzeichen der Druckenergie

- Kompression: Volumen wird kleiner  $\Delta V < 0 \implies \Delta E_{\text{gas}} > 0$  das Gas absorbiert Energie, Energie wird absorbiert.
- Expansion: Volumen wird größer  $\Delta V > 0 \implies \Delta E_{\text{gas}} < 0$  das Gas verliert Energie, Energie wird frei.

#### Druckenergie bei nicht konstantem Druck

Wenn  $p \neq \text{const}$  ist, so ist das  $p$ - $V$ -Diagramm eine Kurve (zum Beispiel eine Isotherme). Die Energieänderung wird also kein Rechteck mehr sein. Man kann die gesamte Volumsänderung in viele sehr kleine (unendlich kleine) Volumsänderungen  $dV_i$  unterteilen, für die dann der Druck  $p_i$  näherungsweise konstant ist. Dann kann man die Energieänderung schreiben als  $\Delta E_i = p_i \cdot dV_i$ . Diese kleine Änderung der Energie ist nun wieder als (sehr schmales) Rechteck mit der Basis  $dV_i$  und der Höhe  $p_i$  sichtbar (Abbildung links). Die gesamte Energieänderung ist dann einfach die Summe  $\Delta E_{\text{ges}} = \sum_i p_i \cdot dV_i$ , was bei sehr kleinen Änderungen in ein Integral übergeht  $\Delta E_{\text{ges}} = \int p dV$  und der Fläche unter der Kurve entspricht.

Es gilt allgemein:



Im  $p$ - $V$ -Diagramm ist die Fläche unter der Kurve gleich der Änderung der Energie des Gases  $\Delta E_{\text{gas}}$ .

#### Äußere Arbeit und Energie des Gases

Es gilt:

Das Gas absorbiert bei der Kompression Energie. Diese muß von außen kommen. Die Umgebung des Gases verliert also diese Energie.

Umgekehrt gilt:

Bei der Expansion wird Energie frei. Das Gas gibt also Energie an die Umgebung ab.

Es gibt also neben dem System des Gases auch immer die Umgebung. Daher muss man zwischen  $\Delta E_{\text{gas}}$  und  $\Delta E_{\text{aussen}}$  unterscheiden.

Es gilt:

$$\Delta E_{\text{gas}} = -\Delta E_{\text{aussen}} \quad (6.1)$$

$\Delta E_{\text{gas}}$  wird als "Druckenergie", "Druckarbeit", "Mechanische Arbeit" oder "Volumenarbeit" bezeichnet.  $\Delta E_{\text{aussen}}$  wird "Äußere Arbeit" genannt.

Bei der Kompression und Expansion eines Gas ändert sich immer auch die mechanische Energie

$\Delta E_{\text{gas}}$ . Bei konstantem Druck gilt

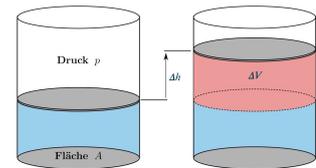
$$\Delta E_{\text{gas}} = -p \cdot \Delta V = -p \cdot (V_2 - V_1) \quad (6.2)$$

$\Delta E_{\text{gas}}$  ist im  $p$ - $V$ -Diagramm als Fläche unter der Kurve zwischen  $V_1$  und  $V_2$  sichtbar.

### Beispiel (6.1)

Ein Gaszylinder hat den Querschnitt  $A = 20 \text{ cm}^2$  und ist bei  $27^\circ\text{C}$  bis zur Höhe  $h_1 = 0,3 \text{ m}$  mit einem Gas gefüllt. Der Kolben hat die Masse  $m = 10 \text{ kg}$ . Es wirkt kein weiterer Druck (auch kein Luftdruck). Wir erwärmen das Gas so lange, bis seine Höhe im Zylinder  $h_2 = 0,4 \text{ m}$  beträgt.

- Welche Zustandsänderung ist das?
- Berechnen Sie die Temperatur des Gases nach der Erwärmung!
- Wie groß ist die mechanische Energie, die das Gas leistet?



### Lösung

- Das ist eine isobare Zustandsänderung, der Druck ist konstant

$$p = \frac{F_g}{A} = \frac{m \cdot g}{A} = \frac{10 \cdot 10}{20 \cdot 10^{-4}} = 50\,000 \text{ Pa}$$

- Die Temperatur nach der Erwärmung ist

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{T_1} &= \frac{V_2}{T_2} \\ T_2 &= \frac{V_2}{V_1} \cdot T_1 = \frac{A \cdot h_2}{A \cdot h_1} \cdot T_1 = \frac{h_2}{h_1} \cdot T_1 \\ T_2 &= \frac{0,4}{0,3} \cdot (273,15 + 27) = 400,2 \text{ K} = 127,05 \text{ }^\circ\text{C} \end{aligned}$$

- Die mechanische Energie ist

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{gas}} &= -p \cdot \Delta V = -\frac{F_g}{A} \cdot A \cdot (h_2 - h_1) = -F_g \cdot \Delta h \\ \Delta E_{\text{gas}} &= -10 \cdot 10 \cdot (0,4 - 0,3) = -10 \text{ J} \end{aligned}$$

In diesem Fall wird die mechanische Energie frei (negatives Vorzeichen).

## 6.2 Die Innere Energie

Wenn man ein Gas erwärmt, kann sich das Volumen ändern oder auch nicht (zum Beispiel in einem fest verschlossenen Gefäß). Es ändert sich aber sicher die kinetische Energie der Gasteilchen. Diese Energie, für alle seine Teilchen zusammengerechnet, heißt innere Energie  $U$  des Gases.

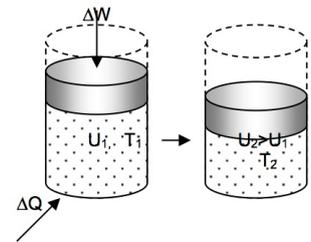
Unter der inneren Energie  $U$  eines Gases versteht man die kinetische Energie aller Teilchen.

- Am absoluten Nullpunkt ist die Innere Energie eines Gases  $U = 0$ , weil dort die Teilchen keine ungeordnete Bewegung mehr ausführen.
- Wenn man ein Gas erwärmt und die Temperatur steigt  $\Delta T > 0$ , so nimmt die innere Energie zu  $\Delta U > 0$ .
- Wenn man ein Gas abkühlt und die Temperatur sinkt  $\Delta T < 0$ , so nimmt die innere Energie ab  $\Delta U < 0$ .

## 6.3 Der erste Hauptsatz der Wärmelehre

Es sei ein Gas  $(p_1, V_1, T_1)$  gegeben. Wir ändern seinen Zustand, indem wir

- ihm durch eine Flamme Wärme  $\Delta Q$  zuführen und
- zugleich den Kolben nach innen drücken und dem Gas damit mechanische Energie (Arbeit)  $\Delta W = \Delta E_{\text{gas}}$  zuführen



Dabei steigt die Temperatur und daher auch die Innere Energie  $U$ .

Es gilt:

Erster Hauptsatz der Wärmelehre:  
Die Änderung der inneren Energie setzt sich zusammen aus der zugeführten Wärme und der zugeführten mechanischen Energie.

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W \quad (6.3)$$

Bei konstantem Druck  $p$  ist die mechanische Energie gleich

$$\Delta W = \Delta E_{\text{gas}} = -p \cdot \Delta V \quad (6.4)$$

und der erste Hauptsatz hat dann die Form

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W = \Delta Q - p \cdot \Delta V \quad (6.5)$$

Eigentlich ist der erste Hauptsatz nichts anderes als eine Form des Energieerhaltungssatzes und lässt sich auch folgendermaßen formulieren:

Allgemeines Prinzip der Energieerhaltung (erster Hauptsatz der Wärmelehre):  
In einem thermisch und mechanisch abgeschlossenen System ist die Gesamtenergie konstant.

Bereits vor vielen Jahrhunderten wurde immer wieder versucht, eine Maschine zu konstruieren, die ohne Zufuhr von Energie ständig mechanische Arbeit verrichtet. Eine solche Maschine bezeichnet man als Perpetuum mobile 1. Art. Dies widerspricht jedoch dem ersten Hauptsatz der Wärmelehre sowie dem allgemeinen Energieerhaltungssatz.

Eine andere Formulierung der ersten Hauptsatzes lautet deshalb:

Erster Hauptsatz der Wärmelehre:  
Es gibt kein Perpetuum mobile 1. Art.

*Beispiel (6.2)*

Wir erwärmen ein Gas in einem Zylinder mit einer Elektroheizung und führen dabei 300 J zu. Dabei steigt der Kolben (Masse  $m = 8$  kg) über dem Gas um 40 cm. Bestimmen Sie die Größen  $\Delta Q$ ,  $\Delta W$  und  $\Delta U$ ! Steigt die Temperatur im System oder fällt sie?

**Lösung**

Die Zustandsänderung ist isobar  $p = \frac{F_g}{A} = \frac{m \cdot g}{A} = \frac{80}{A}$  Pa

$$\begin{aligned}\Delta Q &= 300 \text{ J} \\ \Delta W &= -p \cdot \Delta V = \frac{F_g}{A} \cdot A \cdot \Delta h = -F_g \cdot \Delta h = -80 \cdot 0,4 = -32 \text{ J} \\ \Delta U &= \Delta Q + \Delta W = 300 - 32 = +268 \text{ J} > 0\end{aligned}$$

Die Änderung der inneren Energie ist positiv, d.h. die Temperatur steigt.

*Beispiel (6.3)*

Das Volumen eines Gases wird bei  $p = 70\,000$  Pa = const durch Kompression um 0,5 Liter vermindert. Zugleich verliert das Gas an die kalte Umgebung 60 J Energie. Bestimmen Sie die Größen  $\Delta Q$ ,  $\Delta W$  und  $\Delta U$ ! Steigt die Temperatur im System oder fällt sie?

**Lösung**

$$\begin{aligned}\Delta Q &= -60 \text{ J} \\ \Delta W &= -p \cdot \Delta V = -70\,000 \cdot (-0,5 \cdot 10^{-3}) = +35 \text{ J} \\ \Delta U &= \Delta Q + \Delta W = -60 + 35 = -25 \text{ J} < 0\end{aligned}$$

Die Änderung der inneren Energie ist negativ, d.h. die Temperatur sinkt.

*Beispiel (6.4)*

3 Liter eines Gases wird bei konstantem Volumen erwärmt, dabei werden 100 J zugeführt. Bestimmen Sie die Größen  $\Delta Q$ ,  $\Delta W$  und  $\Delta U$ ! Steigt die Temperatur im System oder fällt sie?

**Lösung**

Die Zustandsänderung ist isochor  $V = \text{const}$ , daher ist  $\Delta V = 0$

$$\begin{aligned}\Delta Q &= +100 \text{ J} \\ \Delta W &= -p \cdot \Delta V = 0 \text{ J} \\ \Delta U &= \Delta Q + \Delta W = \Delta Q = +100 \text{ J} > 0\end{aligned}$$

Die Änderung der inneren Energie ist positiv, d.h. die Temperatur steigt.

## 6.4 Die Wärmekapazität von Gasen

### 6.4.1 Die spezifische Wärmekapazität von Gasen

Bei der Erwärmung von Gasen gibt es einen Unterschied, ob man sie bei konstantem Druck (isobar) oder bei konstantem Volumen (isochor) erwärmt. Beim letzteren Vorgang braucht man weniger Energie.

Bei konstantem Volumen kommt die gesamte Wärmezufuhr der Temperaturerhöhung zugute. Wenn sich das Gas jedoch ausdehnen kann, dann wird ein Teil der Wärme für die Verrichtung der Expansionsarbeit aufgewendet und fehlt damit für die Temperaturerhöhung.

Es sind daher auch die spezifischen Wärmekapazitäten verschieden.

Es gilt:

Die Wärmeenergie  $\Delta Q$ , die man einem Gas zuführen muß, um es bei konstantem Druck um die Temperatur  $\Delta T$  zu erwärmen ist

$$\Delta Q_{p=\text{const}} = c_p \cdot m \cdot \Delta T \quad (6.6)$$

Die Wärmeenergie  $\Delta Q$ , die man einem Gas zuführen muß, um es bei konstantem Volumen um die Temperatur  $\Delta T$  zu erwärmen ist

$$\Delta Q_{V=\text{const}} = c_V \cdot m \cdot \Delta T \quad (6.7)$$

$$\Delta Q_{p=\text{const}} > \Delta Q_{V=\text{const}} \iff c_p > c_V \quad (6.8)$$

Daraus ergeben sich die spezifischen Wärmekapazitäten:

Die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck  $c_p$  eines Gases ist die Energie, die nötig ist, um 1 kg dieses Gases um  $\Delta T = 1^\circ\text{C}$  zu erwärmen.

Die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen  $c_V$  eines Gases ist die Energie, die nötig ist, um 1 kg dieses Gases um  $\Delta T = 1^\circ\text{C}$  zu erwärmen.

*Einheit:*  $[c_p] = [c_V] = \left[\frac{\Delta Q}{m \cdot \Delta T}\right] = \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} = \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$

*Beispiele für die spezifischen Wärmekapazitäten:*

Stoff	$c_p$ in kJ/(kg · K)	$c_V$ in kJ/(kg · K)
Helium He	5,23	3,15
Argon Ar	0,52	0,313
Wasserstoff H <sub>2</sub>	14,24	10,1
Stickstoff N <sub>2</sub>	1,04	0,74
Sauerstoff O <sub>2</sub>	0,91	0,65
Kohlenmonoxid CO	1,05	0,75
Kohlendioxid CO <sub>2</sub>	0,85	0,646

Die angegebenen spezifischen Wärmekapazitäten sind stark temperaturabhängig, weshalb die angegebenen Werte nur als ungefähre Richtwerte zu nehmen sind.

*Beispiel (6.5)*

- Wie groß ist die Energie, die man braucht, um 0,05 kg Wasserstoff isobar um 5 K zu erwärmen?
- Wie groß ist die Energie, die man braucht, um 0,01 kg Sauerstoff isochor um 20 K zu erwärmen?

**Lösung**

- Die Wärmeenergie ist  $\Delta Q_{p=\text{const}} = c_p \cdot m \cdot \Delta T = 14,24 \cdot 10^3 \cdot 0,05 \cdot 5 = 3,56 \text{ kJ}$
- Die Wärmeenergie ist  $\Delta Q_{V=\text{const}} = c_V \cdot m \cdot \Delta T = 0,65 \cdot 10^3 \cdot 0,01 \cdot 20 = 0,13 \text{ kJ}$

### 6.4.2 Die molare Wärmekapazität von Gasen

Bezieht man die Wärmekapazität eines Gases nicht auf die Masse, sondern auf die Stoffmenge, so verwendet man anstatt der spezifischen Wärmekapazität die molare Wärmekapazität (auch Molwärme genannt).

Die Wärmeenergie  $\Delta Q$ , die man einem Gas zuführen muß, um es bei konstantem Druck um die Temperatur  $\Delta T$  zu erwärmen ist

$$\Delta Q_{p=\text{const}} = C_p \cdot n \cdot \Delta T \quad (6.9)$$

Die Wärmeenergie  $\Delta Q$ , die man einem Gas zuführen muß, um es bei konstantem Volumen um die Temperatur  $\Delta T$  zu erwärmen ist

$$\Delta Q_{V=\text{const}} = C_V \cdot n \cdot \Delta T \quad (6.10)$$

Daraus ergeben sich die molaren Wärmekapazitäten:

Die molare Wärmekapazität bei konstantem Druck  $C_p$  eines Gases ist die Energie, die nötig ist, um 1 Mol dieses Gases um  $\Delta T = 1^\circ\text{C}$  zu erwärmen.

Die molare Wärmekapazität bei konstantem Volumen  $C_V$  eines Gases ist die Energie, die nötig ist, um 1 Mol dieses Gases um  $\Delta T = 1^\circ\text{C}$  zu erwärmen.

$$\text{Einheit: } [C_p] = [C_V] = \left[ \frac{\Delta Q}{n \cdot \Delta T} \right] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot ^\circ\text{C}} = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

Zwischen der spezifischen Wärmekapazität  $c$  und der molaren Wärmekapazität  $C$  besteht der Zusammenhang

$$c \cdot m = C \cdot n \quad \Longleftrightarrow \quad c \cdot M = C \quad (6.11)$$

mit der Molmasse  $M = \frac{m}{n}$ .

Der Vorteil der molaren Wärmekapazität besteht darin, dass diese für alle Gase gleich sind (siehe später).

### 6.4.3 Die innere Energie bei der isochoren Zustandsänderung

Für eine isochore Zustandsänderung, bei der das Volumen konstant bleibt  $V = \text{const}$ , ist  $\Delta W = -p \cdot \Delta V = 0$  und daher ist der erste Hauptsatz

$$\Delta U = \Delta Q_{V=\text{const}} = C_V \cdot n \cdot \Delta T \quad (6.12)$$

Dieser Zusammenhang gilt ganz allgemein. Das Gas kann sich nicht ausdehnen und es wird in diesem Fall keine mechanische Arbeit nach außen geleistet.  $\Delta U$  ist die Energie, die nur für die Beschleunigung der Moleküle verwendet wird, nicht für die Vergrößerung des Volumens und die damit verbundene mechanische Arbeit.

### 6.4.4 Die innere Energie bei der isobaren Zustandsänderung

Für eine isobare Zustandsänderung, bei der der Druck konstant bleibt  $p = \text{const}$ , gilt:

$$\begin{aligned} \Delta Q_{p=\text{const}} &= C_p \cdot n \cdot \Delta T \\ \Delta U &= C_V \cdot n \cdot \Delta T \\ \Delta W &= -p \cdot \Delta V = -n \cdot R \cdot \Delta T \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung aus der idealen Gasgleichung  $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$  folgt. Wir setzen diese Formeln in den ersten Hauptsatz ein

$$\begin{aligned}\Delta U &= \Delta Q + \Delta W \\ C_V \cdot n \cdot \Delta T &= C_p \cdot n \cdot \Delta T - n \cdot R \cdot \Delta T \\ C_V &= C_p - R\end{aligned}$$

Das ergibt:

Die Gleichung von Mayer

$$R = C_p - C_V \quad (6.13)$$

Die Gleichung ist nach dem deutschen Arzt Julius Robert Mayer (1814-1878) benannt, der als einer der ersten Wissenschaftler den Ersten Hauptsatz formulierte.

### 6.4.5 Die mittlere kinetische Energie und die innere Energie

Wir berechnen jetzt die Änderung der inneren Energie  $\Delta U$  mit Hilfe der Änderung der mittleren kinetischen Energie der Moleküle.

Es gilt für die mittlere kinetische Energie  $\Delta \langle E_{kin} \rangle = \frac{3}{2} \cdot k \cdot \Delta T$ . Die innere Energie  $U$  ist die Summe der inneren Energien aller  $N$  Teilchen im Gas. Man kann die innere Energie berechnen, indem man die mittlere kinetische Energie mit der Anzahl der Teilchen multipliziert

$$U = N \cdot \langle E_{kin} \rangle$$

Damit ist die Änderung der inneren Energie

$$\Delta U = N \cdot \Delta \langle E_{kin} \rangle = N \cdot \frac{3}{2} \cdot k \cdot \Delta T = \frac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T$$

Dies vergleichen wir jetzt mit  $\Delta U = C_V \cdot n \cdot \Delta T$  und es ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot \Delta T &= C_V \cdot n \cdot \Delta T \\ \frac{3}{2} \cdot R &= C_V\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$C_p = C_V + R = \frac{5}{2} \cdot R$$

Die molare Wärmekapazität bei konstantem Volumen ist

$$C_V = \frac{3}{2} \cdot R = 12,471 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \quad (6.14)$$

und die molare Wärmekapazität bei konstantem Druck ist

$$C_p = \frac{5}{2} \cdot R = 20,785 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \quad (6.15)$$

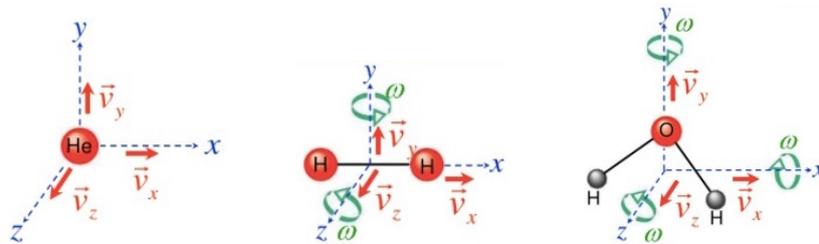
Diese Formeln stimmen leider nur teilweise mit den Experimenten überein, deshalb muss man noch eine Korrektur machen.

### 6.4.6 Die Freiheitsgrade eines Gases

Die Zahl 3 in der Formel  $C_p = \frac{3}{2} \cdot R$  folgt aus den drei Dimensionen des Raumes. Genau Messungen an Gasen haben ergeben, dass  $C_p$  nur bei einigen Gasen gleich  $\frac{3}{2} \cdot R$  ist, wie z.B. Helium He, Neon Ne, Argon Ar. Bei anderen Gasen, zum Beispiel Sauerstoff O<sub>2</sub>, Stickstoff N<sub>2</sub>, Chlor Cl<sub>2</sub> usw., findet man  $C_p = \frac{5}{2} \cdot R$ . Wieder andere Gase (Wasserdampf H<sub>2</sub>O, Kohlendioxid CO<sub>2</sub>, Ozon O<sub>3</sub>) haben  $C_p = \frac{6}{2} \cdot R$ . Der Schlüssel liegt hier in der Anzahl der Freiheitsgrade  $f$ .

Jedes Molekül hat eine bestimmte Anzahl von Möglichkeiten, sich zu bewegen. Diese Anzahl nennt man Freiheitsgrade  $f$ .

Für ein einzelnes Atom (z.B. He) gibt es dafür 3 Möglichkeiten: hinauf-hinunter, vor-zurück, links-rechts. Dies sind die drei Freiheitsgrade der Translation (= geradlinige Bewegung). Für ein Molekül, das aus zwei fest verbundenen Atomen besteht (ein sogenanntes zweiatomiges Gas, z.B. H<sub>2</sub>), gibt es neben den 3 Freiheitsgraden der Translation noch zwei Freiheitsgrade der Rotation (= Drehbewegung). Bei einem dreiatomigen Gas (z.B. H<sub>2</sub>O) sind es 3 Freiheitsgrade der Translation und 3 Freiheitsgrade der Rotation.



Die Anzahl der Freiheitsgrade bei Gasen:

einatomiges Gas: 3 Freiheitsgrade der Translation,  $f = 3$

zweiatomiges Gas: 3 Freiheitsgrade der Translation und 2 Freiheitsgrade der Rotation,  $f = 5$

dreiatomiges Gas: 3 Freiheitsgrade der Translation und 3 Freiheitsgrade der Rotation,  $f = 6$

Bei sehr hohen Temperaturen beginnen die Moleküle auch noch gegeneinander zu schwingen, was zu einer zusätzlichen Erhöhung der Freiheitsgrade führt. Dies soll aber hier nicht behandelt werden. Die molaren Wärmekapazitäten der Gase sind von der Anzahl der Freiheitsgrade abhängig und es gilt:

Die molare Wärmekapazität bei konstantem Volumen ist

$$C_V = \frac{f}{2} \cdot R \quad (6.16)$$

und die molare Wärmekapazität bei konstantem Druck ist

$$C_p = \frac{f + 2}{2} \cdot R \quad (6.17)$$

#### Beispiel (6.6)

- Auf wieviel Grad muss man 50 g Helium von  $t_1 = 0^\circ\text{C}$  aus bei konstantem Volumen erwärmen, damit sich der Druck verdreifacht?
- Berechnen Sie die Änderung  $\Delta U$  der inneren Energie!
- Welche Wärmemenge  $\Delta Q$  muss dann zugeführt werden und welche mechanische Arbeit  $\Delta W$  wird dabei verrichtet?

**Lösung**

a) Für die isochore Zustandsänderung ist die Temperatur nach der Erwärmung

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

$$T_2 = \frac{p_2}{p_1} \cdot T_1 = \frac{3 \cdot p_1}{p_1} \cdot T_1 = 3 \cdot T_1 = 3 \cdot 273,15 = 819,45 \text{ K} = 546,3 \text{ }^\circ\text{C}$$

b) die Molzahl beträgt  $n = \frac{m}{M} = \frac{50}{4} = 12,5 \text{ mol}$   
Helium ist ein einatomiges Gas, daher ist  $f = 3$   
die Änderung der inneren Energie ist

$$\Delta U = C_V \cdot n \cdot \Delta T = \frac{f}{2} \cdot R \cdot n \cdot \Delta T = \frac{3}{2} \cdot 8,314 \cdot 12,5 \cdot (819,45 - 273,15) = 85\,161,3 \text{ J}$$

c) Die Änderung der mechanischen Arbeit ist  $\Delta W = -p \cdot \Delta V = 0$  weil  $\Delta V = 0$   
die Änderung der Wärme ist daher  $\Delta U = \Delta Q + \Delta W = \Delta Q = 85\,161,3 \text{ J}$

**Beispiel (6.7)**

Wir erwärmen 84 g Stickstoff bei  $p = 150\,000 \text{ Pa} = \text{const}$  von  $10^\circ\text{C}$  auf  $20^\circ\text{C}$ .  
Bestimmen Sie die Größen  $\Delta U$ ,  $\Delta Q$  und  $\Delta W$ !

**Lösung**

Die Molzahl ist  $n = \frac{m}{M} = \frac{84}{28} = 3 \text{ mol}$   
Stickstoff ist ein zweiatomiges Gas, daher ist  $f = 5$

$$\Delta U = C_V \cdot n \cdot \Delta T = \frac{f}{2} \cdot R \cdot n \cdot \Delta T = \frac{5}{2} \cdot 8,314 \cdot 3 \cdot (20 - 10) = 623,55 \text{ J}$$

$$\Delta Q = C_p \cdot n \cdot \Delta T = \frac{f+2}{2} \cdot R \cdot n \cdot \Delta T = \frac{7}{2} \cdot 8,314 \cdot 3 \cdot (20 - 10) = 872,97 \text{ J}$$

$$\Delta W = -n \cdot R \cdot \Delta T = -3 \cdot 8,314 \cdot (20 - 10) = -249,42 \text{ J}$$

als Check dient der erste Hauptsatz

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W$$

$$623,55 = 872,97 - 249,42 = 623,55$$

und dieser ist erfüllt.

**Beispiel (6.8)**

Wir erwärmen 10 Mol eines unbekanntes Gases von  $20^\circ\text{C}$  auf  $30^\circ\text{C}$  bei konstantem Volumen  
und brauchen dazu die Wärmeenergie  $\Delta Q = 2078,5 \text{ J}$ .  
Berechnen Sie die Anzahl der Atome eines Moleküls dieses Gases!

**Lösung**

Die Wärmeenergie ist

$$\Delta Q = C_V \cdot n \cdot \Delta T = \frac{f}{2} \cdot R \cdot n \cdot \Delta T$$

$$\Rightarrow f = \frac{2 \cdot \Delta Q}{R \cdot n \cdot \Delta T} = \frac{2 \cdot 2078,5}{8,314 \cdot 10 \cdot 10} = 5$$

damit handelt es sich um ein zweiatomiges Gas.

## 6.5 Aufgaben

### Druckenergie

- (6.1) Zwei Kubikmeter Luft werden bei  $p = 100\,000\text{ Pa} = \text{const}$  von  $10^\circ\text{C}$  auf  $100^\circ\text{C}$  in einem Zylinder mit Kolben erwärmt.
- Wieviel Mol Gas ist in diesem Volumen enthalten?
  - Wie groß ist die mechanische Arbeit, die das Gas bei der Erwärmung leistet?
  - Diese Arbeit erscheint als Fläche in einem Diagramm. Skizzieren Sie dieses und erläutern Sie es!
  - Wie sieht das Diagramm aus, wenn man dieselbe Änderung des Volumens isotherm durchführt? Wie groß ist im Diagramm die entsprechende Fläche?
- (6.2) Ein stehender Gaszylinder hat den Querschnitt  $A = 0,02\text{ m}^2$  und ist bei  $20^\circ\text{C}$  bis zur Höhe  $h_1 = 0,5\text{ m}$  mit einem Gas gefüllt. Der Kolben hat die Masse  $m = 8\text{ kg}$ . Es wirkt kein weiterer Druck (auch kein Luftdruck). Wir erwärmen das Gas so lange, bis seine Höhe im Zylinder  $h_2 = 0,6\text{ m}$  beträgt.
- Welche Zustandsänderung ist das?
  - Berechnen Sie die Temperatur des Gases nach der Erwärmung!
  - Wie groß ist die meachnische Energie, die das Gas leistet?
- (6.3) Luft mit einem Volumen von  $0,5\text{ m}^3$  hat die Temperatur  $20^\circ\text{C}$  und einen Druck  $0,1\text{ MPa}$ .
- Berechnen Sie die Energie, die man braucht, um bei gleichbleibendem Druck die Temperatur auf  $150^\circ\text{C}$  zu erhöhen!
  - Stellen Sie diesen Vorgang in einem  $p$ - $V$ -Diagramm dar!

### Erster Hauptsatz

- (6.4) a) Wie lautet der erste Hauptsatz der Wärmelehre?  
 b) Was bedeuten die Größen  $\Delta Q$ ,  $\Delta W$ , und  $\Delta U$  und wie heißen sie?  
 c) 1 Liter Gas ( $T = 0^\circ\text{C}$ ) wird bei  $p = 120\,000\text{ Pa} = \text{const}$  auf  $100^\circ\text{C}$  erwärmt. Berechnen Sie die Änderung des Volumens! Berechnen Sie die mechanische Arbeit!
- (6.5) Wir erwärmen ein Gas in einem Zylinder mit einer Elektroheizung und führen dabei  $200\text{ J}$  zu. Dabei steigt der Kolben (Masse  $m = 5\text{ kg}$ ) über dem Gas um  $30\text{ cm}$ .
- Wie lautet der erste Hauptsatz der Wärmelehre?
  - Bestimmen Sie die Größen  $\Delta Q$  und  $\Delta W$ ! Achten Sie auf die Vorzeichen!
  - Bestimmen Sie  $\Delta U$ ! Steigt die Temperatur im System oder fällt sie?
- (6.6) Das Volumen eines Gases wird bei  $p = 150\,000\text{ Pa} = \text{const}$  durch Kompression um  $0,2\text{ Liter}$  vermindert. Zugleich verliert das Gas an die kalte Umgebung  $40\text{ J}$  Energie.
- Wie lautet der erste Hauptsatz der Wärmelehre?
  - Bestimmen Sie die Größen  $\Delta Q$  und  $\Delta W$ ! Achten Sie auf die Vorzeichen!
  - Bestimmen Sie  $\Delta U$ ! Steigt die Temperatur im System oder fällt sie?
- (6.7) 1 Liter eines Gases wird bei konstantem Volumen erwärmt, dabei werden  $200\text{ J}$  zugeführt.
- Wie lautet der erste Hauptsatz der Wärmelehre?
  - Bestimmen Sie die Größen  $\Delta Q$  und  $\Delta W$ ! Achten Sie auf die Vorzeichen!
  - Bestimmen Sie  $\Delta U$ ! Steigt die Temperatur im System oder fällt sie?
- (6.8) Ein heißes Gas in einem Zylinder expandiert so, daß sein Kolben ( $m = 10\text{ kg}$ ) um  $3\text{ m}$  nach oben steigt. Gleichzeitig absorbiert es  $140\text{ J}$  durch die schlecht isolierten Zylinderwände von seiner

noch heißeren Umgebung.

- a) Bestimmen Sie die Größen  $\Delta Q$ ,  $\Delta W$  und  $\Delta U$ ! Achten Sie auf die Vorzeichen!
- b) Erwärmt sich das System oder kühlt es ab?

- (6.9) Ein Gas wird bei konstantem Volumen erwärmt und erhält von außen die Wärmeenergie 400 J. Bestimmen Sie die Größen  $\Delta Q$ ,  $\Delta W$  und  $\Delta U$ !
- (6.10) In einem aufrechten Zylinder mit einem sehr schweren Kolben ( $m = 20$  kg) befindet sich ein heißes Gas. Der Kolben ist fixiert, sodaß er weder sinken noch steigen kann. Nun stellen wir das Gas in einen Kühlschrank und entriegeln gleichzeitig den Kolben, sodaß er um 40 cm sinkt. Gleichzeitig verliert das Gas 7 J durch die schlecht isolierten Wände an die kalte Umgebung. Erwärmt sich das Gas oder kühlt es ab?
- (6.11) Wir komprimieren ein Gas isotherm in einem Wasserbad. Wir brauchen dazu 50 J. Bestimmen Sie die Größen  $\Delta Q$ ,  $\Delta W$  und  $\Delta U$ !

### Wärmekapazität und Freiheitsgrade

- (6.12) a) Wie groß ist die Energie, die man braucht, um 560 g Stickstoff ( $N_2$ ) bei konstantem Volumen von  $20^\circ\text{C}$  auf  $100^\circ\text{C}$  zu erwärmen?  
 b) Wie groß ist die Energie, die man braucht, um 560 g Stickstoff ( $N_2$ ) bei konstantem Druck von  $20^\circ\text{C}$  auf  $100^\circ\text{C}$  zu erwärmen?
- (6.13) Bestimmen Sie die Größen  $\Delta U$ ,  $\Delta Q$  und  $\Delta W$  der folgenden Zustandsänderungen.  
 a) Wir erwärmen 48 g Sauerstoff bei konstantem Volumen von  $10^\circ\text{C}$  auf  $20^\circ\text{C}$ .  
 b) Wir erwärmen 126 g Stickstoff bei  $p = 150\,000$  Pa = const von  $10^\circ\text{C}$  auf  $20^\circ\text{C}$ .
- (6.14) Der bewegliche Kolben eines Zylinders schließt 1 Mol eines Edelgases mit  $t_1 = 0^\circ\text{C}$  ein. Das Gas wird auf  $t_2 = 100^\circ\text{C}$  erwärmt und der Kolben schiebt sich gegen den gleichbleibenden Außendruck von 1 bar heraus.  
 a) Berechnen Sie die Volumenzunahme  $\Delta V$ !  
 b) Welche Wärmemenge muss dem einatomigen Gas zugeführt werden?  
 c) Welche mechanische Arbeit  $\Delta W$  verrichtet das Gas bei der Ausdehnung?  
 d) Berechnen Sie die Änderung  $\Delta U$  der inneren Energie des Gases!
- (6.15) Ein einatomiges Gas wird aus dem Anfangszustand mit  $T_1 = 300$  K,  $p_1 = 1$  bar und  $V_1 = 1$  m<sup>3</sup> zunächst isobar erwärmt, bis das Volumen  $V_2 = 2 \cdot V_1$  beträgt. Anschließend wird es isochor erwärmt, bis der Druck  $p_3 = 3 \cdot p_1$  beträgt.  
 a) Bestimmen Sie die fehlenden Zustandsgrößen (Druck, Temperatur, innere Energie und Volumen) für die drei Zustände!  
 b) Skizzieren Sie den Vorgang in einem  $p$ - $V$ -Diagramm!  
 c) Bestimmen Sie die jeweils zugeführten Wärmemengen  $\Delta Q_{12}$  und  $\Delta Q_{23}$  sowie die jeweils verrichtete Volumenarbeit  $\Delta W_{12}$  und  $\Delta W_{23}$ !
- (6.16) Gegeben sind 67,2 Liter Helium bei Normalbedingungen.  
 a) Wieviel Energie braucht man, um es bei konstantem Volumen auf  $20^\circ\text{C}$  zu erwärmen?  
 b) Wieviel Energie braucht man, um es bei konstantem Druck auf  $20^\circ\text{C}$  zu erwärmen?  
 c) Welche Energie bekommt die Umgebung des Gases in Frage b)?
- (6.17) Ein einatomiges Gas hat bei  $p = 100\,000$  Pa und  $20^\circ\text{C}$  das Volumen 97,49 Liter.  
 a) Wie viele Mol enthält das Gas?  
 b) Wir erwärmen das Gas isobar auf  $40^\circ\text{C}$ . Berechnen Sie die Wärmeenergie, die man dafür

braucht!

c) Wir erwärmen das Gas isochor auf  $40^\circ\text{C}$ . Berechnen Sie die Wärmeenergie, die man dafür braucht!

(6.18) Gegeben sind 40 Gramm Helium bei 100 000 Pa und  $27^\circ\text{C}$ .

a) Berechnen Sie die Molzahl dieser Gasmenge!

b) Wir erwärmen diese Menge Gas bei konstantem Volumen auf  $30^\circ\text{C}$ . Wie groß ist die Wärme  $\Delta Q$ , die man für diese Erwärmung braucht?

(6.19) Ein Mol eines zweiatomigen Gases ist bei  $100^\circ\text{C}$  und  $p = 100\,000\text{ Pa}$  in einem kleinen Glasgefäß ( $C_{\text{gef},1} = 10\text{ J/K}$ , Volumen = konstant) eingeschlossen. Es wird in 1 Liter Wasser eingebracht, welches sich bei  $20^\circ\text{C}$  in einem Gefäß ( $C_{\text{gef},2} = 20\text{ J/K}$ ) befindet.

Berechnen Sie die Erwärmung des Wassers!

(6.20) In einem kleinen Glasgefäß (Volumen = konstant) sind 33,256 Liter Gas bei  $527^\circ\text{C}$  und  $p = 100\,000\text{ Pa}$  eingeschlossen. Wir erwärmen das Gas um  $\Delta T = 10^\circ\text{C}$  und brauchen dazu die Wärmeenergie  $\Delta Q = 83,14\text{ J}$ .

a) Berechnen Sie die Molzahl des Gases!

b) Berechnen Sie die spezifische Molwärme des Gases!

c) Berechnen Sie die Zahl der Freiheitsgrade  $f$ !

(6.21) Wir erwärmen 42,84 Liter eines unbekanntes Gases von  $100^\circ\text{C}$  auf  $120^\circ\text{C}$  beim konstanten Druck  $p = 140\,000\text{ Pa}$  und brauchen dazu die Wärmeenergie  $\Delta Q = 332,56\text{ J}$ .

Wieviel Atome hat jedes Molekül dieses Gases?

(6.22) Die Energie für die Erwärmung von einem Mol eines Gases um  $1^\circ\text{C}$  beträgt  $\frac{3R}{2}$ .

a) Geschieht diese Erwärmung bei konstantem Druck oder bei konstantem Volumen?

b) Wieviele Atome hat jedes Gasmolekül?

(6.23) Beweisen Sie analog zur Gleichung von Robert Meyer die folgende Beziehung für die spezifischen Wärmekapazitäten:  $c_p - c_V = R_{\text{spez}}$ !

(6.24) a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen  $\langle E_{\text{kin}} \rangle$  und  $\Delta U$ ?

b) Bei welcher Zustandsänderung eines Gases ändert sich die innere Energie nicht?

## 7 Die adiabatische Zustandsänderung

### 7.1 Die Zustandsgleichungen

#### Was bedeutet adiabatisch?

“Adiabatisch” bezeichnet eine Zustandsänderung, die isoliert gegen Wärmeübertragung statt findet. Es kann also keine Wärme hinaus und keine Wärme hinein, d.h.  $\Delta Q = 0$ . Bei einer adiabatischen Zustandsänderung wird keine Wärme mit der Umgebung ausgetauscht. Es ändern sich alle drei Zustandsgrößen.

Die Zustandsänderung wird

- entweder in einem isolierten Gefäß durchgeführt
- oder sehr schnell durchgeführt,

so dass für den Abfluß oder Zufluß der Wärme  $\Delta Q$  keine Zeit bleibt.

Ein Beispiel für eine adiabatische Kompression ist das schnelle Zusammendrücken einer Luftpumpe, so dass die zugeführte mechanische Energie vollständig in innere Energie des Gases umgewandelt wird und zu einer Temperaturerhöhung führt. Erfolgt die Kompression langsamer, so gibt die Luft einen Teil der Wärme an die Umgebung ab.

In der Praxis gibt es keine vollkommen adiabatische, sondern nur fast adiabatische Zustandsänderungen.

#### Der erste Hauptsatz

Der erste Hauptsatz lautet dann

$$\begin{aligned}\Delta U &= \Delta Q + \Delta W \\ \Delta U &= \Delta W = -p \cdot \Delta V\end{aligned}$$

Wir setzen  $\Delta U = n \cdot C_V \cdot \Delta T$  und  $p = \frac{n \cdot R \cdot T}{V}$  ein und formen um

$$\begin{aligned}n \cdot C_V \cdot \Delta T &= -\frac{n \cdot R \cdot T}{V} \cdot \Delta V \\ C_V \cdot \frac{\Delta T}{T} &= -R \cdot \frac{\Delta V}{V} = (C_V - C_p) \cdot \frac{\Delta V}{V} \\ \frac{\Delta T}{T} &= \frac{C_V - C_p}{C_V} \cdot \frac{\Delta V}{V} = \left(1 - \frac{C_p}{C_V}\right) \cdot \frac{\Delta V}{V} = (1 - \kappa) \cdot \frac{\Delta V}{V}\end{aligned}$$

Die Größe  $\kappa = \frac{C_p}{C_V} = \frac{f+2}{f}$  heißt Adiabatenkoeffizient. Die (Differential-) Gleichung kann mit Hilfe der Integralrechnung gelöst werden

$$T = \text{const} \cdot V^{1-\kappa}$$

und es ergibt sich die adiabatische Zustandsgleichung für Temperatur und Volumen

$$T \cdot V^{\kappa-1} = \text{const} \quad \Leftrightarrow \quad T_1 \cdot V_1^{\kappa-1} = T_2 \cdot V_2^{\kappa-1}$$

Für die Druck und Volumen kann man eine ähnliche Gleichung ableiten

$$p \cdot V^\kappa = \text{const} \quad \Leftrightarrow \quad p_1 \cdot V_1^\kappa = p_2 \cdot V_2^\kappa$$

Die Zustandsgleichungen für die adiabatische Zustandsänderung sind (Poisson'sche Gesetze)

$$T \cdot V^{\kappa-1} = \text{const} \quad \Leftrightarrow \quad T_1 \cdot V_1^{\kappa-1} = T_2 \cdot V_2^{\kappa-1} \quad (7.1)$$

$$p \cdot V^{\kappa} = \text{const} \quad \Leftrightarrow \quad p_1 \cdot V_1^{\kappa} = p_2 \cdot V_2^{\kappa} \quad (7.2)$$

$$\text{Der Adiabatenkoeffizient ist } \kappa = \frac{C_p}{C_V} = \frac{f+2}{f}.$$

Die Gesetze wurden vom französischen Mathematiker und Physiker Simeon Denis Poisson (1781 - 1840) entdeckt.

### Beispiel (7.1)

Das Luftvolumen einer Fahrradpumpe wird sehr schnell auf das Dreifache des Volumens expandiert. Die Anfangstemperatur ist  $20^\circ\text{C}$ .

Berechnen Sie die Endtemperatur!

### Lösung

Da die Expansion sehr schnell ist, handelt es sich um eine adiabatische Zustandsänderung. Luft ist ein zweiatomiges Gas, daher ist  $f = 5$  und der Adiabatenkoeffizient ist  $\kappa = \frac{C_p}{C_V} = \frac{f+2}{f} = \frac{7}{5}$  und  $\kappa - 1 = \frac{2}{5}$ .

Wir setzen in die Gleichung ein

$$\begin{aligned} T_1 \cdot V_1^{\kappa-1} &= T_2 \cdot V_2^{\kappa-1} \\ T_2 &= T_1 \cdot \frac{V_1^{\kappa-1}}{V_2^{\kappa-1}} = T_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1} = T_1 \cdot \left(\frac{V_1}{3 \cdot V_1}\right)^{\kappa-1} = T_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\kappa-1} \\ T_2 &= (20 + 273,15) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{5}} = 293,15 \cdot 0,644 = 188,8 \text{ K} = -84,35^\circ\text{C} \end{aligned}$$

## 7.2 Der Vergleich von Adiabaten und Isothermen im $p$ - $V$ -Diagramm

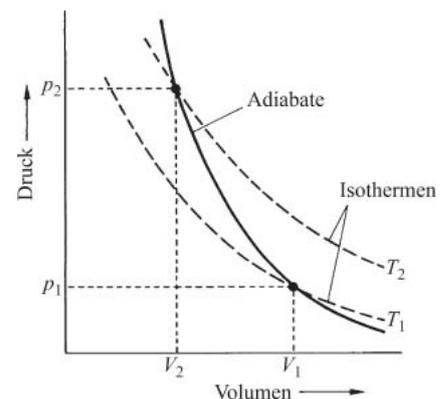
Eine Isotherme ist eine Kurve, auf welcher jeder Zustand dieselbe Temperatur hat. Die Abbildung enthält zwei Isothermen (strichlierte Linien). Die höhere Isotherme gilt für die höhere Temperatur  $T_2$ , die tiefere Isotherme ist für  $T_1$ .

Eine Adiabate ist eine Kurve, für welche in jedem Punkt das Poisson'sche Gesetz gilt

$$p \cdot V^{\kappa} = \text{const}$$

Wenn  $p$  und  $V$  adiabatisch geändert werden, ändert sich auch die Temperatur. Daher muß jede Adiabate von einer Isotherme zur anderen führen. Die Adiabate ist in der Abbildung die durchgehend gezeichnete Linie.

Es gilt:



Adiabaten sind im  $p$ - $V$ -Diagramm steiler als Isothermen. Adiabaten und Isothermen haben gemeinsame Schnittpunkte.

### 7.3 Zusammenfassung aller Zustandsänderungen im $p$ - $V$ -Diagramm

In der Abbildung sind noch einmal alle vier Zustandsänderungen im  $p$ - $V$ -Diagramm zusammengefasst:

- die Isotherme als rote Linie mit  $T = \text{const}$  und

$$p = \text{const} \cdot V^{-1}$$

- die Isobare als grüne waagrechte Linie mit

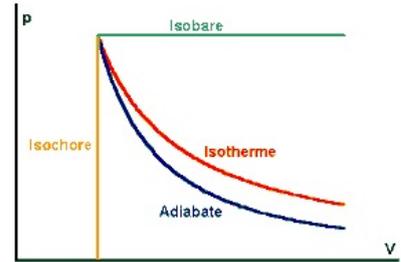
$$p = \text{const}$$

- die Isochore als gelbe senkrechte Linie mit

$$V = \text{const}$$

- die Adiabate als blaue Linie mit

$$p = \text{const} \cdot V^{-\kappa}$$



### 7.4 Aufgaben

- (7.1) Gegeben ist ein einatomiges Gas bei Normalbedingungen. Es wird in einem isolierten Gefäß auf ein Zehntel seines Volumens komprimiert.
- Berechnen Sie den Druck nach der Kompression!
  - Berechnen Sie die Temperatur nach der Kompression!
- (7.2) Ein zweiatomiges Gas hat die Anfangstemperatur  $t = 27^\circ\text{C}$ . Es wird auf das Fünffache seines Volumens blitzschnell expandiert.
- Berechnen Sie den Druck nach der Expansion!
  - Berechnen Sie die Temperatur nach der Expansion!
- (7.3) Gegeben ist ein Gas bei 100 000 Pa,  $6 \text{ m}^3$  und  $20^\circ\text{C}$ .
- Berechnen Sie die Zustände, die sich bei isothermer Kompression auf die Hälfte und auf ein Drittel seines Volumens ergeben.  
Zeichnen Sie diese Isotherme in ein  $p$ - $V$ -Diagramm ein!
  - Führen Sie dieselbe Aufgabe für eine adiabatische Kompression durch und zeichnen Sie die Adiabate im  $p$ - $V$ -Diagramm ein!
- (7.4) Eine bestimmte Menge Luft hat bei  $20^\circ\text{C}$  bei einem Druck von 100 000 Pa ein Volumen von 2 Litern. Die Luft expandiert adiabatisch auf das doppelte Volumen.
- Berechnen Sie den Enddruck!
  - Berechnen Sie die Endtemperatur!
  - Vergleichen Sie den Enddruck der adiabatischen Expansion mit dem Enddruck einer isothermen Expansion!
- (7.5) In einem wärmeisolierten Zylinder sind 3 Liter Stickstoff  $\text{N}_2$  bei 8 bar eingeschlossen. Wie groß ist der Druck, wenn das Volumen verdoppelt wird?

## 8 Die Umwandlung von Wärmeenergie in mechanische Energie – der Kreisprozess

### 8.1 Allgemeines

Wir haben gesehen, dass bei der Zustandsänderung von Gasen durch Wärmezufuhr mechanische Arbeit verrichtet werden kann. Die verrichtete Arbeit lässt sich im  $p$ - $V$ -Diagramm als Fläche unter der Kurve darstellen.

Um kontinuierlich thermische in mechanische Energie umzuwandeln, muss man mehrere Zustandsänderungen in geschickter Abfolge ablaufen lassen. Einen solchen Prozess bezeichnet man als Kreisprozess.

Eine Abfolge von Zustandsänderungen eines Arbeitsgases, bei der immer wieder der Ausgangszustand erreicht wird, nennt man Kreisprozess.

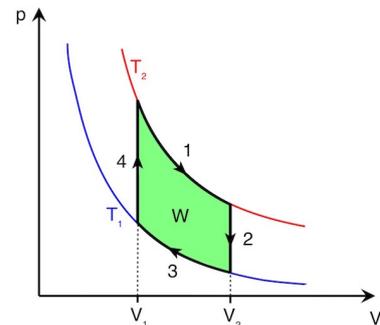
Es gibt verschiedene Arten von Kreisprozessen:

- Kreisprozess von Stirling:  
Der Stirlingmotor (oder "Heißluft-Motor") arbeitet im Gegensatz zur Dampfmaschine mit einem abgeschlossenen Arbeitsgas und ist daher sicherer als die Dampfmaschine.
- Kreisprozess von Carnot:  
Dies ist ein idealisierter Kreisprozess, der in dieser Art und Weise nicht realisiert werden kann.
- Kreisprozess von Otto:  
Dieser Prozess wird in einem Otto-Motor verwendet. Das ist ein Verbrennungsmotor.
- Kreisprozess von Diesel:  
Dieser Prozess wird in einem Diesel-Motor verwendet, der auch ein Verbrennungsmotor ist.
- Prozess von Clausius-Rankine:  
Auf diesem Prozess basiert die Dampfmaschine.

### 8.2 Der Kreisprozess von Stirling

Der einfachste Kreisprozess ist der Stirling'sche Kreisprozess (erfunden 1816 von Robert Stirling, 1790-1868). Es ist ein idealisierter Kreisprozess, der aus zwei Isothermen und zwei Isochoren besteht.

Die insgesamt verrichtete mechanische Arbeit  $W = \Delta W_{\text{ges}}$  entspricht dem Flächeninhalt, den die Kurve des Kreisprozesses umschließt.



Der Stirling'sche Kreisprozess besteht aus 4 Zustandsänderungen:

#### 1. Isotherme Expansion:

Das Gas expandiert isotherm bei der Temperatur  $T_2$ , dabei vergrößert sich das Volumen von  $V_1$  auf  $V_2$ . Dem Gas wird die Wärme  $\Delta Q_1$  zugeführt und es verrichtet die mechanische Arbeit  $\Delta W_1$ .

$$\Delta U_1 = 0 \quad \Delta Q_1 > 0 \quad \Delta W_1 < 0 \quad \Delta Q_1 = -\Delta W_1$$

#### 2. Isochore Abkühlung:

Das Gas wird bei konstantem Volumen  $V_2$  auf die Temperatur  $T_1$  abgekühlt.

$$\Delta U_2 < 0 \quad \Delta Q_2 < 0 \quad \Delta W_2 = 0 \quad \Delta U_2 = \Delta Q_2$$

## 3. Isotherme Kompression:

Das Gas wird isotherm bei der Temperatur  $T_1$  komprimiert, dabei verringert sich das Volumen von  $V_2$  auf  $V_1$ . Das Gas gibt die Wärme  $\Delta Q_3$  an die Umgebung ab und es wird am Gas mechanische Arbeit  $\Delta W_3$  verrichtet.

$$\Delta U_3 = 0 \quad \Delta Q_3 < 0 \quad \Delta W_3 > 0 \quad \Delta Q_3 = -\Delta W_3$$

## 4. Isochore Erwärmung:

Das Gas wird bei konstantem Volumen  $V_1$  auf die Anfangstemperatur  $T_2$  erwärmt. Nun befindet sich das Gas wieder im Ausgangszustand.

$$\Delta U_4 > 0 \quad \Delta Q_4 > 0 \quad \Delta W_4 = 0 \quad \Delta U_4 = \Delta Q_4$$

Die Änderung der gesamten inneren Energie ist

$$\Delta U_{\text{ges}} = \Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3 + \Delta U_4 = \Delta U_2 + \Delta U_4 = 0$$

die Änderung der gesamten Wärme ist

$$\Delta Q_{\text{ges}} = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_3 + \Delta Q_4 = \Delta Q_1 + \Delta Q_3$$

weil  $\Delta U_2 + \Delta U_4 = \Delta Q_2 + \Delta Q_4 = 0$ . Die Änderung der gesamten mechanischen Arbeit ist

$$\Delta W_{\text{ges}} = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \Delta W_3 + \Delta W_4 = \Delta W_1 + \Delta W_3 = -(\Delta Q_1 + \Delta Q_3)$$

und hängt nur von den zugeführten bzw. abgegebenen Wärmen der isothermen Prozesse ab. Wenn man nur die Beträge der Größen vergleicht bekommt man

$$|\Delta W_{\text{ges}}| = |\Delta Q_1| - |\Delta Q_3| = Q_{\text{zu}} - Q_{\text{ab}}$$

also die Differenz zwischen zugeführter Wärme und abgegebener Wärme.

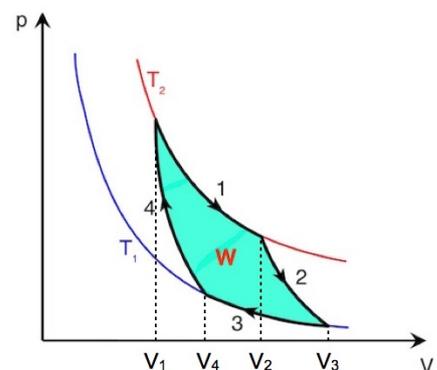
Wie man im  $p$ - $V$ -Diagramm erkennen kann, ist die umschlossene Fläche und damit die verrichtete Arbeit bzw. die umgewandelte Energie umso größer, je größer die Temperaturdifferenz zwischen  $T_1$  und  $T_2$  ist.

### 8.3 Der Kreisprozeß von Carnot

Der französische Wissenschaftler Sadi Carnot (1796-1832) fand 1824 einen idealen Kreisprozess, den sog. Carnot-Prozess. Dabei handelt es sich um einen theoretischen idealisierten Kreisprozess, der sich nicht realisieren lässt.

Der Carnot'sche Kreisprozess setzt sich aus vier Zustandsänderungen zusammen, zwei Isothermen und zwei Adiabaten. Das Bild zeigt das  $p$ - $V$ -Diagramm eines Carnot'schen Kreisprozesses.

Wir verändern nun den Zustand eines Gases in vier Schritten und zwar so, daß wir am Ende wieder beim Anfangszustand ankommen.



## 1. Isotherme Expansion:

Das Gas wird bei der höheren Temperatur  $T_2$  isotherm expandiert von  $V_1$  nach  $V_2$ . Dem Gas wird die Wärme  $\Delta Q_1$  zugeführt und es verrichtet die mechanische Arbeit  $\Delta W_1$ .

$$\Delta U_1 = 0 \quad \Delta Q_1 > 0 \quad \Delta W_1 < 0 \quad \Delta Q_1 = -\Delta W_1$$

## 2. Adiabatische Expansion:

Das Gas wird adiabatisch expandiert von  $V_2$  nach  $V_3$ . Dabei wird keine Wärme mit der Umgebung ausgetauscht. Die Temperatur verringert sich von  $T_2$  auf  $T_1$ .

$$\Delta U_2 < 0 \quad \Delta Q_2 = 0 \quad \Delta W_2 > 0 \quad \Delta U_2 = \Delta W_2$$

## 3. Isotherme Kompression:

Das Gas wird bei der tieferen Temperatur  $T_1$  isotherm komprimiert von  $V_3$  nach  $V_4$ . Das Gas gibt die Wärme  $\Delta Q_3$  ab und es wird die mechanische Arbeit  $\Delta W_3$  am Gas verrichtet.

$$\Delta U_3 = 0 \quad \Delta Q_3 < 0 \quad \Delta W_3 > 0 \quad \Delta Q_3 = -\Delta W_3$$

## 4. Adiabatische Kompression:

Das Gas wird adiabatisch komprimiert von  $V_4$  nach  $V_1$ . Dabei wird keine Wärme mit der Umgebung ausgetauscht. Die Temperatur erhöht sich von  $T_1$  auf  $T_2$ .

$$\Delta U_4 > 0 \quad \Delta Q_4 = 0 \quad \Delta W_4 > 0 \quad \Delta U_4 = \Delta W_4$$

Die Änderung der gesamten inneren Energie ist

$$\Delta U_{\text{ges}} = \Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3 + \Delta U_4 = \Delta U_2 + \Delta U_4 = 0$$

die Änderung der gesamten Wärme ist

$$\Delta Q_{\text{ges}} = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_3 + \Delta Q_4 = \Delta Q_1 + \Delta Q_3$$

und die Änderung der gesamten mechanischen Arbeit ist

$$\Delta W_{\text{ges}} = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \Delta W_3 + \Delta W_4 = \Delta W_1 + \Delta W_3 = -(\Delta Q_1 + \Delta Q_3)$$

weil  $\Delta W_2 + \Delta W_4 = \Delta U_2 + \Delta U_4 = 0$ .

und hängt nur von den zugeführten bzw. abgegebenen Wärmen der isothermen Prozesse ab. Wenn man nur die Beträge der Größen vergleicht bekommt man

$$|\Delta W_{\text{ges}}| = |\Delta Q_1| - |\Delta Q_3| = Q_{\text{zu}} - Q_{\text{ab}}$$

also die Differenz zwischen zugeführter Wärme und abgegebener Wärme.

Das Gas nimmt bei der isothermen Expansion bei der hohen Temperatur (in der warmen Umgebung) viel Wärme  $\Delta Q_1$  auf und gibt bei der isothermen Kompression bei der tiefen Temperatur (in der kalten Umgebung) wenig Wärme  $\Delta Q_3$  ab. Der Rest wird als mechanische Arbeit  $\Delta W$  frei.

*Beispiel (8.1)*

Für einen Carnot'schen Kreisprozess im  $p$ - $V$  Diagramm gilt:

Die Fläche unter der Isotherme für die Expansion betrage 300 Einheiten. Die Fläche unter der Isotherme für die Kompression beträgt 400 Einheiten. Die Fläche unter der Adiabate beträgt je 50 Einheiten.

a) Zeichnen Sie die  $p$ - $V$ -Diagramme für die einzelnen Schritte des Prozesses und kennzeichnen Sie die angegebenen Flächen! Welche physikalische Bedeutung haben sie? In welcher Einheit werden sie gemessen?

b) Bestimmen Sie jeweils die Werte für die Änderung der Inneren Energie, der Wärme und der mechanischen Energie!

**Lösung**

a) Die physikalische Bedeutung der Fläche ist die mechanische Energie, die vom Gas verrichtet wird oder die am Gas verrichtet wird. Die Einheit ist das Joule.

b)

	Isotherme Expansion	Adiabatische Expansion	Isotherme Kompression	Adiabatische Kompression	Gesamt
$\Delta W$	-300 J	-50 J	+400 J	+50 J	$-300 - 50 + 400 + 50 = +100$ J
$\Delta Q$	+300 J	0 J	-400 J	0 J	$300 - 400 = -100$ J
$\Delta U$	0 J	-50 J	0 J	+50 J	0 J

**8.4 Der thermische Wirkungsgrad****8.4.1 Definition**

Das Ziel eines Kreisprozesses ist, einen möglichst großen Anteil der zugeführten Wärme in mechanische Arbeit umzuwandeln. Da bei jedem Kreisprozess auch Wärme nach außen abgegeben wird, ist es nicht möglich, die gesamte zugeführte Wärme in mechanische Arbeit umzuwandeln. Daher definieren wir den Wirkungsgrad, der angibt wie gut diese Umwandlung geht.

Der Wirkungsgrad  $\eta$  ist das Verhältnis aus verrichteter Arbeit  $W$  und zugeführter Wärme  $Q$

$$\eta = \frac{W}{Q} \quad (8.1)$$

Bei keinem Kreisprozess erfolgt die Umwandlung von Wärme in mechanische Arbeit vollständig. Der Wirkungsgrad ist also stets kleiner als 1 (bzw. 100%)

$$\eta \leq 1$$

Der Wirkungsgrad einer Maschine ist immer kleiner 1. Nur ein Teil der aufgenommenen Wärmeenergie kann in mechanische Arbeit verwandelt werden. Der Rest geht als Abwärme "verloren".

**8.4.2 Der maximale Wirkungsgrad**

Im  $p$ - $V$ -Diagramm des Carnot-Prozesses sieht man, dass die verrichtete Arbeit  $\Delta W_{\text{ges}}$  (die Fläche) umso größer ist, je größer der Abstand der beiden Isothermen ist, also je größer die Differenz der beiden Temperaturen  $T_{\text{hoch}}$  und  $T_{\text{tief}}$  ist. Man kann berechnen, dass der Wirkungsgrad einer Carnot-Maschine gegeben ist durch:

$$\eta_{\text{carnot}} = \frac{\Delta W_{\text{ges}}}{Q_{\text{zu}}} = \frac{Q_{\text{zu}} - Q_{\text{ab}}}{Q_{\text{zu}}} = \frac{T_{\text{hoch}} - T_{\text{tief}}}{T_{\text{hoch}}} = 1 - \frac{T_{\text{tief}}}{T_{\text{hoch}}}$$

Da  $T_{\text{hoch}} > T_{\text{tief}}$  folgt daraus  $\frac{T_{\text{tief}}}{T_{\text{hoch}}} < 1$  und damit ist Wirkungsgrad immer kleiner als 1.

Da der Carnot-Prozess ein idealisierter Prozess ist, ist sein Wirkungsgrad der maximal mögliche Wirkungsgrad eines Kreisprozesses. Es gilt für den Wirkungsgrad eines beliebigen Kreisprozesses  $\eta$

$$\eta \leq \eta_{\text{carnot}}$$

*Beispiele für den thermischen Wirkungsgrad von Maschinen:*

Kreisprozess	ungefährer Wirkungsgrad
Dampfmaschine	16%
Dieselmotor (theoretisch)	60%
Dieselmotor (real)	40%
Ottomotor	30%
Stirlingmotor (real)	16%
Elektromotor	>90%

Der Wirkungsgrad realer Wärmekraftmaschinen liegt aufgrund von Reibung und Wärmeverlusten meist erheblich unterhalb des idealen Wirkungsgrades.

### Beispiel (8.2)

Ein Carnot-Kreisprozess läuft zwischen zwei Wärmereservoirien mit den Temperaturen  $t_1 = 600^\circ\text{C}$  und  $t_2 = 20^\circ\text{C}$  ab. Berechnen sie den Wirkungsgrad!

#### Lösung

Der Wirkungsgrad des Carnotprozesses hängt nur von den (absoluten) Temperaturen der Wärmereservoirie ab:

$$\eta_{\text{carnot}} = \frac{T_{\text{hoch}} - T_{\text{tief}}}{T_{\text{hoch}}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{(273,15 + 600) - (273,15 + 20)}{(273,15 + 600)} = 0,664 = 66,4\%$$

Selbst der Carnotprozess, der den höchsten Wirkungsgrad aller Kreisprozesse hat, kann nur etwa  $\frac{2}{3}$  der eingesetzten Wärmeenergie in mechanische Arbeit umsetzen.

### Beispiel (8.3)

In einem Dieselmotor sind die beiden Temperaturen  $t_1 = 650^\circ\text{C}$  und  $t_2 = 120^\circ\text{C}$ . Berechnen Sie den Carnot'schen Wirkungsgrad als Abschätzung für den realen Wirkungsgrad!

#### Lösung

Mit der Formel erhält man

$$\eta_{\text{carnot}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{393,15}{923,15} = 0,574 = 57,4\%$$

Der tatsächliche Wirkungsgrad eines Dieselmotors beträgt jedoch nur etwa 0,4 bzw. 40%.

## 8.5 Die Wärmekraftmaschine

### 8.5.1 Allgemeines

Wir haben gesehen, dass bei einem Kreisprozess Wärme (teilweise) in Arbeit umgewandelt werden kann.

Der Kreisprozeß von Carnot ist der Idealfall einer sogenannten Wärmekraftmaschine (WKM). Sie besteht aus einem System von Zylinder und Kolben, mit dem man den Zustand eines Arbeitsgases verändern kann.

Ein Kreisprozess wie der Carnotprozess kann aber im Prinzip links- oder rechtsherum durchlaufen werden. Abhängig vom Umlaufsinn wird dabei entweder Wärme in Arbeit gewandelt oder aber Wärme wird entgegen einem Temperaturgefälle transportiert.

- Rechtsprozess:

Das  $p$ - $V$ -Diagramm wird im Uhrzeigersinn durchlaufen. Es wird Energie in Form von Wärme in Arbeit gewandelt. Man spricht von einer Wärmekraftmaschine.

- Linksprozess:

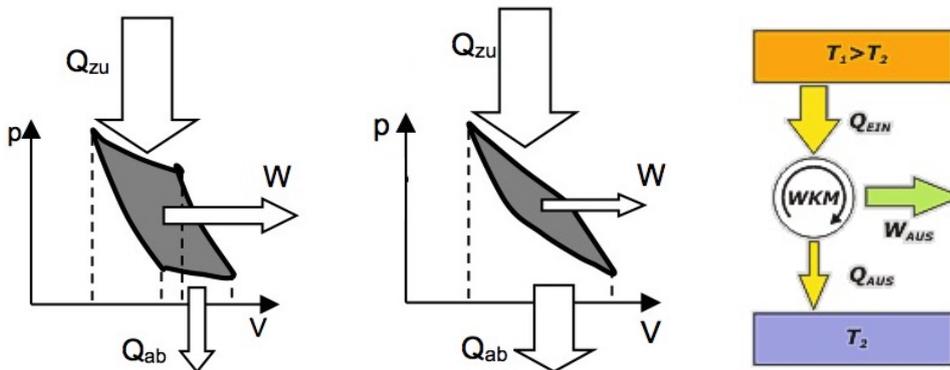
Das  $p$ - $V$ -Diagramm wird gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen. Es wird einem Wärmereservoir niedriger Temperatur Energie als Wärme entzogen und zusammen mit Energie in Form von Arbeit als Wärme an ein Reservoir höherer Temperatur abgegeben. Man spricht von einer Kältemaschine oder einer Wärmepumpe.

### 8.5.2 Die Wärmekraftmaschine

Ein rechtsherum durchlaufener Kreisprozess stellt das Prinzip einer Wärmekraftmaschine dar.

Hier wird dem Arbeitsmedium bei hoher Temperatur  $T_{\text{hoch}}$  die Wärme  $Q_{\text{zu}} = Q_{\text{hoch}}$  zugeführt. Diese wird zum Teil in mechanische Arbeit  $W$  umgewandelt. Der Rest der zugeführten Energie wird als Wärme  $Q_{\text{ab}} = Q_{\text{tief}}$  an ein Reservoir niedrigerer Temperatur  $T_{\text{tief}}$  wieder abgeben.

- Die Wärmekraftmaschine komprimiert das Arbeitsgas in der kalten Umgebung und expandiert es in der heißen Umgebung.
- Sie absorbiert viel Wärme aus dem heißen Reservoir und gibt wenig Wärme an ein kaltes Reservoir ab, der Unterschied wird als mechanische Arbeit frei.
- Die Wärme fließt hier wie in der Natur von warm zu kalt.
- Die Wärmekraftmaschine verwandelt Wärmeenergie (billige, ungeordnete Wärmebewegung) in mechanische Energie (teure, geordnete Bewegung).



$p$ - $V$ -Diagramm eines idealen Carnot-Prozesses und eines realen Kreisprozesses; schematische Darstellung einer WKM

### Wirkungsgrad

Es gilt für die Wärmekraftmaschine

$$\eta_{\text{WKM}}^{\text{real}} = \frac{W}{Q_{\text{hoch}}} = \frac{Q_{\text{hoch}} - Q_{\text{tief}}}{Q_{\text{hoch}}} \quad (8.2)$$

$$\eta_{\text{WKM}}^{\text{max}} = \frac{T_{\text{hoch}} - T_{\text{tief}}}{T_{\text{hoch}}} = \eta_{\text{Carnot}} \quad (8.3)$$

### Beispiele für Wärmekraftmaschinen

Verbrennungsmotoren wie der Benzinmotor (= Ottomotor), der Dieselmotor, die Dampfmaschine

Bei allen diesen Maschinen wird ein Arbeitsgas im kalten Zustand komprimiert und im heißen Zustand expandiert. diese Maschinen sind aber keine idealen Carnot-Kreisprozesse, weil die Zustandsänderung des Arbeitsgases nicht rein isotherm und rein adiabatisch sind, sondern gemischt.

**Beispiel (8.4)**

Verbrennungsmotoren haben Verbrennungstemperaturen von ca 2500°C (= 2773,15 K) und Arbeitsgas-Endtemperaturen von etwa 1000°C (=1273,15 K).

Berechnen Sie den theoretisch maximal erreichbaren Wirkungsgrad!

**Lösung**

$$\eta_{\text{WKM}}^{\text{max}} = \frac{T_{\text{hoch}} - T_{\text{tief}}}{T_{\text{hoch}}} = 1 - \frac{T_{\text{tief}}}{T_{\text{hoch}}} = 1 - \frac{1273,15}{2773,15} = 0,54 = 54\%$$

In der Praxis erreichen unter optimalen Bedingungen Ottomotoren 38%, Dieselmotoren 45% und langsam laufende Schiffsdieselmotoren 50% Wirkungsgrad. In PKWs erreichen unter realen Fahrbedingungen Ottomotoren typischerweise einen Wirkungsgrad von weniger als 25% und Dieselmotoren weniger als 30%.

**Beispiel**

Eine Wärmekraftmaschine arbeitet mit Wärmereservoirs der Temperaturen  $T_1 = 400$  K und  $T_2 = 200$  K. Sie nimmt  $Q_{\text{auf}} = 1000$  J aus dem wärmeren Reservoir auf und verrichtet pro Zyklus  $W = 200$  J Arbeit.

- Wie groß ist der reale Wirkungsgrad der Maschine?
- Wie groß ist der maximale Wirkungsgrad bei den genannten Temperaturen?

**Lösung**

a) Der reale Wirkungsgrad ist

$$\eta_{\text{WKM}}^{\text{real}} = \frac{W}{Q_{\text{hoch}}} = \frac{200}{1000} = 0,2 = 20\%$$

b) Der maximale Wirkungsgrad ist

$$\eta_{\text{WKM}}^{\text{max}} = \frac{T_{\text{hoch}} - T_{\text{tief}}}{T_{\text{hoch}}} = \frac{400 - 200}{400} = 0,5 = 50\%$$

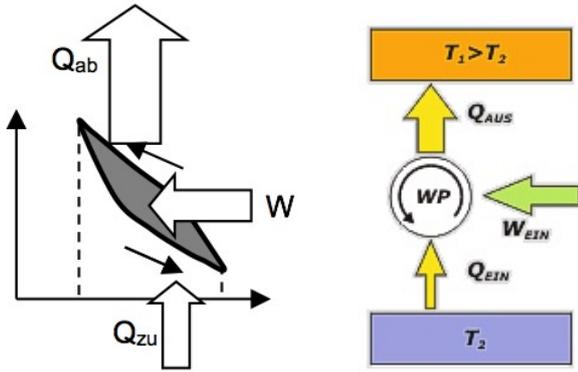
**8.5.3 Die Kältemaschine**

Ein linksherum durchlaufener Kreisprozess (umgekehrter Carnot-Prozess) stellt das Prinzip einer Kältemaschine (KM) bzw. einer Wärmepumpe (WP) dar.

Bei der Kältemaschine entnimmt das Arbeitsmedium einem Reservoir niedriger Temperatur  $T_{\text{tief}}$  Energie in Form von Wärme  $Q_{\text{zu}} = Q_{\text{tief}}$  und gibt diese zusammen mit zusätzlich zugeführter Energie in Form von Arbeit  $W$  als Wärme  $Q_{\text{ab}} = Q_{\text{hoch}}$  an ein Reservoir höherer Temperatur  $T_{\text{hoch}}$  ab.

Ist der Anstieg der Temperatur des Hochtemperaturreservoirs von Interesse, spricht man von einer Wärmepumpe (z.B. zum Heizen eines Hauses). Steht dagegen die Absenkung der Temperatur des Niedertemperaturreservoirs (z.B. der Innenraum eines Kühlschranks) im Vordergrund, so nennt man dies eine Kältemaschine.

- Die Kältemaschine expandiert das Arbeitsgas in der kalten Umgebung und komprimiert es in der heißen Umgebung.
- Sie absorbiert wenig Wärme aus dem kalten Reservoir und gibt viel Wärme an ein heißes Reservoir ab, der Unterschied wird als mechanische Arbeit zugeführt.
- Die Wärme fließt hier gegen die Natur von der kalt zu warm.
- Die Kältemaschine verwandelt mechanische Energie (teure, geordnete Bewegung) in Wärmeenergie (billige, ungeordnete Wärmebewegung).



*p-V-Diagramm eines idealen Links-Prozesses; schematische Darstellung einer KM / WP*

### Wirkungsgrad

Der Wirkungsgrad einer Kältemaschine oder einer Wärmepumpe wird als Leistungszahl oder Effizienz  $\varepsilon$  bezeichnet. Diese Größe ist immer größer als 1  $\varepsilon > 1$  und soll in der Praxis möglichst groß sein. Es gilt für die Kältemaschine, die die Wärme  $Q_{zu}$  vom Ort tieferer Temperatur weg transportiert,

$$\varepsilon_{KM}^{\text{real}} = \frac{Q_{\text{tief}}}{W} = \frac{Q_{\text{tief}}}{Q_{\text{hoch}} - Q_{\text{tief}}} \quad (8.4)$$

$$\varepsilon_{KM}^{\text{max}} = \frac{T_{\text{tief}}}{T_{\text{hoch}} - T_{\text{tief}}} = \frac{1}{\eta_{\text{carnot}}} - 1 \quad (8.5)$$

$$(8.6)$$

Es gilt für die Wärmepumpe, die die Wärme  $Q_{ab}$  an den Ort höherer Temperatur hin transportiert,

$$\varepsilon_{WP}^{\text{real}} = \frac{Q_{\text{hoch}}}{W} = \frac{Q_{\text{hoch}}}{Q_{\text{hoch}} - Q_{\text{tief}}} \quad (8.7)$$

$$\varepsilon_{WP}^{\text{max}} = \frac{T_{\text{hoch}}}{T_{\text{hoch}} - T_{\text{tief}}} = \frac{1}{\eta_{\text{carnot}}} \quad (8.8)$$

Oft wird nicht die Energie angegeben, sondern die jeweiligen Leistungen. Die Formeln gelten dann ganz analog.

### Beispiele für Kältemaschinen

Die Kältemaschine kann man auch als Heizung benutzen, jeder Kühlschrank wird an der Rückseite sehr heiß. Diese Art der Heizung nennt man auch Wärmepumpe, sie ist die sparsamste Heizung, weil sie von allen Heizungen am wenigsten Energie verbraucht.

#### Beispiel (8.5)

Ein Kühlschrank entnimmt dem kälteren Bereich 140 W bei 280 K und gibt nach außen 160 W bei 320 K ab.

- Wie groß ist der reale Wirkungsgrad des Kühlschranks?
- Wie groß ist der maximale Wirkungsgrad des Kühlschranks?

#### Lösung

- der reale Wirkungsgrad ist

$$\varepsilon_{KM}^{\text{real}} = \frac{Q_{\text{tief}}}{W} = \frac{Q_{\text{tief}}}{Q_{\text{hoch}} - Q_{\text{tief}}} = \frac{140}{160 - 140} = \frac{140}{20} = 7$$

b) der maximale Wirkungsgrad ist

$$\varepsilon_{\text{KM}}^{\text{max}} = \frac{T_{\text{tief}}}{T_{\text{hoch}} - T_{\text{tief}}} = \frac{280}{320 - 280} = \frac{280}{40} = 7$$

Das stellt einen idealen Prozess dar, der ohne Verluste läuft.

### Beispiel (8.6)

Eine Tiefkühlanlage arbeitet zwischen den beiden Temperaturen  $+40^\circ\text{C}$  und  $-35^\circ\text{C}$ . Sie nimmt bei der tiefen Temperatur die Wärmeleistung von 10 kW auf und verbraucht für die Kühlung eine Energie von 7 kW.

Berechnen Sie die reale Leistungszahl und die maximale Leistungszahl!

### Lösung

Wir verwenden die Formeln für die Kältemaschine

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{KM}}^{\text{real}} &= \frac{Q_{\text{tief}}}{W} = \frac{10 \cdot 10^3}{7 \cdot 10^3} = 1,43 \\ \varepsilon_{\text{KM}}^{\text{max}} &= \frac{T_{\text{tief}}}{T_{\text{hoch}} - T_{\text{tief}}} = \frac{238,15}{313,15 - 238,15} = 3,17\end{aligned}$$

Dies ist kein idealer Prozess.

### Beispiel (8.7)

Bei einer Luft-Wasser-Wärmepumpe wird bei der Außentemperatur von  $-15^\circ\text{C}$  Wärme aufgenommen und in das Innere eines Wohnhauses gepumpt, das eine Temperatur von  $40^\circ\text{C}$  hat. Es wird die Wärmeleistung von 10 kW abgegeben. Dazu braucht man 3,17 kW elektrische Leistung. Berechnen Sie die reale Leistungszahl und die maximale Leistungszahl!

### Lösung

Für die Wärmepumpe gilt:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{WP}}^{\text{real}} &= \frac{Q_{\text{hoch}}}{W} = \frac{10 \cdot 10^3}{3,17 \cdot 10^3} = 3,15 \\ \varepsilon_{\text{WP}}^{\text{max}} &= \frac{T_{\text{hoch}}}{T_{\text{hoch}} - T_{\text{tief}}} = \frac{313,15}{313,15 - 258,15} = 5,69\end{aligned}$$

Das stellt keinen idealen Prozess dar.

## 8.6 Aufgaben

- (8.1) Die Abgastemperatur einer Wärmekraftmaschine beträgt  $220^\circ\text{C}$ . Der Carnot'sche Wirkungsgrad beträgt 36%. Wie groß muß die Eingangstemperatur sein?
- (8.2) Eine Maschine arbeitet mit einem Wirkungsgrad, der halb so groß ist wie der Carnot'sche Wirkungsgrad zwischen  $525^\circ\text{C}$  und  $280^\circ\text{C}$ . Sie verrichtet eine Leistung von 850 kW. Berechnen Sie, wie viel Wärme pro Stunde von der Maschine abgegeben wird!
- (8.3) Eine Wärmekraftmaschine führt 8500 J Wärme ab, während sie 2700 J nützliche Arbeit leistet. Berechnen Sie den Wirkungsgrad!
- (8.4) Wie groß ist der maximale Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine, deren Arbeitstemperaturen  $530^\circ\text{C}$  und  $305^\circ\text{C}$  betragen?

- (8.5) Eine Dampfmaschine hat einen heißen Wärmespeicher mit siedendem Wasser bei Normdruck von 373 K und einen kalten Wärmespeicher mit gefrierendem Wasser von 273 K. Berechnen Sie den Wirkungsgrad!
- (8.6) Eine Wärmekraftmaschine entnimmt pro Zyklus 400 J Wärme aus dem wärmeren Reservoir und verrichtet 120 J Arbeit.
- Wie hoch ist ihr Wirkungsgrad?
  - Wie viel Wärme wird pro Zyklus abgegeben?
- (8.7) Eine Carnot-Maschine arbeitet zwischen den Temperaturen  $T_H = 850$  K und  $T_N = 300$  K. Die Maschine leistet pro Zyklus von 0,25 s eine Arbeit von 1200 J.
- Wie groß ist die mittlere Leistung der Maschine?
  - Wie viel Wärmeenergie  $Q_H$  wird dem heißeren Reservoir bei jedem Kreisprozess entzogen?
  - Wie viel Energie  $Q_N$  wird an das kältere Wärmereservoir bei jedem Kreisprozess abgegeben?
- (8.8) Eine Wärmepumpe soll als rückwärts laufende Carnotmaschine ein Gebäude aufheizen. Die Außentemperatur beträgt  $-5^\circ\text{C}$ , die Temperatur im Gebäude soll  $22^\circ\text{C}$  betragen.
- Berechnen Sie die Leistungszahl der Maschine!
  - Welche Wärmemenge wird pro Sekunde dem Außenbereich entnommen, wenn das Haus 7,5 kW Wärmeverluste hat?
- (8.9) In einem Carnot-Prozeß mit dem Wirkungsgrad  $\eta = 0,6$  wird bei der Temperatur 900 K die Wärmemenge von 2000 J zugeführt. Welche Wärmemenge wird abgeführt und bei welcher Temperatur geschieht dies?

## 9 Der zweite Hauptsatz der Wärmelehre

### 9.1 Verschiedene Formulierungen

Der zweite Hauptsatz der Wärmelehre macht eine wichtige Aussage über die Richtung von Energieübertragungen bei Vorgängen in der Natur.

Bei der Kältemaschine sieht man, dass man zum Transport der Wärme vom kalten zum heißen Reservoir von außen Energie zuführen muß. Dies entspricht auch der allgemeinen Erfahrung.

Zweiter Hauptsatz der Wärmelehre (Clausius):  
Wärme fließt von selbst immer nur von einem Körper höherer Temperatur zu einem Körper niedrigerer Temperatur.

Diese historisch älteste Formulierung geht auf den deutschen Physiker Rudolf Clausius (1822-1888) zurück, der den 2. Hauptsatz erstmals formuliert hat.

Es gibt aber auch eine Reihe von gleichwertigen Formulierungen.

Bei keinem Kreisprozess erfolgt die Umwandlung von Wärme in mechanische Arbeit vollständig. Der Wirkungsgrad ist also stets kleiner als 1 (bzw. 100%)

Der Grund dafür ist, dass immer ein Teil der zugeführten Wärme an die Umgebung abgegeben wird. Das liegt nicht an einer mangelhaften technischen Umsetzung, sondern es ist selbst bei optimaler Isolierung prinzipiell nicht anders möglich. Dies führt zu einer weiteren Formulierung:

Zweiter Hauptsatz der Wärmelehre (Kelvin-Planck):  
Es gibt keine periodisch arbeitende Maschine, die Wärmeenergie in mechanische Energie umwandelt, ohne dass ein Teil der zugeführten Wärme an die Umgebung abgegeben wird.

Diese Formulierung stammt von William Thomson (Lord Kelvin, 1824-1907) und Max Planck (1858-1947).

Eine Maschine, die die gesamte zugeführte Wärme in mechanische Energie umwandelt, bezeichnet man als Perpetuum mobile zweiter Art. Damit kann man die Version von Kelvin und Planck auch so darstellen:

Zweiter Hauptsatz der Wärmelehre (Kelvin-Planck):  
Es gibt kein Perpetuum mobile zweiter Art.

Aus dem zweiten Hauptsatz folgt die Erkenntnis, dass die Richtungen der Energieumwandlungen nicht gleichwertig sind. So ist es zwar möglich, mechanische Energie vollständig in Wärme umzuwandeln, anders herum erfolgt die Umwandlung jedoch nicht vollständig. Ein Perpetuum mobile zweiter Art ist eine Maschine, bei der sich ein Körper abkühlt, wobei sich die frei werdende Wärme vollständig in mechanische Arbeit verwandelt.

Wenn die Wärmekraftmaschine eine ideale Carnot-Maschine ist, das heißt, wenn sie keine Verluste macht, dann ist sie auch umkehrbar (reversibel). Daraus folgt eine weitere Formulierung des zweiten Hauptsatzes:

Zweiter Hauptsatz der Wärmelehre (Carnot):  
Es gibt keine Wärmekraftmaschine, deren Wirkungsgrad höher ist, als die ideale Carnot-Maschine.

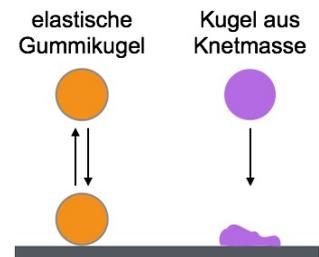
Es gibt also keine Wärmekraftmaschine, die die Wärme besser in Arbeit verwandelt als die ideale Carnot Maschine. In jedem realen Prozess ist die Fläche  $W$  im  $p$ - $V$ -Diagramm kleiner als bei einem vergleichbaren Carnot-Prozess.

## 9.2 Entropie und Wahrscheinlichkeit

### 9.2.1 Reversible und irreversible Prozesse

In der Physik unterscheidet man zwei verschiedene Arten von Prozessen:

- Reversible (umkehrbare) Prozesse können in beide Richtungen ablaufen. Die Rückwärtsrichtung entspricht dabei der genauen Umkehrung der Vorwärtsrichtung, als ob eine Videoaufzeichnung rückwärts abgespielt würde. Läuft der Prozess einmal in Hin- und einmal in Rückrichtung ab, so sind beide Systeme anschließend unverändert.  
z.B. Fall einer elastischen Gummikugel, näherungsweise die Bewegung der Erde um die Sonne, hin- und herschwingendes Fadenpendel
- Irreversible (unumkehrbare) Prozesse laufen von selbst nur in eine bestimmte Richtung ab. Um den Prozess in Gegenrichtung ablaufen zu lassen, muss Energie zugeführt werden.  
z.B. Fall einer unelastischen Kugel aus Knetmasse, Auskühlen einer Tasse Tee



Alle realen Prozesse, in denen Reibung auftritt, sind irreversibel, da die durch Reibungsarbeit erzeugte Wärme nicht wieder zurück in mechanische Arbeit umgewandelt werden kann.

Durch Zuführen von (mechanischer) Arbeit kann ein Prozess entgegen seiner natürlichen Richtung ablaufen.

Betrachtet man reversible und irreversible Vorgänge aus energetischer Sicht, dann gilt: Der Energieerhaltungssatz erlaubt keine Entscheidung darüber, ob ein Vorgang reversibel oder irreversibel ist. Reversible und irreversible Vorgängen sind nach dem Energieerhaltungssatz möglich.

Es fehlt ein physikalisches Konzept, das die unterschiedliche "Wertigkeit der Energie" berücksichtigt und die Fähigkeit begrenzt, thermische Energie in mechanische Energie umzuwandeln.

Um irreversible Prozesse genauer kennzeichnen zu können, wurde als neue physikalische Größe die Entropie eingeführt.

### 9.2.2 Die Entropie

#### Entropie auf makroskopischer Ebene

Der Begriff Entropie wurde 1865 durch den deutschen Physiker Rudolf Clausius (1822-1888) in die Physik eingeführt. Clausius selbst nutzte für die Größe auch den Begriff "Verwandlungswert". Sie ist eine Größe, mit deren Hilfe man die Irreversibilität eines Vorganges kennzeichnen kann. Von praktischer Bedeutung ist nicht der absolute Betrag der Entropie  $S$ , sondern ihre Änderung  $\Delta S$ .

Thermodynamische Definition der Entropie (Clausius):

Die Entropieänderung  $\Delta S$  eines Systems hängt mit der zugeführten oder abgegebenen Wärme  $\Delta Q$  und der Temperatur  $T$  zusammen

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} \quad (9.1)$$

Dabei bezeichnet  $\Delta Q$  eine kleine, dem System reversibel zugeführte oder abgegebene Wärmemenge und  $T$  die Temperatur, die bei dieser Übertragung herrscht (Wenn sich  $T$  bei diesem Prozess ändert muß man den Prozess in viele kleine Einzelprozesse unterteilen, bei denen sich  $T$  kaum ändert). Die Formel besagt, dass zusammen mit Wärme immer Entropie übertragen wird.

Es gilt:

- $\Delta Q > 0$  dem System wird Wärme zugeführt  $\implies \Delta S > 0$  die Entropie nimmt zu
- $\Delta Q < 0$  vom System wird Wärme abgegeben  $\implies \Delta S < 0$  die Entropie nimmt ab
- Ist die Entropieänderung gleich Null  $\Delta S = 0$ , so bezeichnet man diesen Prozess als reversibel, er kann spontan in beide Richtungen ablaufen.

*Einheit:*  $[\Delta S] = \left[\frac{\Delta Q}{T}\right] = \frac{\text{J}}{\text{K}}$

### Beispiel (9.1)

Welche Entropieänderung ergibt sich insgesamt, wenn  $m = 1$  kg Eis schmilzt beziehungsweise gefriert?

#### Lösung

Beim Schmelzen beziehungsweise Gefrieren bleibt die Temperatur konstant. Bei normalem Luftdruck liegt der Gefrierpunkt von Wasser bei  $T = 0^\circ\text{C}$ . Für die zum Schmelzen des Eises benötigte Schmelzwärme  $Q_s$  gilt:

$$\Delta Q = Q_s = m \cdot q_s = 1 \cdot 334 \cdot 10^3 = 334 \text{ kJ}$$

Für die Entropieänderung  $\Delta S_{\text{Fl}}$  des Wassers ergibt sich somit:

$$\Delta S_{\text{Wasser}} = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{334 \cdot 10^3}{273,15} = 1,22 \cdot 10^3 = 1,22 \text{ kJ/K}$$

Im gleichen Maß, wie die Entropie des Wassers zunimmt, nimmt die Entropie der Umgebung, welcher die Wärme entzogen wurde, ab:

$$\Delta S_{\text{Umgebung}} = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{-334 \cdot 10^3}{273,15} = -1,22 \cdot 10^3 = -1,22 \text{ kJ/K}$$

Beide Wärme-Umsätze finden bei der gleichen Temperatur statt. Da auch die umgesetzten Wärmemengen  $\Delta Q$  gleich sind, ist die Gesamt-Entropieänderung des gesamten Systems (Wasser + Umgebung) bei beiden Vorgängen gleich Null:

$$\Delta S_{\text{ges}} = \Delta S_{\text{Wasser}} + \Delta S_{\text{Umgebung}} = 1,22 \cdot 10^3 - 1,22 \cdot 10^3 = 0$$

Der Vorgang ist also reversibel, er kann spontan in beide Richtungen ablaufen. Beim Gefrieren ist der Vorgang genau umgekehrt: Das Wasser gibt die Schmelzwärme an die Umgebung ab, wodurch sich die Entropie des Wassers verringert und die Entropie der Umgebung zunimmt. Auch hier ist die Entropie-Änderung insgesamt gleich Null.

### Beispiel (9.2)

Welche Entropieänderung ergibt sich insgesamt, wenn man in einem isolierten Gefäß  $m_1 = 1$  kg Wasser mit einer Temperatur von  $t_1 = 10^\circ\text{C}$  mit  $m_2 = 1$  kg Wasser mit einer Temperatur von  $t_2 = 30^\circ\text{C}$  vermischt? (Schätzen Sie die Entropieänderung mit den jeweiligen mittleren Temperaturen ab.)

#### Lösung

Da die beiden zu vermischenden Flüssigkeiten die gleiche Masse und die gleiche Wärmekapazität

( $c_W = 4186 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$ ) haben, wird sich als Mischtemperatur der Mittelwert zwischen beiden Ausgangs-Temperaturen einstellen, es ist also

$$t_M = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{10 + 30}{2} = 20^\circ \text{C}$$

Wir nehmen an, dass keine Wärme an die Umgebung verloren geht. Es stammt also die zur Erwärmung des kalten Wassers nötige Wärmemenge  $\Delta Q$  von der warmen Flüssigkeit. Mit  $|\Delta T| = |t_M - t_1| = |t_M - t_2| = 10^\circ \text{C} = 10 \text{ K}$  für beide Flüssigkeiten gilt also:

$$|\Delta Q_1| = |\Delta Q_2| = m \cdot c_W \cdot |\Delta T| = 1 \cdot 10 \cdot 4186 = 41860 \text{ J}$$

Die aufgegebene beziehungsweise abgegebene Wärmemenge ist vom Betrag her gleich groß.  $\Delta Q_1 > 0$ , da dieses System Wärme aufnimmt, und  $\Delta Q_2 < 0$ , da dieses System Wärme abgibt. Beide Teilprozessen (Erwärmen beziehungsweise Abkühlen) finden allerdings bei unterschiedlichen Durchschnitts-Temperaturen statt. Für die sich erwärmende Flüssigkeit gilt:

$$\bar{T}_1 = \frac{T_{1,\text{start}} + T_{1,\text{end}}}{2} = \frac{10 + 20}{2} = 15^\circ \text{C}$$

Für die sich abkühlende Flüssigkeit gilt entsprechend:

$$\bar{T}_2 = \frac{T_{2,\text{start}} + T_{2,\text{end}}}{2} = \frac{30 + 20}{2} = 25^\circ \text{C}$$

Die gesamte Entropieänderung  $\Delta S_{\text{ges}}$  entspricht der Summe der Entropieänderungen beider Teilsysteme:

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{ges}} &= \Delta S_1 + \Delta S_2 \\ &= \frac{\Delta Q_1}{\bar{T}_1} + \frac{\Delta Q_2}{\bar{T}_2} \\ &= \frac{41860}{(273,15 + 15)} + \frac{41860}{(273,15 + 25)} \\ &= 145,3 - 140,4 = +4,9 \text{ J/K} \end{aligned}$$

Die Entropie des kälteren Teil-Systems nimmt stärker zu, als die des wärmeren Teil-Systems abnimmt. Die gesamte Entropie-Änderung ist folglich positiv, was auf einen irreversiblen Vorgang schließen lässt: Die vermischten Flüssigkeiten werden sich also nicht wieder spontan (also ohne Aufwenden von Arbeit) in zwei unterschiedlich warme Teil-Flüssigkeiten aufteilen.

### Beispiel (9.3)

Eine Carnot-Maschine arbeitet zwischen den Temperaturen  $T_H = 850 \text{ K}$  und  $T_N = 300 \text{ K}$ . Die Maschine leistet pro Zyklus von 0,25 Sekunden die Arbeit von 1200 J.

- Berechnen Sie den Wirkungsgrad der Maschine!
- Wie groß ist die (mittlere) Leistung der Maschine?
- Wie viel Wärmeenergie  $|\Delta Q_H|$  wird dem heißeren Reservoir bei jedem Kreisprozess entzogen?
- Wie viel Wärmeenergie  $|\Delta Q_N|$  wird an das kältere Reservoir bei jedem Kreisprozess abgegeben?
- Wie groß ist die Entropieänderung der Arbeitssubstanz bei der Wärmeaufnahme aus dem heißeren Reservoir? Wie groß ist die Entropieänderung bei der Wärmeabgabe in das kühlere Reservoir?

### Lösung

- Wir setzen in die Formel für den maximalen Wirkungsgrad ein

$$\eta_{\text{carnot}} = 1 - \frac{T_{\text{tief}}}{T_{\text{hoch}}} = 1 - \frac{300}{850} = 0,647 = 64,7\%$$

b) Die Leistung ist

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{1200}{0,25} = 4800 \text{ W}$$

c) Dafür verwenden wir die Formel für den Wirkungsgrad und formen sie um

$$\begin{aligned}\eta_{\text{Carnot}} &= \frac{\Delta W_{\text{ges}}}{Q_{\text{zu}}} = \frac{\Delta W}{Q_H} \\ |Q_H| &= \frac{\Delta W}{\eta_{\text{Carnot}}} = \frac{1200}{0,647} = 1854,7 \text{ J}\end{aligned}$$

d) Wir verwenden

$$\begin{aligned}\Delta W &= |Q_H| - |Q_N| \\ |Q_N| &= |Q_H| - \Delta W = 1854,7 - 1200 = 654,7 \text{ J}\end{aligned}$$

e) Wir verwenden die Formel für die Entropieänderung

$$\begin{aligned}\Delta S_H &= \frac{Q_H}{T_H} = \frac{1854,7}{850} = 2,18 \text{ J/K} \\ \Delta S_N &= \frac{Q_N}{T_N} = \frac{-654,7}{300} = -2,18 \text{ J/K}\end{aligned}$$

und die gesamte Entropieänderung

$$\Delta S_{\text{ges}} = \Delta S_H + \Delta S_N = 0$$

ist gleich Null, weil es sich um einen reversiblen Carnot-Prozess handelt.

### Entropie auf mikroskopischer Ebene

Es gibt aber auch noch eine andere Art, die Entropie zu beschreiben. Sie wurde 1877 vom österreichischen Physiker Ludwig Boltzmann (1844-1906) gefunden und verbindet die Entropie mit der Wahrscheinlichkeit von Mikrozuständen.

Wahrscheinlichkeitsdefinition der Entropie (Boltzmann):

In einem abgeschlossenen System mit festem Volumen und fixer Teilchenzahl ist die Entropie gleich dem Logarithmus der Anzahl  $W$  von Mikrozuständen in dem System mal der Boltzmannkonstante  $k$

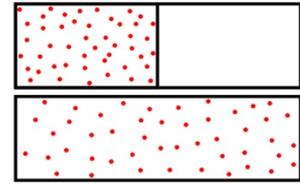
$$S = k \cdot \ln W \quad (9.2)$$

Unter Mikrozuständen versteht man alle Möglichkeiten, wie sich die Teilchen des eingesperrten Gases (oder einer Flüssigkeit) anordnen können. Diese Formel definiert die Entropie somit als ein Maß für die "Anordnungsfreiheit" der Teilchen. Steigt die Zahl der einnehmbaren Mikrozustände, dann wächst die Entropie. Gibt es weniger Möglichkeiten, wie sich die Teilchen anordnen können, ist die Entropie kleiner.

Die Entropie ist damit auch ein Maß für die Ordnung eines Systems. Wenn  $S$  klein ist, dann ist das System in einem geordneten Zustand, wenn  $S$  groß ist, dann ist das System in einem ungeordneten Zustand (die Ordnung ist klein, die Unordnung ist groß).

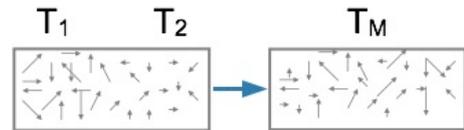
**Beispiele**

- Ein Gas expandiert isotherm auf das Doppelte seines Volumens.  
 Zustand 1 (Gas in der linken Hälfte): wenige Anordnungsmöglichkeiten  
 Zustand 2: Gas im ganzen Volumen: viele Anordnungsmöglichkeiten



$\Delta Q > 0$  muß zugeführt werden  $\Rightarrow$  Entropie nimmt zu  $\Delta S > 0$   
 Wenn man die Trennwand wegnimmt, so expandiert das Gas von selbst (= spontan) vom Zustand 1 in den Zustand 2. Der Prozess geht von selbst in eine solche Richtung, daß dabei  $\Delta S > 0$  ist, das heißt, dass dabei die Entropie größer wird.

- Temperatúrausgleich  
 Zustand 1: alle schnellen (heiße) Teilchen links, alle langsamen (kalten) Teilchen rechts  
 Zustand 2: schnelle und langsame Teilchen gemischt (gleiche Temperatur)



$\Delta Q > 0$  geht von den schnellen Teilchen auf die auf die langsamen über.  
 $\Delta S_{\text{schnelle Teilchen}} = -\frac{|\Delta Q|}{T_1}$  die schnellen Teilchen verlieren die Energie  $\Delta Q$ , daher das Minus  
 $\Delta S_{\text{langsame Teilchen}} = \frac{|\Delta Q|}{T_2}$  die langsamen Teilchen bekommen die Energie  $\Delta Q$ , daher das Plus  
 $\Delta S_{\text{gesamt}} = \Delta S_{\text{schnelle Teilchen}} + \Delta S_{\text{langsame Teilchen}} = |\Delta Q| \cdot \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) > 0$  weil  $T_1 > T_2$

- Schmelzen eines festen Körpers (z.B. Eis in Wasser)  
 Zustand 1: die Teilchen im festen Körper (Eis) sind auf kleinem Raum und auf Gitterplätzen angeordnet  
 Zustand 2: die Teilchen in der Flüssigkeit (Wasser) sind viel freier und ungeordneter  
 die Temperatur des Wassers  $T_{\text{wasser}}$  ist größer als die Temperatur des Eises  $T_{\text{eis}}$   
 für das Schmelzen wird Wärmeenergie  $\Delta Q$  verbraucht, diese Wärmeenergie geht vom Wasser auf das Eis über  
 $\Delta S_{\text{gesamt}} = \Delta S_{\text{wasser}} + \Delta S_{\text{eis}} = |\Delta Q| \cdot \left(\frac{1}{T_{\text{eis}}} - \frac{1}{T_{\text{wasser}}}\right) > 0$  weil  $T_{\text{wasser}} > T_{\text{eis}}$

Alle Beispiele zeigen:

Das System geht von selbst (= spontan) vom Zustand 1 in den Zustand 2.

Der Prozeß geht von selbst in eine solche Richtung, daß dabei  $\Delta S > 0$  ist, das heißt, daß dabei die Entropie größer wird.

**9.3 Die Entropie und der zweite Hauptsatz**

Clausius stellte fest, dass die Entropie in einem geschlossenen Systemen, anders als die Energie, keine Erhaltungsgröße ist. Diese Erkenntnis kann man als weitere Formulierung des zweiten Hauptsatzes der Wärmelehre sehen:

Zweiter Hauptsatz der Wärmelehre (Clausius):  
 In einem geschlossenen System nimmt die Entropie nicht ab, sondern sie nimmt zu oder bleibt gleich.  
 Bei reversiblen Prozessen bleibt sie konstant.

$$\Delta S \geq 0 \tag{9.3}$$

Die Entropie nimmt also immer zu oder bleibt konstant. Damit wird in die Physik geschlossener Systeme ein Zeitpfeil eingeführt, denn bei wachsender Entropie sind thermodynamische Prozesse in geschlossenen Systemen unumkehrbar (oder irreversibel).

Reversibel (umkehrbar) ist ein Prozess nur dann, wenn die Entropie konstant bleibt. Das ist aber nur theoretisch möglich. Alle realen Prozesse sind irreversibel. Frei nach Boltzmann kann man auch sagen: Die Zahl der möglichen Mikrozustände nimmt jederzeit zu.

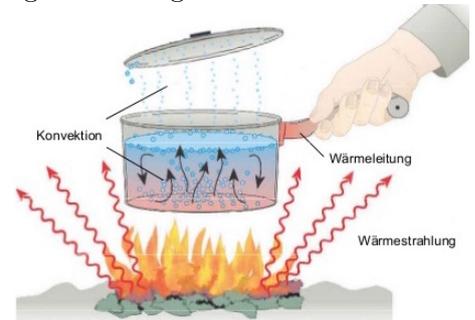
## 10 Der Transport von Wärme

Wärme hat immer das Bestreben, einen Temperatenausgleich herbeizuführen und strömt dabei so lange von der wärmeren zur kälteren Seite, bis ein Temperatugleichgewicht hergestellt ist.

Man unterscheidet drei wesentlich voneinander verschiedene Transportmechanismen:

- die Wärmeströmung (Konvektion)
- die Wärmeleitung und
- die Wärmestrahlung (Temperaturstrahlung)

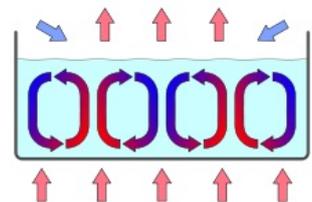
Diese drei Mechanismen treten oft gleichzeitig auf.



### 10.1 Die Wärmeströmung (Konvektion)

Von Konvektion (konvektiver Wärmeübergang) spricht man, wenn Wärme von einem Körper an ein vorbei strömendes Medium übertragen wird (oder umgekehrt).

Warme Luft dehnt sich aus. Bei gleichem Volumen ist sie leichter als kalte, sie steigt also nach oben. Warme Luft erfährt also in kälterer Umgebung einen Auftrieb. Kalte Luft strömt nach und es kommt zu einem Wärmetransport, den man Wärmeströmung (Konvektion) nennt. Genau das Gleiche geschieht auch in Flüssigkeiten. Wärme wird mit den Luft- oder Flüssigkeitsteilchen von einem Ort zum anderen gebracht.



#### Beispiele

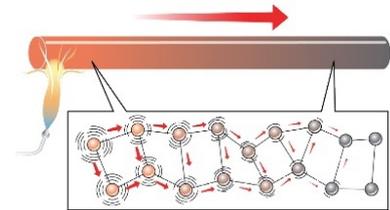
- Ein warmer Wind transportiert Wärme von einem Ort zum anderen. Dabei wird aber nicht nur Wärme, sondern auch Masse transportiert.
- Warmes Wasser steigt im kalten Wasser auf. Kaltes Wasser sinkt ab. Dadurch wird das Wasser in einem Kochtopf durchmischt und erwärmt.
- Durch die Wärmeströmung erwärmt sich die Luft in einem geschlossenen Zimmer vom warmen Heizkörper aus.
- Die warme Luft eines Ofens steigt im Rauchfang auf. Außen sinkt die kalte Luft ab, es kommt zu einer Zirkulation der Luft, die unten beim Feuer frischen Sauerstoff nachliefert. Je höher der Rauchfang ist, desto größer ist der Druckunterschied zwischen oben und unten, desto stärker ist der Auftrieb und desto heftiger ist auch die Zirkulation.
- In der Erdatmosphäre und in den Ozeanen ist Konvektion wichtig (z.B. Golfstrom). Luft wird am warmen Erdboden erwärmt und steigt nach oben. Dadurch entstehen Winde, Wolken und Gewitter.
- Im Inneren der Erde sind Gesteine mehr oder weniger flüssig und transportieren über einen langen Zeitraum hinweg Wärme durch Konvektion. Diese sind die Ursache für die Plattentektonik und damit für Erdbeben und Vulkane. Im äußeren Kern erzeugt die Konvektion der flüssigen Eisenlegierung das Erdmagnetfeld.
- In Sternen (und auch der Sonne) transportiert die Konvektion thermische Energie aus dem Inneren nach außen.

Konvektion ist ein Transport von Wärme in Flüssigkeiten und Gasen, wobei nicht nur Wärme sondern auch Masse transportiert wird.

## 10.2 Die Wärmeleitung

Eine Wärmeübertragung durch Leitung erfolgt in Materialien und zwischen Materialien, die miteinander in Berührung stehen. Die Wärme wird als Bewegungsenergie von stark schwingenden Molekülen an benachbarte, schwächer schwingende Moleküle durch Stoßvorgänge weitergegeben.

Zur Wärmeleitung ist notwendig, daß sich die Körper mit verschiedenen Temperaturen berühren. Wärmeleitung ist in festen, flüssigen und gasförmigen Körpern möglich, während die Konvektion nur in Flüssigkeiten und Gasen möglich ist. Die schnellen Teilchen des warmen Körpers stoßen dabei gegen die leichten Teilchen des kalten Körpers und übertragen Impuls und kinetische Energie auf sie. Dabei werden die schnellen Teilchen langsamer und die langsamen schneller. Es kommt zum Temperatenausgleich.



Wärmeleitung ist die Übertragung der kinetischen Energie der ungeordneten Teilchenbewegung durch unelastische Stöße zwischen den Teilchen.

Die Teilchen aus denen Materialien bestehen, lassen sich unterschiedlich schwer von Nachbarpartikeln zu Schwingungen anregen. Man kann daher gute, schlechte und sehr schlechte Wärmeleiter unterscheiden:

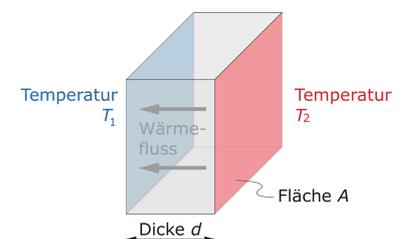
- Gute Wärmeleiter: Metalle (Silber, Gold, Kupfer, Aluminium)
- Schlechte Wärmeleiter: Quecksilber, Graphit, Eis, Stahlbeton, Glas, Wasser
- Sehr schlechte Wärmeleiter: Luft, Gase, Holz, Kunststoff, Textilien, Stein

Gut wärmeleitende Stoffe werden verwendet, wenn rasche Wärmeabgabe und Wärmeausbreitung beabsichtigt ist, z.B. Heizkörper, Kochgeschirrböden, Kühlrippen beim Kühlschrank.

Wärmeisolatoren oder Wärmedämmstoffe (schlechte Wärmeleiter), werden dort eingesetzt, wo ein Wärmeaustausch möglichst vermieden werden soll, z.B. Wärmeisolation beim Haus, luftgefüllte Zwischenräume bei der Kleidung und in Fellen und Federkleidern der Tiere.

Der Wärmefluss ist die pro Zeit  $\Delta t$  übertragene Wärme  $\Delta Q$ . Wir untersuchen den Wärmefluss zwischen zwei Schichten der Fläche  $A$  und den Temperaturen  $T_1$  und  $T_2 > T_1$ , die einen Abstand von  $d$  haben. Der Wärmefluss ist

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\lambda \cdot A \cdot \Delta T}{\Delta x} = \frac{\lambda \cdot A \cdot (T_2 - T_1)}{d}$$



$\lambda$  ist die Wärmeleitfähigkeit oder Wärmeleitfähigkeit (eine Materialkonstante), die angibt, wie schnell der Wärmetransport erfolgt. Ist  $\lambda$  groß, so bedeutet das einen schnellen Wärmetransport, ist  $\lambda$  klein, so bedeutet das einen langsamen Wärmetransport.

*Einheit:*  $[\lambda] = \left[ \frac{\Delta Q}{\Delta t} \frac{d}{A \cdot \Delta T} \right] = \frac{\text{J}}{\text{s} \cdot \text{m} \cdot \text{K}} = \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$

*Beispiele:*

Material	Wärmeleitfähigkeit in $\frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}$
Kupfer	393
Gold	314
Aluminium	221
Eisen	67
Beton	2,2
Eis	2,2
Glas	0,8
Holz	0,13
Wasser	0,6
Luft	0,026
CO <sub>2</sub>	0,015

Gute elektrische Leiter (Kupfer, Gold, Aluminium) sind auch gute Wärmeleiter. Gase leiten die Wärme meist schlechter als Flüssigkeiten, diese wiederum meist schlechter als feste Körper.

### Beispiel (10.1)

Ein Eisenstab mit 2 m Länge und 1 cm<sup>2</sup> wird an einem Ende (1) auf 200°C angeheizt und konstant auf dieser Temperatur gehalten. Welcher Wärmefluss ergibt sich solange das andere Ende (2) noch auf Raumtemperatur ist?

### Lösung

Wir setzen in die Formel ein und verwenden die Wärmeleitfähigkeit für Eisen

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\lambda \cdot A \cdot \Delta T}{\Delta x} = \frac{67 \cdot 1 \cdot 10^{-4} \cdot (200 - 20)}{2} = 0,603 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 0,603 \text{ W}$$

Die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  informiert uns darüber, wie schnell die Wärmeenergie von einem Körper zum anderen transportiert wird, aber nicht immer darüber, wie schnell die Temperatur übertragen wird. Die Temperaturübertragung hängt auch davon ab, wieviel Wärmeenergie man braucht um den Körper zu erwärmen, also von der spezifischen Wärmekapazität  $c$ , und von der Dichte  $\rho$  eines Materials. Es gilt für die Temperaturleitfähigkeit (Temperaturleitfähigkeit)  $a$

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c}$$

Dies ist eine temperaturabhängige Stoffeigenschaft.

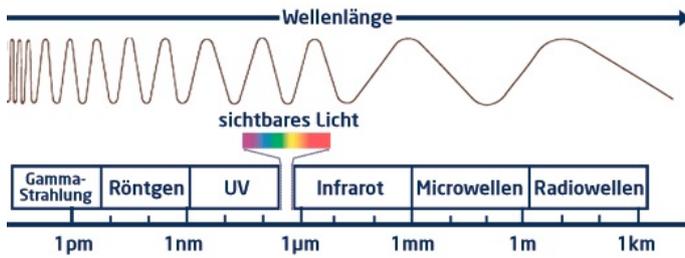
$$\text{Einheit: } [a] = \left[ \frac{\lambda}{\rho \cdot c} \right] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

## 10.3 Die Wärmestrahlung

Konvektion und Wärmeleitung setzen voraus, daß kalte und warme Körper miteinander in Kontakt kommen. Es gibt aber auch die Übertragung von Wärme, bei der das nicht der Fall ist, zum Beispiel von der Sonne auf die Erde.

Wärme ist die ungeordnete, sehr schnelle Bewegung von Atomen oder Molekülen. Diese sind Teilchen, welche positive und negative elektrische Ladungen haben und daher elektrische Kräfte ausüben. Wenn solche Teilchen schnell hin und her schwingen, so schwingen auch ihre elektrischen Kräfte schnell hin und her. Ihre Wirkung breitet sich wellenförmig aus. Dadurch werden auch in großer Entfernung die Atome oder Moleküle eines anderen Körpers zum Schwingen gebracht. Er erwärmt sich.

Wärmestrahlung ist eine elektromagnetische Welle, auch Infrarot-Strahlung genannt. Diese Wellen gehören wie das sichtbare Licht und die Röntgenstrahlung zur Familie der elektromagnetischen Wellen. Sie breiten sich geradlinig und mit Lichtgeschwindigkeit aus. Wärmestrahlung benötigt zu ihrer Ausbreitung genau wie die Lichtstrahlen keine Materie und kann sich auch im Vakuum fortbewegen.



Elektromagnetischen Wellen werden im Detail in Abschnitt 6 behandelt.

# 11 Aggregatzustände

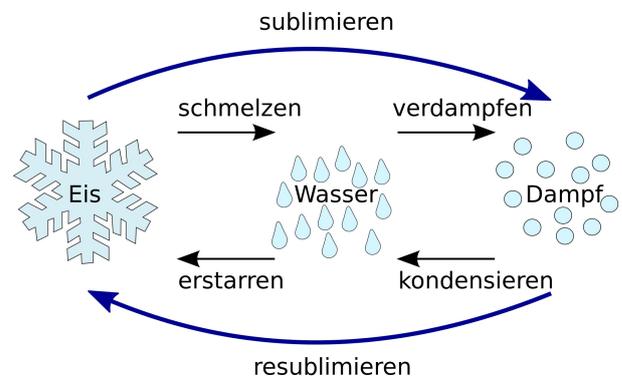
## 11.1 Allgemeines

Es gibt drei verschiedene Aggregatzustände für Materie:

- fest:
- flüssig:
- gasförmig:

Man bezeichnet diese Zustände auch als Phasen. Beim Wasser heißen die Phasen Eis (fest), Wasser (flüssig) und Wasserdampf (gasförmig). Die Änderungen der Aggregatzustände heißen Phasenübergänge. Es gibt:

- fest  $\rightarrow$  flüssig: schmelzen
- flüssig  $\rightarrow$  fest: erstarren
- flüssig  $\rightarrow$  gasförmig: verdampfen
- gasförmig  $\rightarrow$  flüssig: kondensieren
- fest  $\rightarrow$  gasförmig: sublimieren
- gasförmig  $\rightarrow$  fest: resublimieren



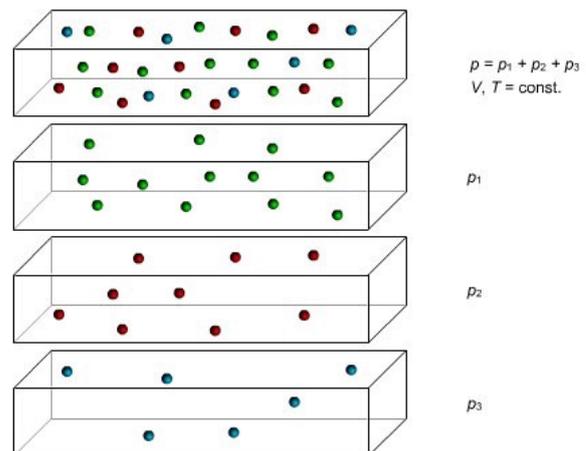
### Der Partialdruck von Gasen

Wenn sich in einem Volumen mehrerer Gase (z.B. Luft und Wasserdampf) befinden, dann gilt folgendes Gesetz:

Befinden sich in einem Volumen verschiedene Gase, so hat jedes Gas der Mischung den Druck, den es hätte, wenn es alleine in diesem Volumen wäre. Der Gesamtdruck eines Gases ist die Summe der Partialdrücke.

$$p_{\text{ges}} = p_1 + p_2 + p_3 \quad (11.1)$$

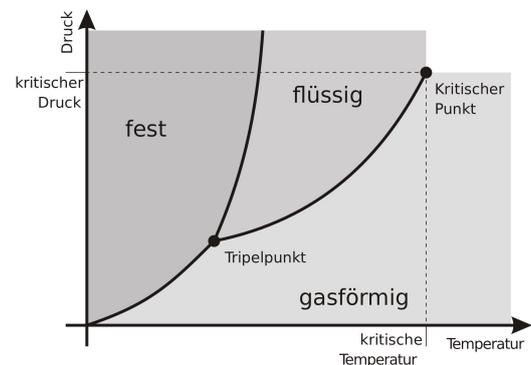
$p_i$  ist der Partialdruck des  $i$ -ten Gases.



## 11.2 Das Phasendiagramm

### Allgemeines Phasendiagramm

Das Phasendiagramm (Zustandsdiagramm) stellt Zustände und deren zugehörigen Phasen in Abhängigkeit von Zustandsgrößen (meist Druck und Temperatur) dar. Die Diagramme enthalten einige Kurven, die Bereiche unterschiedlicher Phasen (Aggregatzustände) voneinander abgrenzen. Diese Kurven, die man als Phasengrenzlinien bezeichnet, stellen die Mischbereiche dieser Phasen dar. Unter den durch sie gegebenen Bedingungen stehen folglich mehrere Phasen im thermodynamischen Gleichgewicht.



In einem Zustandsdiagramm mit drei unterschiedlichen Phasen eines Reinstoffes gibt es zwei markante Punkte und drei Kurven:

- Sublimationskurve: Grenze zwischen festem und gasförmigem Zustand
- Schmelzdruckkurve: Grenze zwischen festen und flüssigen Zustand
- Dampfdruckkurve: Grenze zwischen flüssigem und gasförmigem Zustand
- Tripelpunkt:  
Hier liegen Gas, Flüssigkeit und Feststoff gleichzeitig vor. Er ist durch Druck und Temperatur festgelegt.
- kritischer Punkt:  
An diesem Punkt gibt es keine flüssige Phase sondern nur noch eine gasförmige Phase. Die flüssige Phase geht ("wabert") an diesem Punkt in eine einzige gasförmige Phase über. Auch bei hohen Drücken kann man jenseits des kritischen Punktes kein Gas mehr zur Flüssigkeit machen.

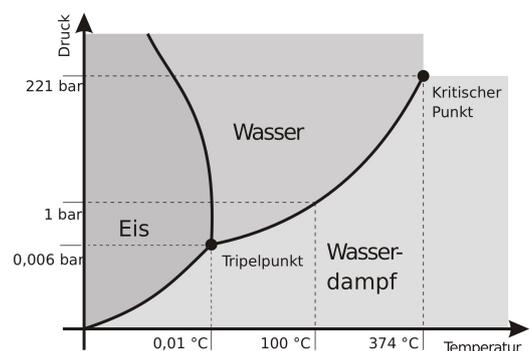
### Phasendiagramm von Wasser

Wasser ist ein sehr wichtiger Stoff. Das Phasendiagramm weist eine Besonderheit auf, die man als (Dichte-) Anomalie des Wassers bezeichnet, und die man nur bei wenigen Stoffen findet:

Im Phasendiagramm ist die Schmelzdruckkurve vom Tripelpunkt aus bei steigendem Druck hin zu niedrigeren Temperaturen geneigt. Sie resultiert aus den physikalischen Eigenschaften der Wassermoleküle und zeigt sich darin, dass Eis eine geringere Dichte hat als Wasser und somit auf ihm schwimmen kann.

Bei ungefähr 4°C hat Wasser das geringste Volumen und damit die größte Dichte.

Dichteanomalien treten noch bei den Elementen Bismut, Gallium, Germanium, Plutonium und Silicium auf.



- Tripelpunkt:  $t = 0,01^\circ\text{C}$ ,  $p = 611 \text{ Pa}$
- kritischer Punkt:  $t = 374^\circ\text{C}$ ,  $p = 22,1 \text{ MPa}$

## 11.3 Verdampfen und Kondensieren

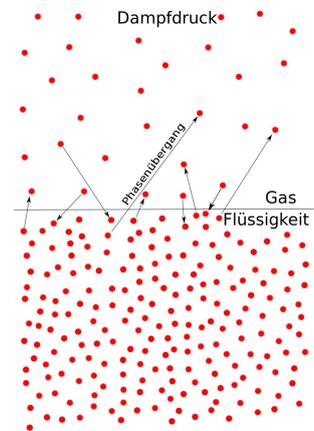
### 11.3.1 Der Dampfdruck

Oft existiert ein Stoff parallel in zwei Phasen, z.B. bei flüssiger und gasförmiger Phase.

Flüssigkeitsteilchen an der Oberfläche der Flüssigkeit, die besonders viel kinetische Energie haben, können sich von ihren Nachbarn lösen. Sie bilden ein Gas über der Oberfläche der Flüssigkeit. Hier wird die Gasphase als Dampf bezeichnet (z.B. Wasserdampf, Alkoholdampf, Benzindampf). Der Dampfdruck  $p_D$  ist dann der Druck (Partialdruck), den das Gas über einer Flüssigkeit ausübt.

In diesem System gibt es ein Wechselspiel zwischen der flüssigen und der gasförmigen Phase:

- es entweichen Teilchen aus der Flüssigkeit, weil ihre kinetische Energie groß genug ist (verdampfen)
- andererseits treten Teilchen wieder in die Flüssigkeit ein, weil ihre kinetische Energie zu klein ist (kondensieren)



Je kleiner der Dampfdruck ist, desto mehr Teilchen können die Flüssigkeit verlassen. Die Flüssigkeit verdampft.

Je größer der Dampfdruck ist, desto mehr Teilchen kehren in die Bindungen der Flüssigkeit zurück. Der Dampf kondensiert.

In einem geschlossenen System stellt sich meist ein Gleichgewicht zwischen der flüssigen und der gasförmigen Phase ein. Der Dampfdruck wird dann als Sättigungsdampfdruck  $p_S$  bezeichnet

### 11.3.2 Der Sättigungsdampfdruck

Bei jeder Temperatur gibt es einen bestimmten Dampfdruck  $p_S$ , bei welchem gleich viel Teilchen verdampfen und kondensieren. Dieser Druck  $p_S$  heißt Sättigungsdruck. Der Dampf ist in diesem Zustand gesättigt, er ist "voll". Es gibt 3 Möglichkeiten für das Verhältnis von Dampfdruck  $p_D$  und Sättigungsdampfdruck  $p_S$ :

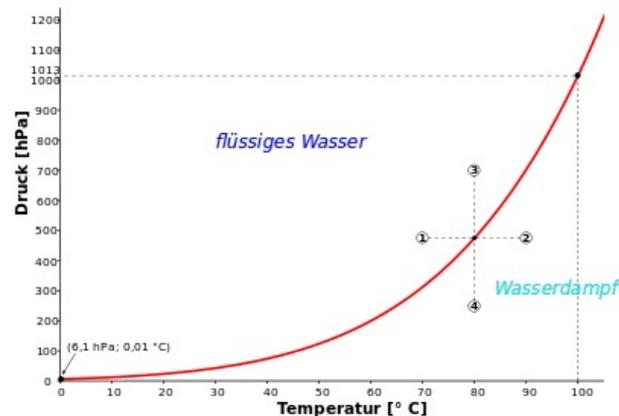
- der Dampfdruck ist kleiner als der Sättigungsdampfdruck:  $p_D < p_S$   
 $\implies$  die Flüssigkeit verdampft
- der Dampfdruck ist größer als der Sättigungsdampfdruck:  $p_D > p_S$   
 $\implies$  der Dampf kondensiert (Übersättigter Dampf)
- der Dampfdruck ist gleich dem Sättigungsdampfdruck:  $p_D = p_S$   
 $\implies$  Flüssigkeit und Dampf sind im Gleichgewicht.

Der Sättigungsdampfdruck eines Stoffes ist der Druck, bei dem die gasförmige Phase sich mit der flüssigen Phase im Gleichgewicht befindet. Der Sättigungsdampfdruck ist von der Temperatur abhängig. Je höher die Temperatur desto größer ist der Sättigungsdampfdruck  $p_S$ .

Die Sättigungsdampfdruckkurve (Dampfdruckkurve) beschreibt den Sättigungsdampfdruck in Abhängigkeit von der Temperatur. Sie entspricht der Phasengrenzlinie der gasförmigen Phase im Phasendiagramm. Die Kurve endet im kritischen Punkt. Rechts vom kritischen Punkt ist keine Flüssigkeit mehr möglich.

## Sättigungsdruck des Wasserdampf

Temperatur	Sättigungsdampfdruck $p_S$
0°C	610 Pa
10°C	1230 Pa
20°C	2330 Pa
30°C	4240 Pa
100°C	101 325 Pa
150°C	470 000 Pa



## Beispiel (11.1)

In einem Raum herrscht bei 30°C ein Luftdruck  $p_0 = 100\,000$  Pa und ein Partialdruck für Wasserdampf  $p_D = 3\,000$  Pa.

- Auf dem Tisch steht ein Glas Wasser. Was passiert mit dem Wasser im Glas?
- Eine Klimaanlage kühlt die Raumtemperatur auf 10°C ab, ohne an den anderen Drücken etwas zu ändern. Was passiert jetzt?

## Lösung

a) Wir müssen den Dampfdruck mit dem entsprechenden Sättigungsdampfdruck vergleichen. Sättigungsdampfdruck für 30°C ist (laut Tabelle)  $p_S = 4\,240$  Pa

Es ist:  $p_D = 3\,000$  Pa <  $p_S = 4\,240$  Pa  $\Rightarrow$  das Wasser verdampft

Der Luftdruck  $p_0$  ist in diesem Fall nicht von Bedeutung.

b) Die Temperatur verändert sich und damit auch der Sättigungsdampfdruck.

Sättigungsdampfdruck bei 10°C ist  $p_S = 1\,230$  Pa

Jetzt ist:  $p_D = 3\,000$  Pa >  $p_S = 1\,230$  Pa  $\Rightarrow$  der Wasserdampf kondensiert

Auf Wänden und Fensterscheiben bilden sich Wassertröpfchen. Man sagt: Wände und Fenster "beschlagen". Klimaanlagen müssen daher die Luft trocknen (entfeuchten), bevor sie gekühlt wird.

## 11.3.3 Die Luftfeuchte

Luft, in welcher viel Wasserdampf enthalten ist, nennt man feucht.

Die relative Luftfeuchte gibt den Wasserdampfgehalt der Luft an. Sie ist das Verhältnis von Dampfdruck zu Sättigungsdampfdruck

$$\eta = \frac{p_D}{p_S} \quad (11.2)$$

Die relative Luftfeuchte gibt an, zu wieviel Prozent der Wasserdampf in der Luft gesättigt ist. Für uns Menschen ist eine Luftfeuchte von 45 - 55% optimal.

## Beispiel (11.2)

In einem Raum herrscht bei 30°C über einem Glas Wasser ein Partialdruck für Wasserdampf von  $p_D = 3\,000$  Pa.

- a) Berechnen Sie die relative Luftfeuchte!  
 b) Eine Klimaanlage kühlt die Raumtemperatur auf 10°C ab. Wie verändert sich die Luftfeuchte?

#### Lösung

a) Sättigungsdampfdruck für 30°C ist (laut Tabelle)  $p_S = 4\,240$  Pa

Luftfeuchte:

$$\eta = \frac{p_D}{p_S} = \frac{3\,000}{4\,240} = 0,707 = 70,7\%$$

Der Dampf ist bereits zu 70,7% gesättigt. Das Wasser aus dem Glas wird bei dieser hohen relativen Luftfeuchte nur noch sehr langsam verdampfen (= verdunsten).

b) Sättigungsdampfdruck bei 10°C ist  $p_S = 1\,230$  Pa

Luftfeuchte:

$$\eta = \frac{p_D}{p_S} = \frac{3\,000}{1\,230} = 2,439 = 243,9\%$$

Der Dampf ist mit 243,9% übersättigt und wird daher schnell an den Wänden des Raumes kondensieren.

#### 11.3.4 Sieden

Sieden ist eine besondere Form des Verdampfens, die innerhalb der Flüssigkeit statt findet. Dabei erreicht der Dampfdruck einer Flüssigkeit den Umgebungsdruck (Aussendruck).

Beim Sieden verdampft eine Flüssigkeit nicht nur an der Oberfläche sondern auch im Inneren. Es bilden sich Gasblasen im Inneren der Flüssigkeit. Dies ist nur möglich, wenn der Innendruck  $p_i$  im Inneren der Blase größer als der Aussendruck  $p_a$  ist. Der Innendruck einer Gasblase ist immer gleich dem Sättigungsdampfdruck  $p_i = p_S$ . Wenn aber der äußere Druck zu groß ist, dann werden die entstehenden Gasblasen sofort wieder zusammengedrückt. Erst wenn der Sättigungsdampfdruck gleich dem äußeren Druck ist, können die Gasblasen stabil sein. Stabile Gasblasen gibt es nur bei:

$$p_i = p_S \geq p_a$$

Eine Flüssigkeit siedet also, wenn der Innendruck größer oder gleich dem Aussendruck ist. Die kleinste Temperatur, bei welcher eine Flüssigkeit siedet, ergibt sich, wenn

$$p_S = p_a$$

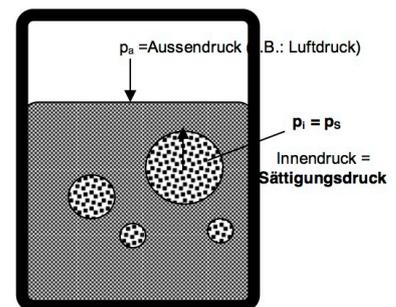
Der Siedevorgang setzt bei einem bestimmten Aussendruck  $p_{\text{siede}}$  bei einer bestimmten Temperatur  $T_{\text{siede}}$ , der Siedetemperatur (Siedepunkt), ein.

Der Aussendruck  $p_a$  kann aber verändert werden. Wenn man das Sieden verschiedener Flüssigkeiten vergleichen will, muß man dies bei einem gemeinsamen Aussendruck tun. Dafür hat man den Normalluftdruck  $p_0 = 101\,325$  Pa gewählt.

Der Siedepunkt (Kochpunkt) einer Flüssigkeit ist die Temperatur  $T_{\text{siede}}$ , bei welcher der Sättigungsdruck gleich dem Normalluftdruck ist.

$$p_S = p_0$$

Bei Wasser ist der Siedepunkt bei  $p_0$  bei 100°C.



Staub- und gasfreie Flüssigkeiten lassen sich in reinen Gefäßen auch über den Siedepunkt erwärmen. Auf diesen Siedeverzug folgt meist ein explosionsartiger Siedevorgang, bei dem die Temperatur der überhitzten Flüssigkeit wieder auf die entsprechende Siedetemperatur zurückgeht. Den Vorgang in umgekehrter Richtung nennt man Kondensationsverzug.

#### Siedepunkte einiger Stoffe bei $p_0$

Stoff	Siedepunkt $T_{\text{siede}}$
Helium	-269°C
Wasserstoff	-253°C
Stickstoff	-196°C
Sauerstoff	-183°C
Wasser	100°C
Quecksilber	357°C
Blei	1740°C
Eisen	2750°C
Kohlenstoff	4827°C

Wasser siedet bei 100°C aber nur, wenn der äußere Druck genau gleich  $p_0$  ist. Wenn man den äußeren Luftdruck erhöht, so siedet Wasser erst bei einer höheren Temperatur. Dies nützt man beim sogenannten Druckkochtopf, um mit Wasser bei  $T > 100^\circ\text{C}$  kochen zu können und die Speisen dadurch schneller zu garen. Auf einem hohen Berg ist der Luftdruck kleiner und Wasser siedet schon bei niedrigeren Temperaturen  $T < 100^\circ\text{C}$ . Dort muß man die Speisen länger kochen, damit sie gar werden.

#### Siedetemperatur von Wasser bei verschiedenem Luftdruck

Druck	Siedetemperatur
$p_0$	100°C
Druckkochtopf	130°C
Mount Everest (ca. 9000 m)	70°C
Wien (ca. 400 m)	98°C

Wenn man die Siedetemperaturen für verschiedene äußere Drücke wissen will, braucht man nur die Kurven für den Sättigungsdampfdruck zu verwenden.

#### 11.3.5 Verdampfungswärme

Wird die Flüssigkeit erwärmt, dann nimmt zuerst die Temperatur zu. Am Siedepunkt bewirkt die Wärmezufuhr keine Temperaturerhöhung, obwohl die innere Energie der Flüssigkeit ständig zunimmt. Die Energie wird zum Übergang in den gasförmigen Aggregatzustand gebraucht. Nach dem vollständigen Sieden nimmt die Temperatur wieder zu.

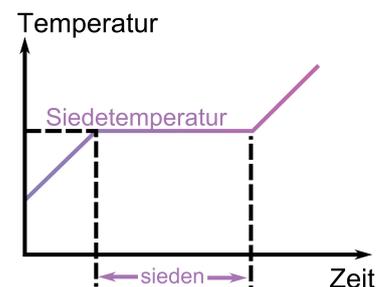
Zum vollständigen Verdampfen einer Flüssigkeit braucht man die sogenannte Verdampfungswärme  $Q_V$ .

Wenn ein Gas bei konstanter Temperatur verdampft, so wird:

- das Volumen von  $V_{Fl}$  auf  $V_{Dampf}$  vergrößert und dabei gegen den äußeren Druck gearbeitet
- der Molekülabstand stark vergrößert und dabei gegen die Anziehungskräfte der Moleküle gearbeitet

Die Wärmeenergie, die man für die Verdampfung einer Masse  $m$  einer Flüssigkeit braucht, ist

$$Q_V = m \cdot q_V$$



wobei  $q_V$  die spezifische Verdampfungswärme ist (gemessen in J/kg).

Die Wärmeenergie, die man für die Verdampfung von  $n$  mol einer Flüssigkeit braucht, ist

$$Q_V = n \cdot q_{V,\text{mol}}$$

wobei  $q_{V,\text{mol}}$  die molare Verdampfungswärme ist (gemessen in J/mol).

#### Beispiele für Verdampfungswärmen

Stoff	Wasser	Eisen	Aceton	Stickstoff
spezifische Verdampfungswärme $q_V$ [kJ/kg]	2257	6322	525	198
molare Verdampfungswäre $q_{V,\text{mol}}$ [kJ/mol]	40,8	350	29,1	5,6

#### Beispiel (11.3)

In einem Gefäß befindet sich 1 Liter Wasser der Temperatur  $0^\circ\text{C}$ . Das Gefäß steht auf einer (eingeschalteten) Herdplatte der Wärmeleistung 1 kW.

a) Wie lange dauert es, bis das Wasser zu sieden beginnt? (Von Wärmeverlusten an die Umgebung soll abgesehen werden.)

b) Wie lange dauert es, bis das gesamte Wasser verdampft ist?

#### Lösung

1 Liter Wasser entspricht 1 kg Wasser

a) Zum Erwärmen des Wassers von  $0^\circ\text{C}$  auf  $100^\circ\text{C}$  benötigt man die Wärme  $Q_1$

$$Q_1 = c_{\text{wasser}} \cdot m \cdot \Delta T = 4186 \cdot 1 \cdot (100 - 0) = 418,6 \text{ kJ}$$

Aus der Leistung  $P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{Q_1}{t}$  kann man die Zeit berechnen

$$t = \frac{Q_1}{P} = \frac{418,6 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^3} = 418,6 \text{ s} = 6,9 \text{ min} \approx 7 \text{ min}$$

b) Zum Verdampfen des Wassers benötigt man anschließend die Wärme  $Q_2$

$$Q_2 = m \cdot q_V = 1 \cdot 2257 \cdot 10^3 = 2257 \text{ kJ}$$

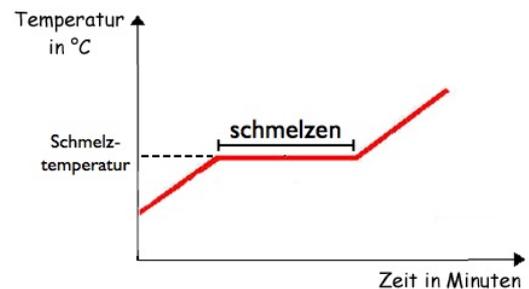
Damit ergibt sich für die Zeit

$$t = \frac{Q_2}{P} = \frac{2257 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^3} = 2257 \text{ s} = 37,6 \text{ min} \approx 38 \text{ min}$$

## 11.4 Schmelzen und Erstarren

Als Schmelzen bezeichnet man den Übergang eines Stoffes vom festen in den flüssigen Aggregatzustand. Das Gegenteil des Schmelzens ist das Erstarren.

Schmelztemperatur  $T_{\text{schmelz}}$  und Schmelzdruck  $p_{\text{schmelz}}$  werden zusammen als Schmelzpunkt bezeichnet. Während des Übergangs (der auch als "Auftauen" bezeichnet wird) bleibt die Temperatur konstant. Die zugeführte Wärme wird in die Änderung des Aggregatzustandes investiert. Dabei werden Bindungskräfte zwischen Molekülen bzw. Atomen überwunden, ohne deren kinetische Energie und damit ihre Temperatur zu erhöhen.



*Schmelzpunkte einiger Stoffe bei  $p_0$* 

Stoff	Schmelzpunkt $T_{\text{schmelz}}$
Helium	-272°C
Wasserstoff	-259°C
Stickstoff	-210°C
Sauerstoff	-218°C
Wasser	0°C
Quecksilber	-38°C
Blei	327°C
Eisen	1536°C
Kohlenstoff	3820°C

**Schmelzwärme**

Schmelzwärme  $Q_{\text{schm}}$  bezeichnet die Energie, die benötigt wird, um die Masse  $m$  (die Molzahl  $n$ ) eines festen Stoffes in den flüssigen Aggregatzustand zu überführen

$$Q_S = m \cdot q_S = n \cdot q_{S,\text{mol}}$$

Die spezifische Schmelzwärme  $q_{\text{schm}}$  bezeichnet die Energie, die man braucht um 1 kg eines Stoffes zu schmelzen (gemessen in J/kg). Die molare Schmelzwärme  $q_{\text{schm,mol}}$  bezieht sich auf ein Mol eines Stoffes (gemessen in J/mol).

*Beispiele für Schmelzwärmen*

Stoff	Wasser	Eisen	Aceton	Stickstoff
spezifische Schmelzwärme $q_S$ [kJ/kg]	335	268	82	26

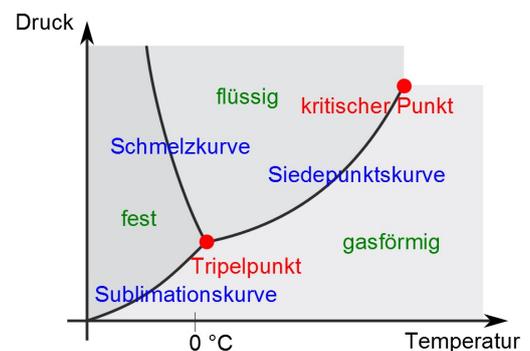
**Schmelzkurve**

Auch für die Schmelztemperaturen gibt es Kurven, die ähnlich wie für die Siedetemperaturen aussehen. Man nennt sie Schmelzkurve.

Der Schmelzpunkt hängt zwar vom Druck ab, allerdings nur geringfügig. Daraus folgt, dass sich Änderungen des Atmosphärendrucks praktisch nicht auf den Schmelzpunkt auswirken. Die Schmelzkurve ist daher sehr steil.

So hat zum Beispiel ein Wasser/Eis-Gemisch bei Normaldruck eine Temperatur von 0°C.

Die steilen Schmelzkurven schneiden sich mit den weniger steilen Dampfdruckkurven (Siedepunktkurven) im Tripelpunkt. An diesem Punkt gibt es alle drei Phasen zugleich.

**Schmelzpunkterniedrigung durch Druck**

Bei manchen Stoffen (zum Beispiel Wasser) geht die Schmelzkurve oberhalb eines bestimmten Druckes wieder "zurück" zu niedrigeren Temperaturen. Das bedeutet, daß die Schmelztemperaturen bei höheren Drucken sinken. Wenn man daher auf Wasser Druck ausübt, kann man es zum Schmelzen bringen. Eis kann man also in der Nähe des Tripelpunktes (0°C, 101 325 Pa) durch Verstärkung des Drucks zum sublimieren bringen. Weit unterhalb des Tripelpunktes ist dies nicht möglich, da hier die Schmelzkurve ihre Richtung ändert, Hier würde durch größeren Druck mehr Wasserdampf gefrieren. Diese Schmelzpunkterniedrigung wird zum Beispiel beim Eislaufen ausgenützt.

**Beispiel (11.4)**

Welche Energie benötigt man, um einen Eiswürfel von 10 g von  $-15^\circ\text{C}$  vollständig zu schmelzen?  
 ( $c_{\text{eis}} = 2,1 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ,  $q_{\text{S,eis}} = 335 \text{ kJ}/\text{kg}$ )

**Lösung**

Zuerst muß man das Eis aufwärmen auf den Schmelzpunkt von  $0^\circ\text{C}$ . Dazu braucht man die Wärme

$$Q_1 = c_{\text{eis}} \cdot m \cdot \Delta T = 2,1 \cdot 10^3 \cdot 0,01 \cdot (0 - (-15)) = 0,315 \text{ kJ}$$

danach muß man die Schmelzwärme  $Q_2$  zuführen

$$Q_2 = m \cdot q_{\text{S,eis}} = 0,01 \cdot 335 \cdot 10^3 = 3,35 \text{ kJ}$$

Die gesamte benötigte Energie ist

$$Q_{\text{ges}} = Q_1 + Q_2 = 3,665 \text{ kJ}$$

**Beispiel (11.5)**

Eis mit der Masse  $m_1$  und der Temperatur  $t_1 = -10^\circ\text{C}$  wird in  $m_2 = 5 \text{ kg}$  Wasser mit der Temperatur  $t_2 = 90^\circ\text{C}$  gegeben. Das Eis schmilzt. Nach einiger Zeit stellt sich die Mischungstemperatur  $t_M = 12^\circ\text{C}$  ein.

Berechnen Sie die Masse  $m_1$  des Eises!

( $c_{\text{eis}} = 2,1 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ,  $c_{\text{wasser}} = 4,2 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ,  $q_{\text{S}} = 335 \text{ kJ}/\text{kg}$ )

**Lösung**

Die Energieänderung des Eises ist gleich der Energieänderung des Wassers:

$$\Delta Q_{\text{eis}} = -\Delta Q_{\text{wasser}}$$

Das Eis muß zuerst erwärmt werden auf  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ , dann geschmolzen werden und dann noch weiter erwärmt werden auf  $t_M = 12^\circ\text{C}$ :

$$\begin{aligned} \Delta Q_{\text{eis}} &= c_{\text{eis}} \cdot m_1 \cdot (t_0 - t_1) + q_{\text{S}} \cdot m_1 + c_{\text{wasser}} \cdot m_1 \cdot (t_M - t_0) \\ &= 2,1 \cdot 10^3 \cdot m_1 \cdot (0 - (-10)) + 335 \cdot 10^3 \cdot m_1 + 4,2 \cdot 10^3 \cdot m_1 \cdot (12 - 0) \\ &= 406,4 \cdot 10^3 \cdot m_1 \text{ J} \end{aligned}$$

diese Energie wird durch das Abkühlen des Wassers bereitgestellt:

$$\begin{aligned} \Delta Q_{\text{wasser}} &= c_{\text{wasser}} \cdot m_2 \cdot (t_M - t_2) \\ &= 4,2 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot (12 - 90) \\ &= -1638 \cdot 10^3 \text{ J} \end{aligned}$$

gleichsetzen liefert

$$\begin{aligned} \Delta Q_{\text{eis}} &= -\Delta Q_{\text{wasser}} \\ 406,4 \cdot 10^3 \cdot m_1 &= 1638 \cdot 10^3 \\ m_1 &= 4,03 \text{ kg} \end{aligned}$$

## 11.5 Sublimieren und Resublimieren

Als Sublimation bezeichnet man den Übergang eines Stoffes vom festen in den gasförmigen Aggregatzustand, ohne sich vorher zu verflüssigen. Das Gegenteil der Sublimation ist die Resublimation. Druck- und Temperatur, bei denen eine Sublimation auftritt, bezeichnet man als Sublimationspunkt. Diese Punkte bilden die Sublimationskurve im Phasendiagramm, die durch die Grenzlinie zwischen Feststoff und Gas unterhalb des Tripelpunktes gegeben ist.

Jeder Stoff nimmt bei seiner Sublimation die sogenannte Sublimationswärme auf, die gleich der Summe aus Schmelz- und Verdampfungswärme ist.

### Beispiele für die Subliation

- Liegt Schnee längere Zeit, dann kann man beobachten, dass sich die Schneemenge allmählich verringert, auch wenn ständig Frost herrscht. Offensichtlich wandelt sich Schnee direkt in Wasserdampf um.
- Auch der umgekehrte Vorgang ist zu beobachten: In kalten Nächten schlägt sich Wasserdampf in Form von Reif nieder. Es erfolgt eine direkte Umwandlung vom gasförmigen in den festen Aggregatzustand.
- Es trocknet feuchte Wäsche bei Frost an der Außenluft schneller als in Innenräumen, deren wärmere Luft bereits mit Wasserdampf mehr oder weniger gesättigt ist.

### Beispiel (11.6)

Ein Stück Eis der Masse  $m = 0,15 \text{ kg}$  mit einer Temperatur von  $t_0 = -14^\circ\text{C}$  wird erwärmt.

Wieviel Wärme muß dem Eis zugeführt werden, um es vollständig in Dampf der Temperatur  $t_1 = 106^\circ\text{C}$  zu überführen?

### Lösung

Man muss insgesamt fünf verschiedene Wärmemengen addieren. Und zwar  $Q_1$  für das Erwärmen des Eises auf  $0^\circ\text{C}$ :

$$Q_1 = c_{\text{eis}} \cdot m \cdot \Delta T = 2100 \cdot 0,15 \cdot (0 - (-14)) = 4,41 \text{ kJ}$$

$Q_2$  für das Schmelzen des Eises bei  $0^\circ\text{C}$ :

$$Q_2 = m \cdot q_S = 0,15 \cdot 335 \cdot 10^3 = 50,025 \text{ kJ}$$

$Q_3$  für das Erhitzen des Wassers von  $0^\circ\text{C}$  auf  $100^\circ\text{C}$ :

$$Q_3 = c_{\text{wasser}} \cdot m \cdot \Delta T = 4190 \cdot 0,15 \cdot (100 - 0) = 62,85 \text{ kJ}$$

$Q_4$  für das Verdampfen des Wassers bei  $100^\circ\text{C}$ :

$$Q_4 = m \cdot q_V = 0,15 \cdot 2250 \cdot 10^3 = 337,5 \text{ kJ}$$

und  $Q_5$  für das Erhitzen des Dampfes auf die Temperatur  $t_1 = 106^\circ\text{C}$ :

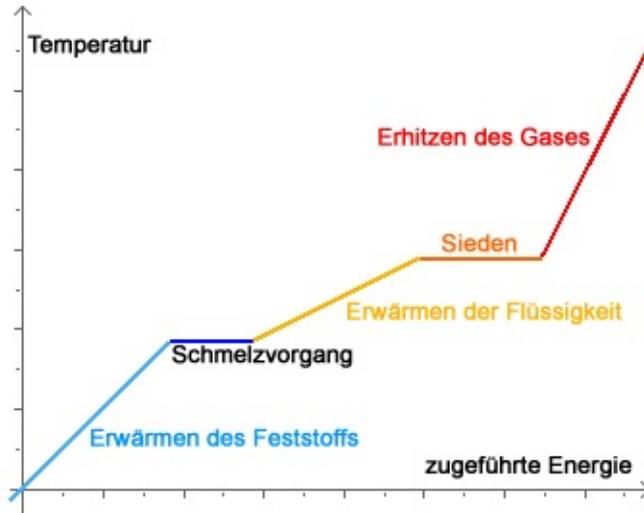
$$Q_5 = c_{\text{dampf}} \cdot m \cdot \Delta T = 2000 \cdot 0,15 \cdot (106 - 100) = 1,8 \text{ kJ}$$

Das Ergebnis lautet dann

$$Q_{\text{ges}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 = 456,6 \text{ kJ}$$

## 11.6 Zusammenfassung

Die Änderungen des Aggregatzustandes kann man in einem Temperatur-Wärme-Diagramm sehr gut sehen. Das Diagramm wird bei einem bestimmten Druck, z.B. Normaldruck  $p_0 = 101\,325\text{ Pa}$ , dargestellt.



Daraus kann man folgende Eigenschaften ablesen:

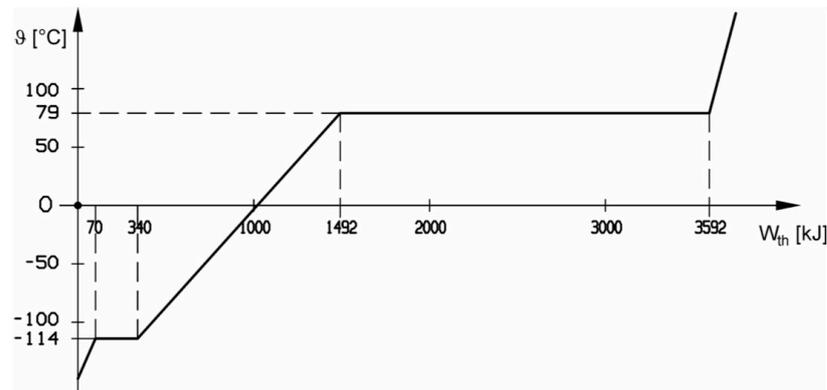
- die spezifische Wärmekapazität  $c_{\text{fest}}$  zur Erwärmung des Feststoffes ist die Steigung der ersten schiefen Gerade (hellblau)
- die Schmelztemperatur  $T_{\text{schmelz}}$  wird durch den ersten waagrechten Bereich gekennzeichnet (dunkelblau)
- die Schmelzwärme  $Q_S$  wird durch die Länge der ersten waagrechten Gerade angegeben (dunkelblau)
- die spezifische Wärmekapazität  $c_{\text{fl}}$  zur Erwärmung der Flüssigkeit ist die Steigung der zweiten schiefen Gerade (gelb)
- die Siedetemperatur  $T_{\text{siede}}$  ist bei der zweiten waagrechten Gerade erreicht (orange)
- die Verdampfungswärme  $Q_V$  wird durch die Länge der zweiten waagrechten Gerade angegeben (orange)
- die spezifische Wärmekapazität  $c_{\text{gas}}$  zur Erwärmung des Gases ist die Steigung der dritten schiefen Gerade (rot)

## 11.7 Aufgaben

- (11.1) In einem geschlossenen Gefäß befindet sich Wasser bei  $20^\circ\text{C}$ . Der Raum, den das Gas ausfüllt, beträgt  $V_{\text{Gas}} = 4\text{ Liter}$ . Über dem Wasser befindet sich Luft mit dem Druck  $p_L = 97800\text{ Pa}$  und Wasserdampf mit dem Druck  $p_D = 2200\text{ Pa}$ .
- Verdampft das Wasser? Berechnen Sie die relative Luftfeuchtigkeit!
  - Wir verkleinern das Volumen des Gasraums isotherm. Bei welchem Volumen beginnt das Wasser zu kondensieren?

- (11.2) a) In einem Zimmer beträgt die Temperatur  $20^{\circ}\text{C}$  und die relative Luftfeuchtigkeit ist 85%. Berechnen Sie den Partialdruck des Wasserdampfs!  
b) Ein Brillenträger betritt von außen (Außentemperatur  $10^{\circ}\text{C}$ ) den Raum und bemerkt plötzlich, dass er nichts mehr sieht (die Brille ist beschlagen).  
Warum passiert das? Begründen Sie mit einer Rechnung!
- (11.3) An einem sonnigen Tag beträgt die Temperatur  $30^{\circ}\text{C}$  und die relative Luftfeuchtigkeit ist 50%. Abends geht die Sonne unter und die Temperatur sinkt auf  $20^{\circ}\text{C}$ .  
Entscheiden Sie durch Rechnung, ob sich Regentropfchen (Nebeltröpfchen) bilden! Wie hoch ist die relative Luftfeuchtigkeit nach Sonnenuntergang?
- (11.4) Welche Energie wird beim Abkühlen von 0,25 l Limo (=Wasser) von  $16^{\circ}\text{C}$  auf  $0^{\circ}\text{C}$  frei?
- (11.5) Eis von  $-20^{\circ}\text{C}$  wird gleichmäßig Wärme zugeführt, bis Wasser von  $20^{\circ}\text{C}$  entsteht.  
Zeichnen Sie für diesen Temperaturbereich den prinzipiellen Verlauf des Temperatur-Wärme-Diagramms!
- (11.6) Um 17 g Alkohol der Temperatur  $24^{\circ}\text{C}$  vollständig zu verdampfen, benötigt man die Wärmeenergie von 16,2 kJ.  
a) Berechnen Sie die spezifische Verdampfungswärme von Alkohol!  
b) Zeichnen Sie ein Temperatur-Wärme-Diagramm von diesem Vorgang!  
(Materialkonstanten:  $c_{\text{alk}} = 2,4 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ,  $t_{\text{alk,siede}} = 78^{\circ}\text{C}$  )
- (11.7) a) Bergwanderer füllen ihren Teekessel mit 1 kg Schnee von  $0^{\circ}\text{C}$ . Welche Energie ist nötig, um daraus Teewasser von  $80^{\circ}\text{C}$  zu bereiten?  
b) Wie viel Wasser von  $0^{\circ}\text{C}$  kann man mit dieser Energie auf  $80^{\circ}\text{C}$  erwärmen?
- (11.8) Eine Studentin will 0,2 kg Orangensaft ( $c_O = 4,2 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$  ) von  $20^{\circ}\text{C}$  mit Eiswürfeln von  $0^{\circ}\text{C}$  abkühlen. Sie führt dazu mehrere Versuche durch.  
a) Sie wirft 80 g Eis in den Orangensaft und stellt fest, dass es nicht vollständig schmilzt. Wie viel Gramm Eis bleiben übrig?  
b) Sie wirft 25 g Eis in den Orangensaft. Berechnen Sie die Mischtemperatur!  
c) Wie viel Eis muss sie ins Glas geben, damit sich die Mischungstemperatur von  $15^{\circ}\text{C}$  einstellt?
- (11.9) Ein Student stellt auf eine eingeschaltete Herdplatte (Heizleistung 1500 W) einen Topf mit 1,2 Liter Wasser der Temperatur  $16^{\circ}\text{C}$ .  
a) Wie lange dauert es, bis das Wasser zu sieden beginnt?  
b) Der Student hat das Wasser auf der Herdplatte vergessen. Wie lange dauert es, bis die Hälfte des Wassers verdampft ist?
- (11.10) Berechnen Sie die Wärmemengen, die notwendig sind, um 100 g Eis zu schmelzen, dann von  $0^{\circ}\text{C}$  auf  $100^{\circ}\text{C}$  zu erwärmen und schließlich vollständig in Dampf umzuwandeln! Vergleichen Sie diese Energiemengen!
- (11.11) a) Die spezifische Verdampfungswärme von Alkohols beträgt  $844 \text{ kJ}/\text{kg}$ . Wie viel Wärme wird gebraucht, um 1 kg Alkohol vollständig zu verdampfen?  
b) Die spezifische Verdampfungswärme von Petroleums beträgt  $336 \text{ kJ}/\text{kg}$  . Wie viel Petroleum kann mit Zufuhr von  $336 \text{ kJ}$  Wärme vollständig verdampft werden?  
c) Die spezifische Verdampfungswärme von Wasser ist  $2257 \text{ kJ}/\text{kg}$ . Berechnen Sie die Wärme, die zum vollständigen Verdampfen von  $2,5 \text{ m}^3$  nötig ist!

(11.12) Folgendes Diagramm zeigt den Phasenverlauf eines Stoffes im Temperatur-Wärme-Diagramm.



Bestimmen Sie folgende Daten aus dem Diagramm:

- die Siede- und die Schmelztemperatur
- die Schmelz- und die Verdampfungswärme
- die spezifische Schmelzwärme, wenn das Phasendiagramm für einen Stoff der Masse 2,5 kg aufgenommen wurde
- Was sagt die Steigung über die spezifischen Wärmekapazitäten der einzelnen Aggregatzustände aus?
- Wie viel Energie wird frei, wenn sich der Stoff von  $79^{\circ}\text{C}$  auf  $-114^{\circ}\text{C}$  abkühlt?
- Berechnen Sie die spezifische Wärmekapazität für den flüssigen Zustand!