Vorstudienlehrgang der Wiener Universitäten VWU

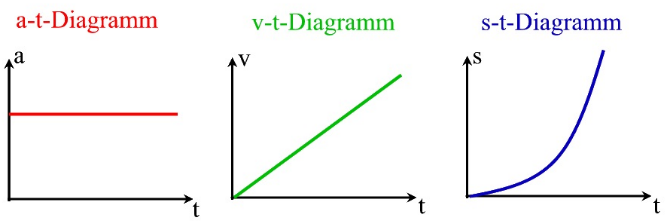
Skriptum

Physik-Kurs

Teil 1: Elementare Mechanik

Katharina Durstberger-Rennhofer

Version Oktober 2018



Inhaltsverzeichnis

1 Was ist Physik?

Physik ist eine faszinierende Wissenschaft, die sich damit befasst, fundamentale Phänomene der Natur zu erforschen und daraus allgemein gültige Regeln (Naturgesetze) zu entwickeln.
Die Physik beschäftigt sich mit den Vorgängen der unbelebten Natur und ihrer mathematischen Beschreibung. Die Physik ist entstanden aus dem Wunsch der Menschen, die Naturerscheinungen zu verstehen, auf allgemeine Gesetze zurückzuführen und sich die Natur durch diese Erkenntnisse zu nutze zu machen.
In der Experimentalphysik werden Naturgesetze durch Beobachtung und Erfahrung gewonnen, in der Theoretischen Physik durch Mathematik und Logik. Dabei ergänzen sich Experimental- und Theoretische Physik, indem die Experimentalphysik Hypothesen der Theoretischen Physik bestätigt und die Theoretische Physik auf Ergebnisse der Experimentalphysik zurückgreift.
Das Spektrum des modernen physikalischen Interesses reicht von den kleinsten Bausteinen der Natur (Elementarteilchen) bis zu astronomischen und kosmologischen Fragestellungen. Es umfasst die Untersuchung neuartiger Materialien und deren Nanostrukturierung ebenso wie die Entwicklung modernster Messmethoden und die Weiterentwicklung theoretischer Konzepte. Die moderne Physik stellt nicht nur die Grundlagen für andere Natur- und Ingenieurwissenschaften bereit, sondern trägt auch selbst zur interdisziplinären Forschung bei. Die Physik lebt von neuen Ideen und überraschenden Entdeckungen, deren Anwendungen zur Entwicklung zukünftiger Technologien wichtig sind.
Das physikalische Wissen über die Vorgänge und den Aufbau der Natur erweitert unseren Horizont und macht uns unsere Stellung in der von uns erfassbaren Welt(vom Makrokosmos des Weltalls bis zum Mikrokosmos der Elementarteilchen) bewusst.

1.1 Fragestellungen der Physik

Die Naturerscheinungen, mit denen sich die Physik beschäftigt, sind sehr vielfältig. Bei der Untersuchung jeder Naturerscheinung entstehen auch Fragen, die beantwortet werden müssen.

Eine Naturerscheinung ist der Regenbogen. Wie entsteht ein Regenbogen? Unter welchen Bedingungen kann man ihn sehen? Warum hat ein Regenbogen immer dasselbe Farbband? Warum sieht man manchmal sogar zwei Regenbogen übereinander?

Ein Lagerfeuer kann faszinierend sein. Woher kommen Wärme und Licht des Feuers? Wie entsteht Feuer, wie kann es gelöscht werden? Warum geben unterschiedliche Brennmaterialien unterschiedlich viel Wärme und Licht ab?

Im Nordpolarmeer und im Südpolarmeer schwimmen gewaltige Eisberge im Wasser. Dabei sieht man nur ihre Spitze, weil sich etwa 90% eines Eisberges unter Wasser befinden. Warum schwimmt überhaupt ein viele Tonnen schwerer Eisberg? Warum befindet sich der größte Teil unter Wasser? Wie lange existiert ein auf dem Wasser schwimmender Eisberg?

In großen Räumen oder in den Bergen kann man Echos hören. Wie kommt ein solches Echo zustande? Wovon ist die Dauer zwischen einem Ruf und der Wahrnehmung seines Echo abhängig? Unter welchen Bedingungen entsteht ein Mehrfachecho?

Mit all diesen und vielen weiteren Fragen beschäftigt sich die Physik. Dabei werden typische Denk- und Arbeitsweisen angewendet, die mit solchen Tätigkeiten verbunden sind, wie Beobachten, Beschreiben, Vergleichen, Messen, Experimentieren oder Interpretieren.

2 Physikalische Größen

Eine physikalische Größe ist eine quantitativ bestimmbare Eigenschaft eines physikalischen Objektes, Vorgangs oder Zustands. Der Wert einer physikalischen Größe (Größenwert) wird als Produkt aus einem Zahlenwert (der Maßzahl) und einer Maßeinheit angegeben. Vektorgrößen werden durch Größenwert und Richtung angegeben. Will man von einer physikalischen Größe nur die Einheit angeben, so setzt man das Formelzeichen in eckige Klammern.
Diejenigen physikalischen Größen, die als Basis eines Größensystems festgelegt sind, heißen Basisgrößen.
Es gibt verschiedene Einheitensysteme nebeneinander, zum Beispiel das cgs-System (Zentimeter, Gramm, Sekunde) oder das SI-System (Système international d'unités, basierend auf Meter, Kilogramm, Sekunde).

2.1 SI-Einheiten

Wir verwenden in diesem Skriptum nur das SI-System.
In der Tabelle sind die Basiseinheiten des SI-Systems aufgelistet.

Physikalische Größe	Symbol	Einheit	Abkürzung
Länge	s	Meter	m
Zeit	t	Sekunde	s
Masse	m	Kilogramm	kg
Stromstärke	I	Ampere	A
absolute Temperatur	T	Kelvin	K
Stoffzahl	ν	Mol	mol
Lichtintensität	I_v	Candela	cd

Es gibt aber auch viele weitere Einheiten, die sich auf die Basiseinheiten zurückführen lassen. Man nennt sie abgeleitete Einheiten. Einige Beispiele sind in der folgenden Tabelle aufgelistet.

Physikalische Größe	Symbol	Einheit	Kombination von Basiseinheiten	Abkürzung
Geschwindigkeit	v	Meter pro Sekunde	$\mathrm{m/s}$	
Beschleunigung	a	Meter pro Sekunde pro Sekunde	$\mathrm{m/s^2}$	
Kraft	F	Newton	$\frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{s^2}}$	N
Energie	E	Joule	$\frac{\mathrm{kg \cdot m^2}}{\mathrm{s^2}} = \mathrm{N \cdot m}$	J
Leistung	P	Watt	$\frac{\mathrm{kg \cdot m^2}}{\mathrm{s^3}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}$	W

2.2 Gleitkommazahlen und Zehnerpotenzen

In der Physik hat man oft sehr große oder sehr kleine Zahlen. Mithilfe von Gleitkommazahlen können sehr große und sehr kleine Zahlen praktisch dargestellt werden. Dabei werden 10-er Potenzen wie $10^7 = 10\,000\,000$ oder $10^{-3} = 0,001$ verwendet. Fließkommadarstellung nennt man die "normale" Darstellung von Zahlen ohne Potenzschreibweise, wie etwa 34510000 oder 0,0001325.

Beispiele für Gleitkommazahlen:

- $34510000 = 3,451 \cdot 10^7 = 34,51 \cdot 10^6 = 345,1 \cdot 10^5$
- $0,0001325 = 1,325 \cdot 10^{-4} = 13,25 \cdot 10^{-5} = 132,5 \cdot 10^{-6}$

Normierte Gleitkommazahlen sind Gleitkommazahlen der Form

$$a \cdot 10^n \quad \text{mit } 0 < |a| < 10$$

also Zahlen, bei denen nur eine Ziffer vor dem Komma steht.

Beispiele für normierte Gleitkommazahlen:

- $3,451 \cdot 10^7$, wohingegen $34,51 \cdot 10^6$ oder 34510000 keine normierten Gleitkommazahlen sind, obwohl sie ebenfalls die gleich Zahl angeben

- $1,325 \cdot 10^{-4}$

Bei der Umwandlung von Gleitkomma- ($a \cdot 10^{n}$) in Fließkommadarstellung gilt:

- Ist der Exponent n positiv, so wandert das Komma um n Stellen nach rechts.
- Ist der Exponent n negativ, so wandert das Komma um n Stellen nach links.

Oft werden in der Physik für gewisse Zehnerpotenzen eigene Namen verwendet. Eine Zusammenstellung dieser Vorsilben finden Sie in folgender Tabelle.

Faktor, mit dem multipliziert wird	Vorsilbe	Abkürzung	Objekte, bei denen Längen dieser Größenordnung auftreten
$10^{24} = 1000000000000000000000000$	Yotta	Y	
$10^{21} = 1000000000000000000000$	Zetta	Z	
$10^{18} = 1000000000000000000$	Exa	E	
$10^{15} = 1000000000000000$	Peta	P	
$10^{12} = 1000000000000$	Tera	T	Radius des Sonnensystems: 6 Tm
$10^{9} = 1000000000$	Giga	G	Sonnendurchmesser: 1,39 Gm
$10^{6} = 1000000$	Mega	M	Erdradius: 6,37 Mm
$10^{3} = 1000$	Kilo	k	höchste Berge: 8 km
$10^{2} = 100$	Hekto	h	
$10^{1} = 10$	Deka	da	
$10^{0} = 1$			
$10^{-1} = 0,1$	Dezi	d	
$10^{-2} = 0,01$	Centi	c	
$10^{-3} = 0,001$	Milli	m	Dicke eines Haares: 0,04mm
$10^{-6} = 0,000001$	Mikro	μ	Virengröße
$10^{-9} = 0,000000001$	Nano	n	Moleküle organischer Stoffe
$10^{-12} = 0,000000000001$	Pico	p	Atomradien bis 300 pm
$10^{-15} = 0,000000000000001$	Femto	f	Kernradius
$10^{-18} = 0,000000000000000001$	Atto	a	Wellenlänge kosmischer Strahlung
$10^{-21} = 0,000000000000000000001$	Zepto	z	
$10^{-24} = 0,000000000000000000000001$	Yokto	y	

3 Kinematik – Einfache Bewegungen

3.1 Grundbegriffe

Die Mechanik beschäftigt sich mit der Bewegung von Körpern und den Begriffen Kraft und Energie. Man kann die Mechanik grob unterteilen in

- Kinematik: beschreibt die Bewegung von Körpern
- Dynamik: beschäftigt sich mit der Ursache von Bewegungen

3.1.1 Das Bezugssystem

Die Beschreibung einer Bewegung ist nur sinnvoll, wenn wir ein Bezugssystem festlegen, von dem aus die Bewegung beobachtet wird. Jede Bewegung erfolgt relativ zu einem als ruhend angenommenen Bezugssystem. Die Angabe des Ortes, an dem sich ein Körper zu einem bestimmten Zeitpunkt befindet, geschieht am einfachsten mit Hilfe eines Koordinatensystems.
Wir beschränken uns bei den meisten Aufgaben auf eindimensionale Probleme, das heißt der Körper kann sich auf einer geraden Linie nach vorne oder zurück bewegen.

Der Ort eines Körpers ist eine (eindimensionale) Größe, den man auch Weg s nennt.
Die (eindimensionale) Bewegung eines Körpers kann in Abhängigkeit der Zeit t in einem Weg-Zeit-Diagramm (s-t-Diagramm) dargestellt werden.

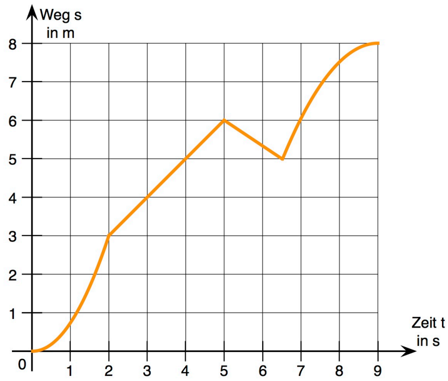
Einheit: $[s] = \mathrm{m}$ Meter

Andere Einheit: $[s] = \mathrm{km}$ Kilometer

Umrechnung: $1\ \mathrm{km} = 1000\ \mathrm{m} = 10^3\ \mathrm{m}$

Beispiel (3.1)
Die Bewegung eines Körpers ist im Weg-Zeit-Diagramm dargestellt (siehe Abbildung). Sie kann in 4 Teile zerlegt werden.

s-t-Diagramm



- 0 bis 2 Sekunden:
  Der Körper startet am Nullpunkt und bewegt sich nach vorne.
  Nach 1 Sekunde ist er zum Weg 0,75 m gekommen, nach 2 Sekunden ist er schon bei 3 m. Das ist eine Bewegung, die immer schneller wird.
- 2 bis 5 Sekunden:
  Der Körper bewegt sich nach vorne (vorwärts).
  Nach 3 Sekunden hat er 4 m zurückgelegt, nach 4 Sekunden 5 m und nach 5 Sekunden 6 m. Das ist eine Bewegung, die nicht schneller wird.
- 5 bis 6,5 Sekunden:
  Der Körper bewegt sich zurück (rückwärts).
  Nach 6 Sekunden ist er wieder bei 5,3 m angekommen, nach 6,5 Sekunden ist er bei 5 m.
- 6,5 bis 9 Sekunden:
  Der Körper bewegt sich wieder nach vorne.
  Nach 7 Sekunden ist er bei 6 m, nach 8 Sekunden bei 7,5 m nach 9 Sekunden bei 8 m. Das ist eine Bewegung, die immer langsamer wird.

3.1.2 Die Geschwindigkeit

Im *Beispiel (3.1)* wird deutlich, dass die Form der Kurve etwas über die Schnelligkeit, also die Geschwindigkeit des Körpers aussagt. Wichtig ist dabei, wie stark sich der Weg in einer gewissen Zeit ändert. Diese Änderung wird mathematisch durch ein Δ (sprich "Delta") geschrieben und bedeutet immer die Differenz zwischen zwei Werten. Wir definieren daher:

Die Änderung des Weges Δs pro Zeiteinheit Δt nennt man Geschwindigkeit v.

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{3.1}$$

Eine positive Geschwindigkeit ($v > 0$) bedeutet eine Vorwärtsbewegung, eine negative Geschwindigkeit ($v < 0$) bedeutet eine Rückwärtsbewegung, und Geschwindigkeit gleich Null ($v = 0$) bedeutet Stillstand (keine Bewegung).

Einheit: $[v] = [\frac{\Delta s}{\Delta t}] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \mathrm{m/s} = \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ Meter pro Sekunde

Andere Einheit: $[v] = \mathrm{km/h}$ Kilometer pro Stunde

Umrechnung: $1\ \mathrm{m/s} = 3{,}6\ \mathrm{km/h}$, $1\ \mathrm{km/h} = \frac{1}{3{,}6}\ \mathrm{m/s} = 0,278\ \mathrm{m/s}$

Beispiel (3.2)

Zeigen Sie, wie man auf den Umrechnungsfaktor zwischen km/h und m/s kommt!

Lösung

$$1\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \frac{1\ \mathrm{km}}{1\ \mathrm{h}} = \frac{1 \cdot 10^3\ \mathrm{m}}{60 \cdot 60\ \mathrm{s}} = \frac{1000}{3600}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{1}{3,6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Für Berechnungen von Geschwindigkeiten eignet sich die folgende Formel besser:

Wenn sich der Körper zum Zeitpunkt t_1 bei s_1 befindet und zum Zeitpunkt t_2 bei s_2, so ist seine (mittlere) Geschwindigkeit v die Änderung des Weges $\Delta s = s_2 - s_1$ pro Zeitänderung $\Delta t = t_2 - t_1$

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \tag{3.2}$$

Die Geschwindigkeit kann auch mit dem sogenannten Steigungsdreieck dargestellt werden. Dazu zeichnet man im Weg-Zeit-Diagramm in der Zeitrichtung eine Einheit nach rechts und geht dann die Geschwindigkeit (Steigung) nach oben oder nach unten (je nach Vorzeichen der Geschwindigkeit).

Wenn man mehr Einheiten nach rechts geht, so muß man auch das entsprechende Vielfache der Geschwindigkeit nach oben oder unten abtragen.

Wichtige Bemerkungen:
Wenn das Weg-Zeit-Diagramm eine Gerade ist, so ist die Geschwindigkeit immer die gleiche, egal, welche Punkte man auf der Kurve wählt.

Beispiel (3.3)

Bestimmen Sie im Diagramm die Geschwindigkeit und zeichnen Sie das Steigungsdreieck ein!

s-t-Diagramm

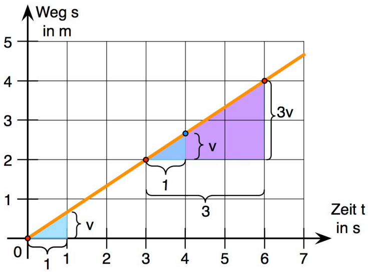
Lösung

Zuerst wählt man "günstige" Punkte aus (das sind Punkte, von denen man die Koordinaten leicht ablesen kann). Man kann z.B. die Punkte ($t_1 = 0$ s$|s_1 = 0$ m), ($t_2 = 3$ s$|s_2 = 2$ m), ($t_3 = 6$ s$|s_3 = 4$ m) wählen, die in der Zeichnung rot gekennzeichnet sind (eigentlich reichen 2 Punkte). Dann kann man die Formel verwenden:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{2-0}{3-0} = \frac{2}{3} = 0,66 \text{ m/s}$$

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_3 - s_2}{t_3 - t_2} = \frac{4-2}{6-3} = \frac{2}{3} = 0,66 \text{ m/s}$$

s-t-Diagramm

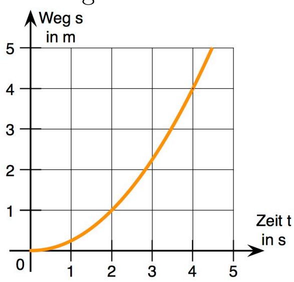


In der Abbildung sind zwei Steigungsdreiecke in Blau eingetragen. Die genaue Position des Steigungsdreiecks ist nicht wichtig. Weiters ist ein Dreieck in Lila gezeichnet, dass 3 mal so groß ist, wie die blauen Steigungsdreiecke und zu diesen ähnlich ist. Der Vorteil vom lila Dreieck ist, dass die Werte einfacher abgelesen werden können, und daher genauer sind, denn $3v = 2$.

Wichtige Bemerkungen:

Wenn das Weg-Zeit-Diagramm eine gekrümmte Kurve ist, so hängt die Geschwindigkeit sehr stark von den gewählten Punkten ab. Man spricht hier dann von der mittleren Geschwindigkeit.

s-t-Diagramm



Beispiel (3.4)

Bestimmen Sie im Diagramm die mittleren Geschwindigkeiten für die Bereiche I ($t \in [0, 2]$ s) und II ($t \in [2, 4]$ s)!

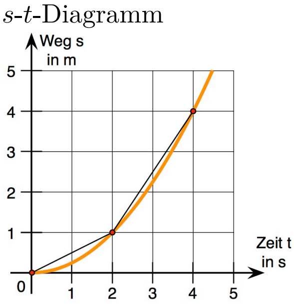
Lösung

Man liest die Koordinaten der Begrenzungspunkte der Bereiche ab:
($t_1 = 0$ s$|s_1 = 0$ m), ($t_2 = 2$ s$|s_2 = 1$ m), ($t_3 = 4$ s$|s_3 = 4$ m)
Dann bestimmt man mit der Formel die mittleren Geschwindigkeiten:

$$v_{\mathrm{I}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ m/s}$$

$$v_{\mathrm{II}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_3 - s_2}{t_3 - t_2} = \frac{4-1}{4-2} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ m/s}$$

s-t-Diagramm



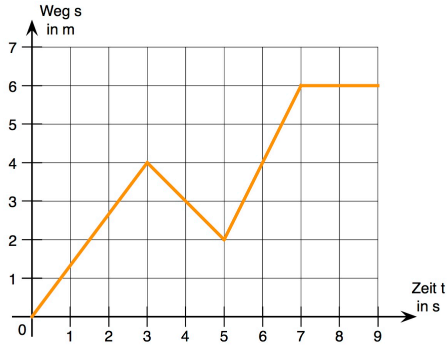
Die Berechnung der mittleren Geschwindigkeit entspricht der Annäherung der Kurve durch gerade Linien mit den entsprechenden Steigungen.
Der Körper bewegt sich vorwärts und wird immer schneller, da $v_{\mathrm{I}} < v_{\mathrm{II}}$.

Der zeitliche Verlauf der Geschwindigkeit kann in ein v-t-Diagramm eingezeichnet werden.

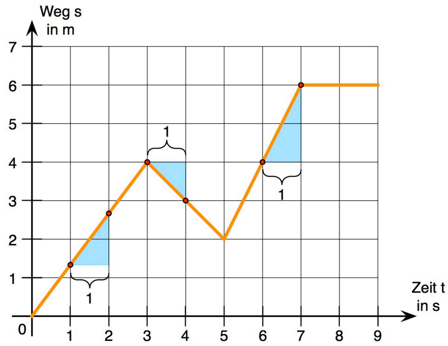
Beispiel (3.5)

Die Bewegung eines Körpers wird in einem s-t-Diagramm dargestellt.
a) Bestimmen Sie für die 4 Bereiche die Geschwindigkeiten und zeichnen Sie die Steigungsdreiecke ein!
b) Zeichnen Sie ein v-t-Diagramm für die 4 Bereiche!

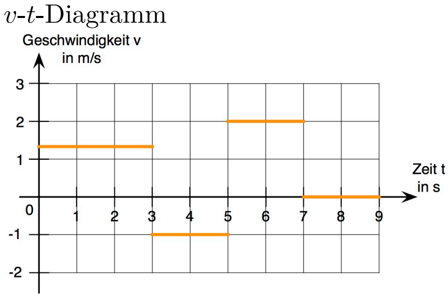
s-t-Diagramm



s-t-Diagramm



v-t-Diagramm



Lösung

a)

Bereich I, $t \in [0, 3]$ s:

$$v_{\mathrm{I}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3} = 1,33 \text{ m/s}$$

Der Körper bewegt sich vorwärts.
Bereich II, $t \in [3, 5]$ s:

$$v_{\mathrm{II}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{3-4}{4-3} = \frac{-1}{1} = -1 \text{ m/s}$$

Der Körper bewegt sich rückwärts.
Bereich III, $t \in [5, 7]$ s:

$$v_{\mathrm{III}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{6-4}{7-6} = \frac{2}{1} = 2 \text{ m/s}$$

Der Körper bewegt sich vorwärts.
Bereich IV, $t \in [7, 9]$ s:

$$v_{\mathrm{IV}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{6-6}{8-7} = \frac{0}{1} = 0 \text{ m/s}$$

Der Körper bewegt sich nicht (Stillstand).

b)

Die Geschwindigkeiten in den einzelnen Bereichen sind konstant. Es ergibt sich das nebenstehende v-t-Diagramm.

3.1.3 Die Beschleunigung

Im *Beispiel (3.4)* wird deutlich, dass die Geschwindigkeit eines Körpers (die Steigung der Kurve) nicht immer gleich sein muß. Sie kann sich auch ändern. Dies wird durch die Beschleunigung beschrieben. Wichtig ist dabei, wie stark sich die Geschwindigkeit in einer gewissen Zeit ändert. Wir definieren daher:

Die Änderung der Geschwindigkeit Δv pro Zeiteinheit Δt nennt man Beschleunigung a.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{3.3}$$

Eine positive Beschleunigung ($a > 0$) bedeutet eine schneller werdende Bewegung, eine negative Beschleunigung ($a < 0$) bedeutet eine langsamer werdende Bewegung (Bremsen), und Beschleunigung gleich Null ($a = 0$) bedeutet konstante Geschwindigkeit.

Einheit: $[a] = [\frac{\Delta v}{\Delta t}] = \frac{\text{m/s}}{\text{s}} = \text{m/s}^2 = \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ Meter pro Sek. pro Sek. = Meter pro Sekunde Quadrat

Für Berechnungen von Beschleunigungen eignet sich die folgende Formel besser:

Wenn ein Körper zum Zeitpunkt t_1 die Geschwindigkeit v_1 hat und zum Zeitpunkt t_2 die Geschwindigkeit v_2, so ist seine (mittlere) Beschleunigung a die Änderung der Geschwindigkeit $\Delta v = v_2 - v_1$ pro Zeitänderung $\Delta t = t_2 - t_1$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \tag{3.4}$$

Die Beschleunigung kann auch mit einem Steigungsdreieck im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm dargestellt werden. Dazu zeichnet man im v-t-Diagramm in der Zeitrichtung eine Einheit nach rechts und geht dann die Beschleunigung (Steigung) nach oben oder nach unten (je nach Vorzeichen der Beschleunigung).

Der zeitliche Verlauf der Beschleunigung kann in ein a-t-Diagramm eingezeichnet werden.

Beispiel (3.6)

Die Bewegung eines Körpers wird aufgezeichnet: zum Zeitpunkt $t_1 = 3$ s hat er die Geschwindigkeit $v_1 = 6$ m/s, zur Zeit $t_2 = 5$ s hat er $v_2 = 10$ m/s und zum Zeitpunkt $t_3 = 7$ s hat er $v_3 = 14$ m/s.
a) Zeichnen Sie ein v-t-Diagramm der Bewegung!
b) Berechnen Sie die Beschleunigung des Körpers von t_1 nach t_2 und von t_2 nach t_3 und zeichnen Sie ein a-t-Diagramm!

Lösung

Die Beschleunigung zwischen t_1 und t_2 ist

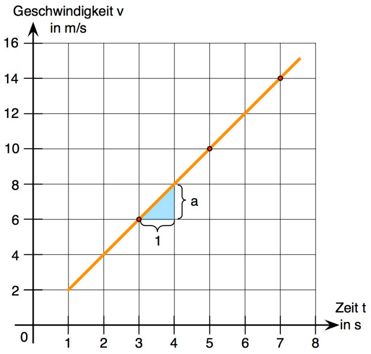
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{10 - 6}{5 - 3} = \frac{4}{2} = 2 \text{ m/s}^2$$

Die Beschleunigung zwischen t_2 und t_3 ist

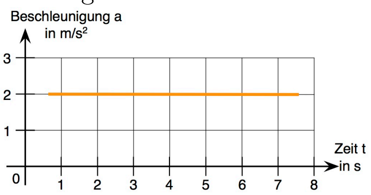
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2} = \frac{14 - 10}{7 - 5} = \frac{4}{2} = 2 \text{ m/s}^2$$

Die Beschleunigung a ist konstant und positiv, d.h. der Körper wird schneller. In der Graphik ist auch ein Steigungsdreieck für die Beschleunigung eingezeichnet.

v-t-Diagramm



a-t-Diagramm



Beispiel (3.7)

Die Bewegung eines Körpers ist folgendermaßen: bei $t_1 = 2$ s hat er die Geschwindigkeit $v_1 = 20$ m/s, bei $t_2 = 5$ s hat er die Geschwindigkeit $v_2 = 5$ m/s.
a) Zeichnen Sie ein v-t-Diagramm der Bewegung!
b) Berechnen Sie die Beschleunigung des Körpers von t_1 nach t_2 und zeichnen Sie ein a-t-Diagramm!

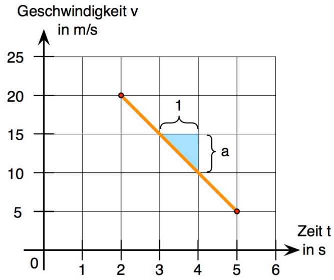
Lösung

Die Beschleunigung ist

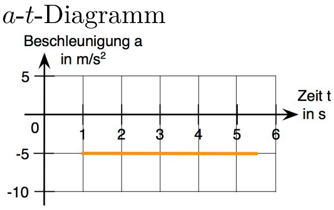
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{5 - 20}{5 - 2} = \frac{-15}{3} = -5 \text{ m/s}^2$$

Die Beschleunigung a ist konstant und negativ, d.h. der Körper wird langsamer! Der Körper wird gebremst. Das Steigungsdreieck zeigt diese negative Beschleunigung an.

v-t-Diagramm



a-t-Diagramm



3.2 Die gleichförmige Bewegung

3.2.1 Allgemeine Beschreibung

Eine besondere Art einer Bewegung ist die gleichförmige Bewegung.

Eine gleichförmige Bewegung ist eine geradlinige Bewegung, bei der die Beschleunigung gleich Null ist

$$a(t) = 0 \tag{3.5}$$

Die Geschwindigkeit verändert sich daher nicht (die Geschwindigkeit ist konstant)

$$v(t) = v = \text{const} \tag{3.6}$$

Der zurückgelegte Weg ist linear von der Zeit t abhängig und gegeben durch

$$s(t) = s_0 + v \cdot t \tag{3.7}$$

wobei s_0 der Anfangsweg ist.

Die Gleichungen (3.5), (3.6), (3.7) heißen Bewegungsgleichungen der gleichförmigen Bewegung.

Beispiele für gleichförmige Bewegungen sind ein Auto oder ein Zug, die mit konstanter Geschwindigkeit auf einer geraden Strecke fahren, die Bewegung einer stehenden Person auf einer Rolltreppe oder die Bewegung eines mit bestimmter Geschwindigkeit fliegenden Flugzeuges auf gerader Strecke.

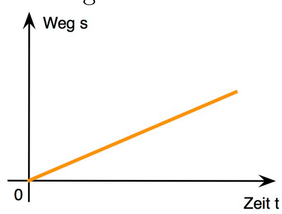
3.2.2 Graphische Darstellung

Die gleichförmige Bewegung kann graphisch dargestellt werden.

- Weg-Zeit-Diagramm (s-t-Diagramm):
  Das Zeit-Weg-Diagramm der gleichförmigen Bewegung ist eine Gerade. Die Steigung der Geraden entspricht der Geschwindigkeit v der Bewegung.
  $s(t) = s_0 + v \cdot t$
  Der Anfangsweg s_0 kann auch gleich Null gesetzt werden. Dies bewirkt nur eine vertikale Verschiebung der Geraden (wie im zweiten Bild).

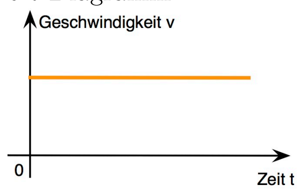
s-t-Diagramm

s-t-Diagramm



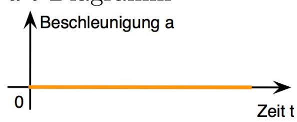
- Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm (v-t-Diagramm):
  Das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm ist eine waagrechte Gerade (keine Steigung).
  $v(t) = v = \text{const}$

v-t-Diagramm



- Beschleunigung-Zeit-Diagramm (a-t-Diagramm):
  Das Beschleunigung-Zeit-Diagramm ist eine waagrechte Gerade durch Null (keine Steigung).
  $a(t) = 0$

a-t-Diagramm

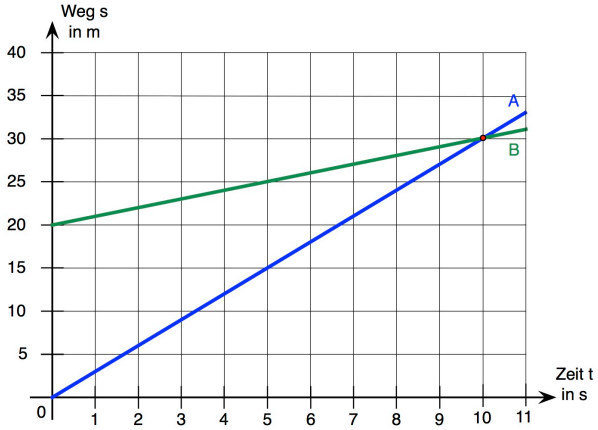


Beispiel (3.8)

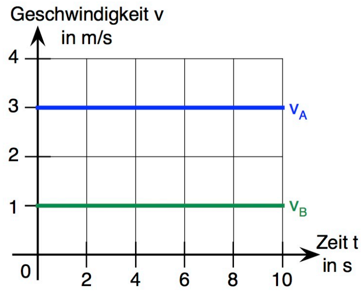
Zwei Körper bewegen sich auf einer Linie. Körper A startet am Nullpunkt mit der Geschwindigkeit $v_A = 3$ m/s, Körper B hat einen Vorsprung von 20 m und startet gleichzeitig mit $v_B = 1$ m/s.
a) Zeichnen Sie ein Weg-Zeit-Diagramm und ein Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm der beiden Bewegungen!
b) Geben Sie die Bewegungsgleichungen für beide Körper an!
c) Berechnen Sie, wann und wo der Körper A den Körper B überholt!
d) Berechnen Sie, wieviel Weg Körper A und B jeweils bis zum Treffpunkt zurück gelegt haben!

Lösung

a) Weg-Zeit-Diagramm



Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm:



b) Bewegungsgleichung für Körper A:

$$s_A(t) = s_0 + v_A \cdot t = 0 + 3 \cdot t = 3 \cdot t$$

Bewegungsgleichung für Körper B:

$$s_B(t) = s_0 + v_B \cdot t = 20 + 1 \cdot t$$

c) Der Treffpunkt ergibt sich durch gleichsetzen der beiden Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} s_A(t) &= s_B(t) \\ 3 \cdot t &= 20 + 1 \cdot t \qquad |-1 \cdot t \\ 2 \cdot t &= 20 \\ t &= 10 \text{ s} \end{aligned}$$

Der Treffpunkt ist also bei ($t = 10$ s $|s = 30$ m).

d) Körper A startet am Nullpunkt und muß daher auch die gesamten 30 m bis zum Treffpunkt zurücklegen. Körper B startet bei $s_0 = 20$ m und muß daher nur 10 m bis zum Treffpunkt zurücklegen.

Beispiel (3.9)

Zwei Körper bewegen sich auf einer Linie. Körper A startet am Nullpunkt mit der Geschwindigkeit $v_A = 5$ m/s, Körper B startet gleichzeitig in einer Entfernung von 100 m und kommt dem Körper A mit 15 m/s entgegen.

a) Zeichnen Sie ein Weg-Zeit-Diagramm und ein Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm der beiden Bewegungen!

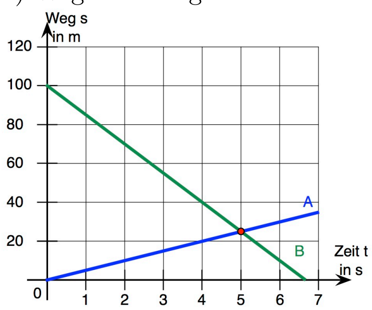
b) Geben Sie die Bewegungsgleichungen für beide Körper an!

c) Berechnen Sie, wann und wo der Körper A den Körper B trifft!

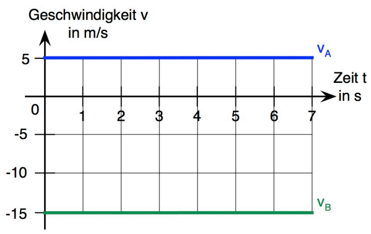
d) Berechnen Sie, wieviel Weg Körper A und B jeweils bis zum Treffpunkt zurück gelegt haben!

Lösung

a) Weg-Zeit-Diagramm



Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm:



b) Bewegungsgleichung für Körper A:

$$s_A(t) = s_0 + v_A \cdot t = 0 + 5 \cdot t = 5 \cdot t$$

Bewegungsgleichung für Körper B:

$$s_B(t) = s_0 + v_B \cdot t = 100 - 15 \cdot t$$

Hier ist die Geschwindigkeit von B negativ zu nehmen, da er sich rückwärts bewegt.

c) Der Treffpunkt ergibt sich durch gleichsetzen der beiden Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} s_A(t) &= s_B(t) \\ 5 \cdot t &= 100 - 15 \cdot t \qquad |+15 \cdot t \\ 20 \cdot t &= 100 \\ t &= 5\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Der Treffpunkt ist also bei ($t = 5$ s $|s = 25$ m).

d) Körper A startet am Nullpunkt und muß daher auch die gesamten 25 m bis zum Treffpunkt zurücklegen. Körper B startet bei $s_0 = 100$ m und bewegt sich rückwärts und muß daher $100 - 25 = 75$ m bis zum Treffpunkt zurücklegen.

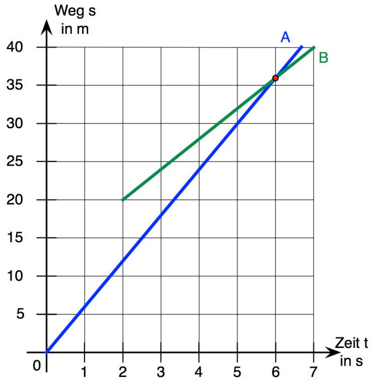
Beispiel (3.10)

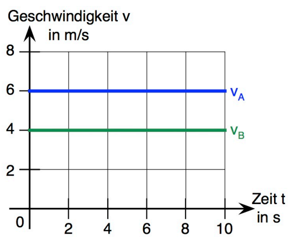
Körper A startet in $t = 0$ am Nullpunkt und bewegt sich mit $v_A = 6$m/s. Körper B startet 2 Sekunden später und 20 m vor A und bewegt sich mit $v_B = 4$m/s.

a) Zeichnen Sie ein Weg-Zeit-Diagramm und ein Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm der beiden Bewegungen!
b) Geben Sie die Bewegungsgleichungen für beide Körper an!
c) Berechnen Sie, wann und wo der Körper A den Körper B überholt!
d) Berechnen Sie, wie weit Körper A und B zum Zeitpunkt $t = 5$s vom Nullpunkt entfernt sind!

Lösung

a) Weg-Zeit-Diagramm Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm:





b) Bewegungsgleichung für Körper A:

$$s_A(t) = s_0 + v_A \cdot t = 0 + 6 \cdot t = 6 \cdot t$$

Bewegungsgleichung für Körper B:

$$s_B(t) = s_0 + v_B \cdot t = 20 + 4 \cdot (t - 2) = 20 + 4 \cdot t - 8 = 12 + 4 \cdot t$$

Hier wird bei der Zeit des zweiten Körpers die spätere Startzeit abgezogen, denn wenn Körper A z.B. 3 Sekunden unterwegs ist, so ist Körper B erst 1 Sekunde unterwegs, also $t - 2$ Sekunden.

c) Der Überholpunkt ergibt sich durch gleichsetzen der beiden Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} s_A(t) &= s_B(t) \\ 6 \cdot t &= 12 + 4 \cdot t \qquad |-4 \cdot t \\ 2 \cdot t &= 12 \\ t &= 6\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Der Treffpunkt ist also bei ($t = 6$ s $|s = 36$ m).

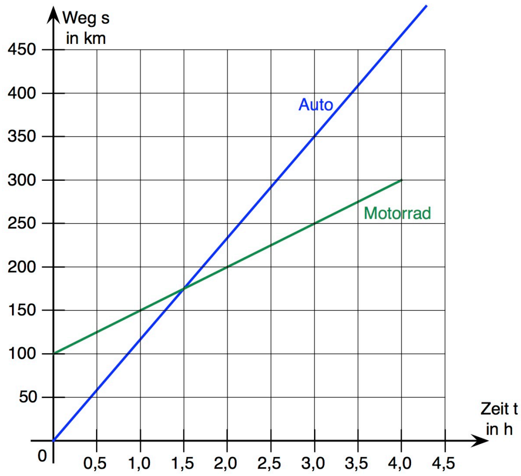
d) Wir setzen den Zeitpunkt $t = 5$ in beide Bewegungsgleichungen ein:

$$\begin{aligned} s_A(t) &= 6 \cdot t = 6 \cdot 5 = 30 \text{ m} \\ s_B(t) &= 12 + 4 \cdot t = 12 + 4 \cdot 5 = 32 \text{ m} \end{aligned}$$

Körper A befindet sich also noch 2 m hinter B.

Beispiel (3.11)

Ein Motorrad und ein Auto fahren auf einer Autobahn mit konstanter Geschwindigkeit in die gleiche Richtung. Das Motorrad hat zum Zeitpunkt $t = 0$ einen Vorsprung von s_0. Die Bewegung der beiden ist im s-t-Diagramm dargestellt.
a) Bestimmen Sie den Vorsprung des Motorrades zum Zeitpunkt $t = 0$ aus dem Diagramm!
b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Autos und des Motorrads aus dem Diagramm!
c) Bestimmen Sie die Gleichung $s(t)$ für beide Fahrzeuge (Bewegungsgleichung)
d) Wann und wo überholt das Auto den Motorradfahrer? (Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden!)
e) Wie weit sind beide nach 2,5 h voneinander entfernt?



Lösung

a) Der Vorsprung des Motorrads ergibt sich aus dem Achsenabschnitt auf der s-Achse zum Zeitpunkt $t = 0$ und beträgt $s_0^M = 100$ km.
b) Um die Geschwindigkeit zu bestimmen, kann man die Formel $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ verwenden. Man muß nur zwei (beliebige) Punkte auf der jeweiligen Gerade verwenden.
Auto: wir verwenden z.B. die Punkte ($t_1^A = 0$ h / $s_1^A = 0$ km) und ($t_2^A = 3,0$ h / $s_2^A = 350$ km):

$$v^A = \frac{\Delta s}{\Delta t} = v = \frac{s_2^A - s_1^A}{t_2^A - t_1^A} = \frac{350 - 0}{3,0 - 0} = 116,67 \text{ km/h} = 32,4 \text{ m/s}$$

Motorrad: wir verwenden z.B. die Punkte ($t_1^M = 0$ h / $s_1^M = 100$ km) und ($t_2^M = 3,0$ h / $s_2^M = 250$ km):

$$v^M = \frac{\Delta s}{\Delta t} = v = \frac{s_2^A - s_1^A}{t_2^A - t_1^A} = \frac{250 - 100}{3,0 - 0} = 50 \text{ km/h} = 13,89 \text{ m/s}$$

c) Die Bewegungsgleichung für das Auto lautet:

$$s^A(t) = s_0^A + v^A \cdot t = 0 + 116,67 \cdot t$$

und für das Motorrad:

$$s^M(t) = s_0^M + v^M \cdot t = 100 + 50 \cdot t$$

d) Der Treffpunkt errechnet sich durch Gleichsetzen der beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} s^A(t) &= s^M(t) \\ 116,67 \cdot t &= 100 + 50 \cdot t \\ t &= 1,5 \text{ h} \end{aligned}$$

Die beiden treffen sich nach $t = 1,5$ Stunden.
Die Entfernung des Treffpunkts vom Ursprung ergibt sich durch Einsetzen in eine der beiden Bewegungsgleichungen:

$$s^A(t = 1,5) = 116,67 \cdot 1,5 = 175 \text{ km}$$

Das Auto legt bis zum Treffpunkt 175 km zurück, das Motorrad aber nur 75 km.

e) Wir setzen in beide Gleichungen $t = 2,5$ h ein:

$$\begin{aligned} s^A(t) &= 116,67 \cdot 2,5 = 291,67 \text{ km} \\ s^M(t) &= 100 + 50 \cdot 2,5 = 225 \text{ km} \end{aligned}$$

Die Differenz ergibt den Abstand a der beiden:

$$a = s^A(t) - s^M(t) = 291,67 - 225 = 66,67 \text{ km}$$

Nach 2,5 h sind sie 66,67 km voneinander entfernt.

3.3 Die gleichmäßig beschleunigte Bewegung

3.3.1 Allgemeine Beschreibung

Eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung ist eine geradlinige Bewegung, bei der sich die Beschleunigung nicht ändert (sie ist konstant)

$$a(t) = a = \text{const} \tag{3.8}$$

Die Geschwindigkeit ändert dabei linear

$$v(t) = v_0 + a \cdot t \tag{3.9}$$

mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0. Der zurückgelegte Weg ist gegeben durch

$$s(t) = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} \tag{3.10}$$

mit dem Anfangsweg s_0.

Die Gleichungen (3.8), (3.9), (3.10) heißen Bewegungsgleichungen der gleichmäßig beschleunigten Bewegung.

Beispiele für eine gleichmäßig bescheunigte Bewegung sind der freie Fall und die Wurfbewegungen, ein Auto, das mit konstanter Beschleunigung auf einer geraden Strecke fährt oder ein gleichmäßig abbremsendes Auto auf einer geraden Strecke .

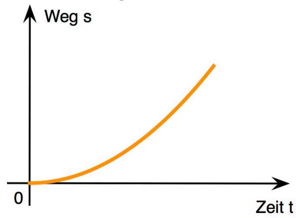
3.3.2 Graphische Darstellung

Die gleichmäßig beschleunigte Bewegung kann graphisch dargestellt werden.
Für die positive Beschleunigung ($a > 0$) ergibt sich:

- Weg-Zeit-Diagramm (s-t-Diagramm):
  Das Zeit-Weg-Diagramm der gleichmäßig beschleunigten Bewegung ist eine gekrümmte Kurve. Die Steigung der Kurve in jedem Punkt t entspricht der momentanen Geschwindigkeit $v(t)$ der Bewegung (Steigung der Tangente im Zeitpunkt t).
  $s(t) = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$
  Der Anfangsweg s_0 kann auch Null gesetzt werden. Dies bewirkt nur eine vertikale Verschiebung der Kurve (wie im zweiten Bild).

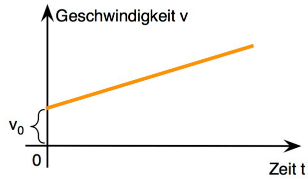
s-t-Diagramm

s-t-Diagramm

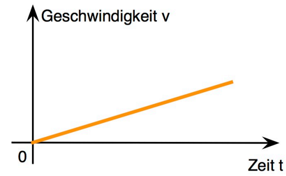


- Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm (v-t-Diagramm):
  Das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm ist eine Gerade. Die Steigung der Geraden entspricht der Beschleunigung $a > 0$ der Bewegung.
  $v(t) = v_0 + a \cdot t$
  Wenn die Anfangsgeschwindigkeit v_0 gleich Null ist, so bewirkt dies eine vertikale Verschiebung der Gerade (wie im zweiten Bild).

v-t-Diagramm

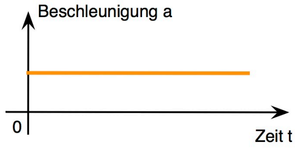


v-t-Diagramm



- Beschleunigung-Zeit-Diagramm (a-t-Diagramm):
  Das Beschleunigung-Zeit-Diagramm ist eine waagrechte Gerade (keine Steigung).
  $a(t) = a = \text{const} > 0$

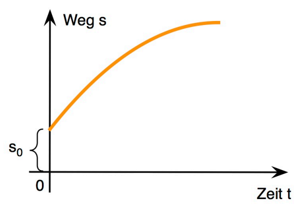
a-t-Diagramm



Für die negative Beschleunigung (Bremsen) ($a > 0$) ergibt sich:

- Weg-Zeit-Diagramm (s-t-Diagramm):
  Das Zeit-Weg-Diagramm der gleichmäßig beschleunigten Bewegung ist eine gekrümmte Kurve. Die Steigung der Kurve in jedem Punkt t entspricht der momentanen Geschwindigkeit $v(t)$ der Bewegung (Steigung der Tangente im Zeitpunkt t).
  $s(t) = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$
  Der Anfangsweg s_0 kann auch Null gesetzt werden. Dies bewirkt nur eine vertikale Verschiebung der Kurve (wie im zweiten Bild).

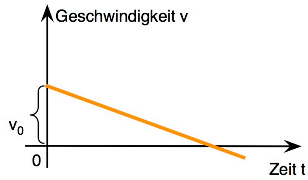
s-t-Diagramm



s-t-Diagramm

- Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm (v-t-Diagramm):
  Das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm ist eine Gerade. Die Steigung der Geraden entspricht der negativen Beschleunigung $a < 0$ der Bewegung.
  $v(t) = v_0 + a \cdot t$
  Wenn die Anfangsgeschwindigkeit v_0 gleich Null ist, so bewirkt dies eine vertikale Verschiebung der Gerade (wie im zweiten Bild).

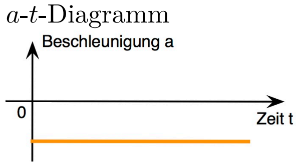
v-t-Diagramm



v-t-Diagramm

- Beschleunigung-Zeit-Diagramm (a-t-Diagramm):
  Das Beschleunigung-Zeit-Diagramm ist eine waagrechte Gerade (keine Steigung) mit negativem Wert.
  $a(t) = a = \text{const} < 0$

a-t-Diagramm

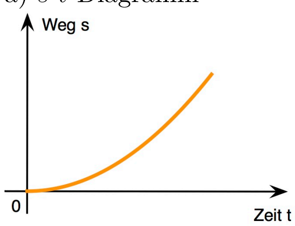


Beispiel (3.12)

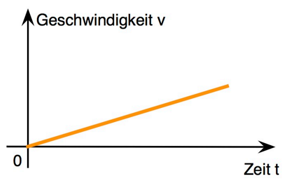
Ein Motorradfahrer beschleunigt gleichmäßig aus dem Stillstand mit der Beschleunigung von 0,8 m/s^2.
a) Zeichnen Sie ein Weg-Zeit-Diagramm, ein Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm und ein Beschleunigung-Zeit-Diagramm der Bewegung!
b) Geben Sie die Bewegungsgleichungen an!
c) Berechnen Sie, wie lange der Motorradfahrer für die Strecke von 0,85 km braucht! Wie groß ist seine Geschwindigkeit am Ende der gefahrenen Strecke?

Lösung

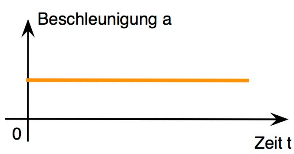
a) s-t-Diagramm



v-t-Diagramm



a-t-Diagramm:



b) es gilt: $v_0 = 0$, $s_0 = 0$
Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} s(t) &= s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} = 0 + 0 \cdot t + \frac{0,8 \cdot t^2}{2} = 0,4 \cdot t^2 \\ v(t) &= v_0 + a \cdot t = 0 + 0,8 \cdot t = 0,8 \cdot t \\ a(t) &= 0,8 \end{aligned}$$

c) aus der ersten Bewegungsgleichung folgt für die Zeit:

$$\begin{aligned} s(t) &= s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} = \frac{a \cdot t^2}{2} \\ \Longrightarrow \quad t &= \sqrt{\frac{2 \cdot s(t)}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 850}{0,8}} = 46,1 \text{ s} \end{aligned}$$

mit der zweiten Bewegungsgleichung berechnet man die Geschwindigkeit

$$v(t) = 0,8 \cdot t = 0,8 \cdot 46,1 = 36,88 \text{ m/s} = 132,77 \text{ km/h}$$

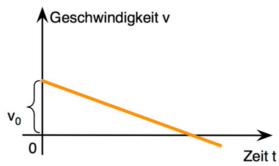
Beispiel (3.13)

Ein Auto fährt mit der Geschwindigkeit von 108 km/h. Für ein Hindernis bremst es gleichmäßig mit der Beschleunigung von $a = -1,6$ m/s^2.
a) Zeichnen Sie ein Weg-Zeit-Diagramm, ein Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm und ein Beschleunigung-Zeit-Diagramm der Bewegung!
b) Geben Sie die Bewegungsgleichungen an!
c) Nach welcher Zeit kommt das Auto zum Stillstand? Wie lang ist der zurückgelegte Weg (=Bremsweg)?

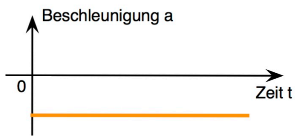
Lösung

a) s-t-Diagramm

v-t-Diagramm



a-t-Diagramm:



b) es gilt: $v_0 = 108$ km/h $= 30$ m/s, $s_0 = 0$
Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} s(t) &= s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} = 0 + 30 \cdot t - \frac{1,6 \cdot t^2}{2} = 30 \cdot t - 0,8 \cdot t^2 \\ v(t) &= v_0 + a \cdot t = 30 - 1,6 \cdot t \\ a(t) &= -1,6 \end{aligned}$$

c) Stillstand bedeutet $v(t) = 0$
aus der zweiten Bewegungsgleichung können wir die Zeit berechnen

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + a \cdot t \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{v(t) - v_0}{a} \\ 0 &= 30 - 1,6 \cdot t \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{0 - 30}{-1,6} = 18,75 \text{ s} \end{aligned}$$

Der Bremsweg ergibt sich aus der ersten Bewegungsgleichung

$$s(t) = 30 \cdot t - 0,8 \cdot t^2 = 30 \cdot 18,75 - 0,8 \cdot 18,75^2 = 281,25 \text{ m}$$

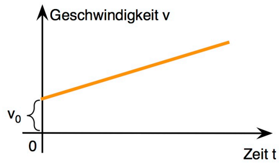
Beispiel (3.14)

Ein Auto hat jetzt die Geschwindigkeit 20 m/s und beschleunigt gleichmäßig. Nach 90 m hat es die Geschwindigkeit 40 m/s erreicht.
a) Zeichnen Sie ein Weg-Zeit-Diagramm, ein Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm und ein Beschleunigung-Zeit-Diagramm der Bewegung!
b) Geben Sie die Bewegungsgleichungen an!
c) Bestimmen Sie die Beschleunigung und die Zeit, die das Auto für diese 90 m benötigt!

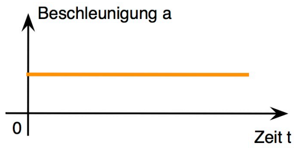
Lösung

a) s-t-Diagramm

v-t-Diagramm



a-t-Diagramm:



b) es gilt: $v_0 = 20$, $s_0 = 0$
Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} s(t) &= s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} = 0 + 20 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} \\ v(t) &= v_0 + a \cdot t = 20 + a \cdot t \\ a(t) &= a \end{aligned}$$

c) Es gilt: $v(t) = 40$ m/s. Aus der zweiten Bewegungsgleichung bestimmt man:

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + a \cdot t & \Longrightarrow \quad & a \cdot t = v(t) - v_0 \\ 40 &= 20 + a \cdot t & \Longrightarrow \quad & a \cdot t = 40 - 20 = 20 \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis setzen wir in die erste Bewegungsgleichung ein:

$$\begin{aligned} s(t) &= 20 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} = 20 \cdot t + \frac{a \cdot t \cdot t}{2} \\ 90 &= 20 \cdot t + \frac{20 \cdot t}{2} = 20 \cdot t + 10 \cdot t = 30 \cdot t \\ t &= 3 \text{ s} \\ a &= \frac{20}{t} = \frac{20}{3} = 6,67 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Allgemein gilt:
Aus der Bewegungsgleichung für die Geschwindigkeit kann man verschiedene Größen ausdrücken

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + a \cdot t \\ & \Longrightarrow \quad a \cdot t = v(t) - v_0 \\ & \Longrightarrow \quad a = \frac{v(t) - v_0}{t} \\ & \Longrightarrow \quad t = \frac{v(t) - v_0}{a} \end{aligned}$$

die dann in die Bewegungsgleichung für den Weg eingesetzt werden

$$\begin{aligned} s(t) = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} &= v_0 \cdot t + \frac{(v(t) - v_0) \cdot t}{2} = \frac{(v(t) + v_0) \cdot t}{2} \\ \Longrightarrow \qquad t &= \frac{2 \cdot s(t)}{v(t) + v_0} \\ s(t) = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} &= v_0 \cdot \frac{v(t) - v_0}{a} + \frac{a \cdot (v(t) - v_0)^2}{2 \cdot a^2} = \frac{v(t)^2 - v_0^2}{2 \cdot a} \\ \Longrightarrow \qquad a &= \frac{v(t)^2 - v_0^2}{2 \cdot s(t)} \end{aligned}$$

Diese Formeln dienen nur der schnellen Kontrolle. Man sollte auf jeden Fall wissen, woher sie kommen!!

3.4 Fall- und Wurfbewegungen

3.4.1 Der freie Fall im Vakuum

Eine Fallbewegung wird als “frei” bezeichnet, wenn der Körper die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ hat und nur durch die Schwerkraft der Erde beschleunigt wird und nicht durch Reibung – z.B. mit Luft – gebremst wird. Es gilt:

Alle Körper fallen im Vakuum gleich schnell. Die Fallbewegung ist eine gleichförmig beschleunigte Bewegung. Die Beschleunigung $a = g$ dieser Bewegung heißt Erdbeschleunigung oder Fallbeschleunigung und hat auf der Erdoberfläche den Wert

$$g = 9{,}81 \text{ m/s}^2 \approx 10 \text{ m/s}^2 \tag{3.11}$$

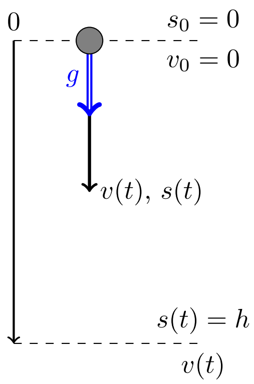
Einfaches Koordinatensystem

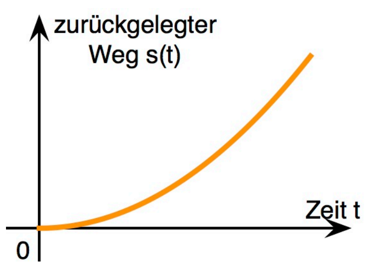
- Die Bewegung des freien Falls ist nach unten gerichtet.
- Wir zählen alle Größen, die nach unten gerichtet sind, positiv, damit wir einfachere Formeln bekommen.
- Der Weg heißt zurückgelegter Weg und hat das Symbol $s(t)$. Der Anfangsweg ist gleich Null $s_0 = 0$.
- Die Anfangsgeschwindigkeit ist Null, $v_0 = 0$ (wir lassen den Körper einfach nur los).
- Die Beschleunigung ist nach unten gerichtet und beträgt g.

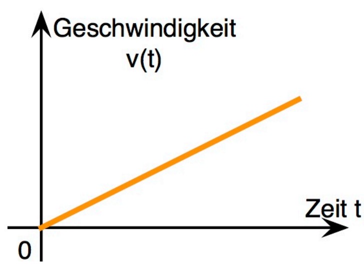
Die Bewegungsgleichungen lauten dann:

$$v(t) = g \cdot t \tag{3.12}$$

$$s(t) = \frac{g \cdot t^2}{2} \tag{3.13}$$







Die **Fallzeit** t_{fall} ist die Zeit, die ein Körper braucht, um eine bestimmte Höhe h zu durchfallen oder den Weg h zurückzulegen. Man berechnet sie aus der Bewegungsgleichung für den Weg, wenn man für $s(t) = h$ einsetzt und umformt:

$$s(t) = h = \frac{g \cdot t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t_{\text{fall}} = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$$

Die **Fallgeschwindigkeit** v_h ist die Geschwindigkeit, die der Körper nach dem Durchfallen der Höhe h erreicht. Sie ergibt sich aus der Bewegungsgleichung für die Geschwindigkeit, wenn man die Fallzeit einsetzt:

$$v_h = g \cdot t_{\text{fall}} \quad \Rightarrow \quad v_h = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Anderes Koordinatensystem

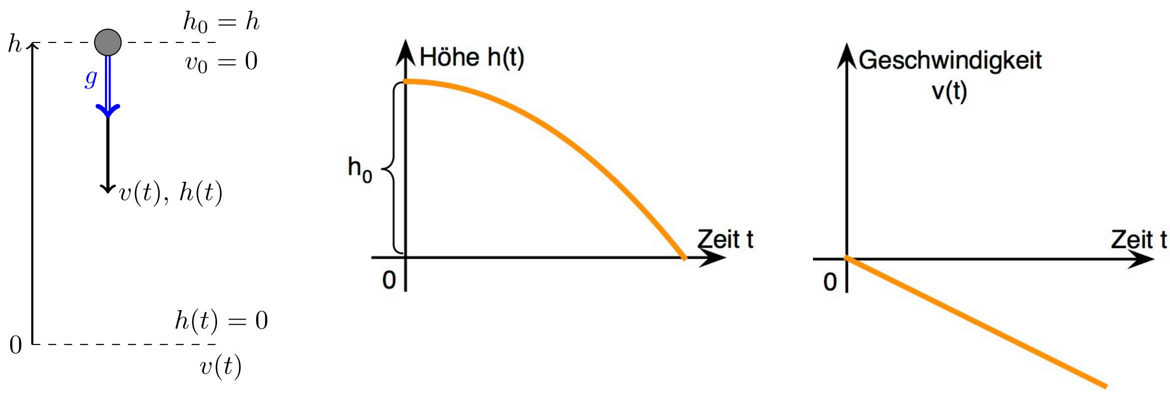
Der freie Fall kann auch noch in einem anderen Koordinatensystem behandelt werden. Dabei wird der Weg nach oben positiv gezählt.

- Die Bewegung des freien Falls ist nach unten gerichtet.
- Wir zählen alle Größen, die nach oben gerichtet sind, positiv.
- Der Weg heißt Höhe und hat das Symbol $h(t)$. Der Anfangsweg ist gleich der Höhe, aus der ein Körper fallen gelassen wird, $h_0 = h$.
- Die Anfangsgeschwindigkeit ist Null, $v_0 = 0$ (wir lassen den Körper einfach nur los).
- Die Beschleunigung g zeigt nach unten und erhält deshalb ein Minus.

Die Bewegungsgleichungen lauten dann:

$$v(t) = -g \cdot t \tag{3.14}$$

$$h(t) = h_0 - \frac{g \cdot t^2}{2} \tag{3.15}$$



Beispiel (3.15)

Der Italiener Galileo Galilei hat Fallversuche am Schiefen Turm von Pisa ausgeführt. Der Turm ist 55 m hoch.
a) Wie lange dauert es, bis ein oben losgelassener Stein den Boden berührt?
b) Aus welcher Höhe wurde ein Stein losgelassen, der nach 2,5 s auf dem Boden aufschlägt?

Lösung

a) Wir verwenden die Formel für die Fallzeit

$$t_{\text{fall}} = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 55}{10}} = \sqrt{11} = 3,3 \text{ s}$$

Es dauert 3,3 Sekunden, bis der Stein am Boden ist.
b) Hier können wir die Formel für den zurückgelegten Weg verwenden

$$s(t) = \frac{g \cdot t^2}{2} = \frac{10 \cdot 2,5^2}{2} = 31,25 \text{ m}$$

Der Stein wurde aus einer Höhe von 31,25 m fallen gelassen.

3.4.2 Der vertikale Wurf nach oben

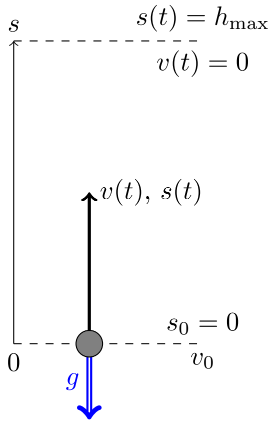
Ein Körper wird im Vakuum mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 \neq 0$ vertikal (senkrecht) nach oben geworfen. Zugleich wird er von der Schwerkraft nach unten gezogen.

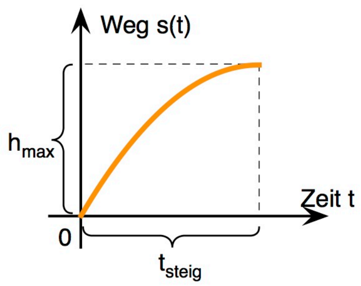
- Die gesamte Bewegung ist eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung nach oben.
- Wir zählen alle Größen, die nach oben gerichtet sind, als positiv. Größen nach unten bekommen ein negatives Vorzeichen.
- Der Weg heißt zurückgelegter Weg und hat das Symbol $s(t)$. Der Anfangsweg ist gleich Null $s_0 = 0$.
- Die Anfangsgeschwindigkeit ist nach oben gerichtet und beträgt v_0.
- Die Beschleunigung ist nach unten gerichtet und beträgt g.

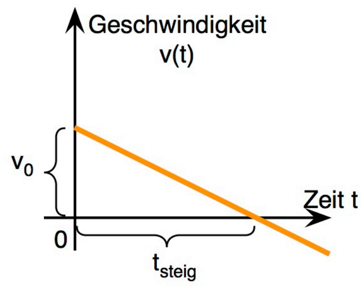
Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$v(t) = v_0 - g \cdot t \tag{3.16}$$

$$s(t) = v_0 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} \tag{3.17}$$







Die Geschwindigkeit nimmt nach oben hin immer weiter ab, bis sie am höchsten Punkt ($h_{\max}$) gleich Null ist. Dann kehrt die Geschwingigkeit die Richtung um und nimmt langsam wieder zu.

Die **Steigzeit** t_{steig} ist die Zeit, die der Körper braucht um den höchsten Punkt zu erreichen. Dazu setzen wir in der Bewegungsgleichung die Geschwindigkeit gleich Null $v(t) = 0$ und formen um:

$$v(t) = 0 = v_0 + a \cdot t = v_0 - g \cdot t \quad \Rightarrow \quad t_{\text{steig}} = \frac{v_0}{g}$$

Die **Steighöhe** $h_{\max}$ ist die Höhe bis zu der der Körper sich nach oben bewegt. Sie ergibt sich aus der Bewegungsgleichung für den Weg, wenn man die Steigzeit einsetzt:

$$h_{\max} = v_0 \cdot t_{\text{steig}} - \frac{g \cdot t_{\text{steig}}^2}{2} = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{g \cdot (\frac{v_0}{g})^2}{2} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Beispiel (3.16)

Ein Ball wird mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 25$ m/s senkrecht nach oben geworfen.
a) Welche maximale Höhe erreicht der Ball?
b) Wie lange steigt der Ball nach oben?
c) Berechnen Sie die Höhe des Balls nach 1 Sekunde, 2 Sekunden, 3 Sekunden, 4 Sekunden und 5 Sekunden und die jeweiligen Geschwindigkeiten!

Lösung

a) Die maximale Höhe errechnet sich aus der Formel

$$h_{\text{max}} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{25^2}{2 \cdot 10} = 31,25 \text{ m}$$

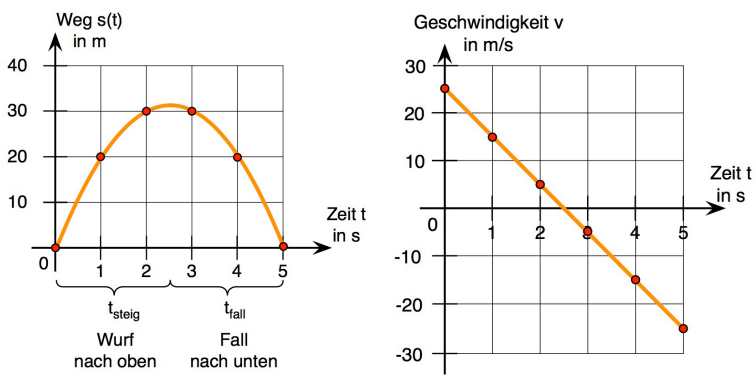
b) Für die Steigzeit verwenden wir auch die Formel

$$t_{\text{steig}} = \frac{v_0}{g} = \frac{25}{10} = 2,5 \text{ s}$$

c) Wir verwenden die Bewegungsgleichung für den Weg und die Geschwindigkeit und setzen die jeweiligen Zeiten ein

$$\begin{aligned}
s(t) &= v_0 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} & v(t) &= v_0 - g \cdot t \\
s(t=1) &= 25 \cdot 1 - \frac{10 \cdot 1^2}{2} = 20 \text{ m} & v(t) &= 25 - 10 \cdot 1 = 15 \text{ m/s} \\
s(t=2) &= 25 \cdot 2 - \frac{10 \cdot 2^2}{2} = 30 \text{ m} & v(t) &= 25 - 10 \cdot 2 = 5 \text{ m/s} \\
s(t=3) &= 25 \cdot 3 - \frac{10 \cdot 3^2}{2} = 30 \text{ m} & v(t) &= 25 - 10 \cdot 3 = -5 \text{ m/s} \\
s(t=4) &= 25 \cdot 4 - \frac{10 \cdot 4^2}{2} = 20 \text{ m} & v(t) &= 25 - 10 \cdot 4 = -15 \text{ m/s} \\
s(t=5) &= 25 \cdot 5 - \frac{10 \cdot 5^2}{2} = 0 \text{ m} & v(t) &= 25 - 10 \cdot 5 = -25 \text{ m/s}
\end{aligned}$$

In den Diagrammen werden die berechneten Werte klar. An die Wurfbewegung nach oben schließt sich eine dazu symmetrische Fallbewegung nach unten an.

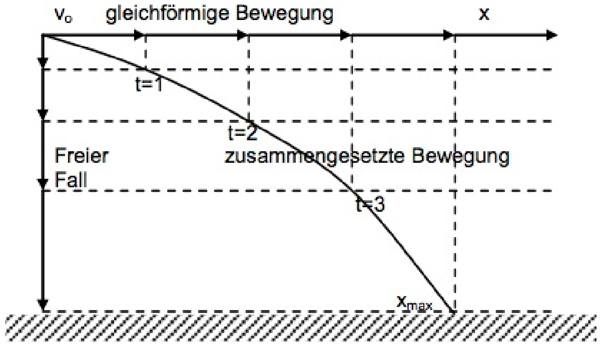


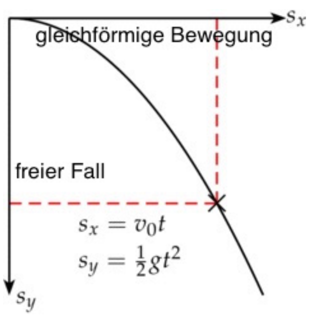
3.4.3 Der horizontale Wurf

Es gilt der Satz von der unabhängigen Überlagerung von Bewegungen:

Führt ein Körper gleichzeitig mehrere Teilbewegungen aus, so überlagern sich diese Teilbewegungen unabhängig voneinander zu einer Gesamtbewegung. Die Teilbewegungen können die gleiche Richtung oder die entgegengesetzte Richtung haben oder einen beliebigen Winkel zueinander bilden.

Ein Körper wird im Vakuum horizontal mit der Geschwindigkeit v_0 abgeschossen. Gleichzeitig wird der Körper von der Erde nach unten gezogen.





Die gesamte Bewegung kann in zwei Teilbewegungen zerlegt werden, die unabhängig voneinander betrachtet werden können:

- horizontale Bewegung (x-Richtung): gleichförmige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit v_0 (alle Größen nach rechts werden positiv gezählt)

$$v_x(t) = v_0 \tag{3.18}$$
$$s_x(t) = v_0 \cdot t \tag{3.19}$$

- vertikale Bewegung (y-Richtung): freier Fall = gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit konstanter Beschleunigung g und keiner Anfangsgeschwindigkeit (alle Größen nach unten werden positiv gezählt)

$$v_y(t) = g \cdot t \tag{3.20}$$
$$s_y(t) = \frac{g \cdot t^2}{2} \tag{3.21}$$

Die Wurfbewegung ist zu Ende, wenn der Körper auf dem Boden aufkommt. Dies wird durch die Fallzeit t_{fall} bestimmt. Die **maximale Wurfweite** $s_x^{\max}$ ergibt sich, wenn man in $s_x(t)$ die Fallzeit $t_{\text{fall}} = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$ einsetzt:

$$s_x^{\max} = v_0 \cdot t_{\text{fall}} = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{s_x^{\max} = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}}$$

Beispiel (3.17)

Aus einem Schlauch fließt Wasser mit der Geschwindigkeit von $v_0 = 10$ m/s. Ein Gärtner hält den Schlauch in 1,5 m Höhe so, dass das Wasser waagrecht aus dem Schlauch austritt. In welcher Entfernung vom Gärtner trifft das Wasser auf den Erdboden?

Lösung

Wir verwenden die Formel für die Fallzeit

$$t_{\text{fall}} = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,5}{10}} = 0,55 \text{ s}$$

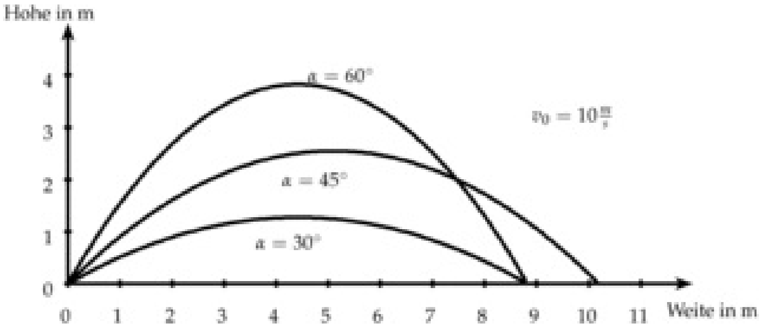
und setzen damit in die Formel für die maximale Wurfweite ein

$$s_x^{\max} = v_0 \cdot t_{\text{fall}} = 10 \cdot 0,55 = 5,5 \text{ m}$$

Das Wasser trifft in 5,5 m Entfernung auf den Erdboden.

3.4.4 Der schiefe Wurf

Ein Körper wird mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter einem Winkel α gegen die Horizontale abgeschossen. Für die Berechnung des schiefen Wurfes benötigt man im Allgemeinen die Winkelfunktionen. Hier sollen nur die verschiedenen Bahnkurven gezeigt werden. Die Wurfweite ist am größten für den Winkel $\alpha = 45°$.



3.5 Aufgaben

Gleitkommadarstellung, Umrechnungen

(3.1) Zur Ermittlung der Entfernung Erde-Mond haben Astronauten einen Laser-Reflektor auf dem Mond aufgestellt. Nun wird ein Lasersignal ausgesandt und nach 2,5 s wieder empfangen.
Berechnen Sie den Abstand des Mondes von der Erde!

(3.2) Das Wachstum von Fingernägeln beträgt etwa 0,08 mm pro Tag.
Geben Sie die Geschwindigkeit in m/s und km/h an! Wie lang könnten die Fingernägel werden, wenn man sie ein Jahr lang nicht schneiden würde?

(3.3) Die Entfernung zwischen Erde und Sonne ist $1,5 \cdot 10^8$ km, die Geschwindigkeit des Lichtes ist $3 \cdot 10^8$ m/s.
Wie lange braucht das Licht, um von der Sonne zur Erde zu gelangen?

(3.4) Wie groß ist die Zeitersparnis, die ein Autofahrer für eine Strecke von 100 km erreicht, wenn er seine übliche Durchschnittsgeschwindigkeit von 70 km/h auf 90 km/h steigert?

Gleichförmige Bewegung

(3.5) Körper A startet am Nullpunkt mit der Geschwindigkeit $v_A = 5$ m/s, Körper B hat einen Vorsprung von 12 m und startet gleichzeitig mit $v_B = 3$ m/s.
Wann und wo überholt der Körper A den Körper B? Zeichnen Sie ein Diagramm!

(3.6) Körper A startet am Nullpunkt mit der Geschwindigkeit $v_A = 5$ m/s, Körper B startet gleichzeitig in einer Entfernung von 40 m und kommt dem Körper A mit 3 m/s entgegen.
Wann und wo trifft der Körper A den Körper B? Zeichnen Sie ein Diagramm!

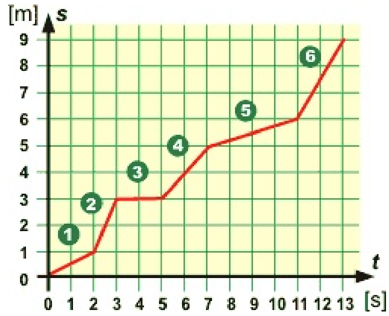
(3.7) Körper A startet am Nullpunkt mit der Geschwindigkeit $v_A = 5$ m/s, Körper B startet 2 Sekunden ebenfalls am Nullpunkt später mit $v_B = 7$ m/s in dieselbe Richtung wie A.
Wann und wo überholt der Körper B den Körper A? Zeichnen Sie ein Diagramm!

(3.8) Körper A startet am Nullpunkt mit der Geschwindigkeit $v_A = 5$ m/s, Körper B hat einen Vorsprung von 30 m und startet 4 s später als mit $v_B = 3$ m/s in dieselbe Richtung.
Wann und wo überholt der Körper A den Körper B? Zeichnen Sie ein Diagramm!

(3.9) Ein Körper hat eine konstante Geschwindigkeit von $v = 2$ m/s.
a) Stellen Sie den Zusammenhang zwischen v und t während der ersten 10 s grafisch dar.
b) Stellen Sie den Zusammenhang zwischen s und t während der ersten 10 s grafisch dar.
c) Berechnen Sie in einer Tabelle den zurückgelegten Weg für die Zeiten 2, 4, 6, 8 und 10. Wir nehmen an $s_0 = 0$.

(3.10) Stellen Sie die gleichförmige Bewegung von zwei Körpern mit $v_1 = 5$ m/s und $v_2 = 10$ m/s innerhalb der ersten 10 s in einem *v-t* und einem *s-t* Diagramm dar.

(3.11) Das *s-t*-Diagramm von einer Bewegung ist gegeben.
a) Bestimmen Sie für die sechs eingezeichneten Bereiche die Geschwindigkeit!
b) Geben Sie an, ob es sich um eine gleichförmige Bewegung oder einen Stillstand handelt!



Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

(3.12) Erklären Sie die gleichförmige Bewegung und die gleichmäßig beschleunigte Bewegung! Was sind die Unterschiede?

(3.13) Ein Fahrzeug beschleunigt aus dem Stillstand mit 2,5 m/s^2. Stellen Sie die Bewegung innerhalb der ersten 10 s grafisch dar (*a-t*, *v-t* und *s-t*-Diagramm).

(3.14) Ein Fahrzeug wird aus dem Stillstand in 4 s auf 3 m/s beschleunigt. Diese Geschwindigkeit behält es 3 s bei und wird dann innerhalb von 2 s auf 6 m/s beschleunigt. Anschließend wird es in 5 s bis zum Stillstand abgebremst.
a) Zeichnen Sie ein *a-t* und ein *v-t*-Diagramm.
b) Berechnen Sie den Gesamtweg und die Durchschnittsgeschwindigkeit.

(3.15) Ein Auto fährt an und wird immer schneller. Nach 10 Sekunden hat es 125 m zurückgelegt und die Geschwindigkeit von 72 km/h erreicht. Zwischen der 10. Sekunde und der 15. Sekunde fährt es gleichförmig mit der Geschwindigkeit von 72 km/h weiter.
a) Skizzieren Sie den Verlauf der Bewegung zwischen der 0. und der 10. Sekunde qualitativ (nur ungefähr), den Verlauf zwischen der 10. und 15. Sekunde genau in einem s-t-Diagramm (Weg-Zeit-Diagramm).
b) Berechnen Sie den Weg, den das Auto zwischen der 10. und der 15. Sekunde zurücklegt. An welchem Ort ist das Auto nach 15 Sekunden?

(3.16) Ein Fahrzeug wird aus dem Stillstand in 4 s auf 3 m/s beschleunigt. Diese Geschwindigkeit behält es 3 s lang bei und wird dann innerhalb von 2 s auf 6 m/s beschleunigt. Anschließend wird es in 5 s bis zum Stillstand abgebremst.
a) Skizzieren Sie das a-t-Diagramm und das v-t-Diagramm dieses Vorganges!
b) Berechnen Sie den gesamten zurückgelegten Weg!

(3.17) Ein Körper beschleunigt gleichmäßig in 10 s von $v_0 = 3$ m/s auf $v_{10} = 8$ m/s. Wie weit kommt er dabei?

(3.18) Ein Körper beschleunigt gleichmäßig von $v_0 = 2$ m/s auf $v_t = 10$ m/s auf einem Weg von 48 m. Wieviel Zeit braucht er dazu?

(3.19) Ein Eisenbahnzug hat jetzt die Geschwindigkeit 144 km/h, er bremst gleichmäßig und kommt nach 2000 m zum Stillstand. Wie lange braucht er dazu?

(3.20) a) Die U-Bahn fährt mit einer mittleren Beschleunigung von 1,2 m/s^2 von der Haltestelle los. Berechnen Sie, wie lange es dauert, bis sie die Geschwindigkeit von 72 km/h erreicht hat.
b) Die Bahn fährt gleichförmig 25 s lang mit der Geschwindigkeit von 72 km/h. Berechnen Sie, welche Strecke sie dabei zurücklegt.
c) Für das Abbremsen bis zur nächsten Haltestelle hat der Zugführer noch 14 s Zeit. Berechnen Sie, wie groß dafür die Bremsverzögerung (Bremsung oder negative Beschleunigung) der Bahn sein muss.

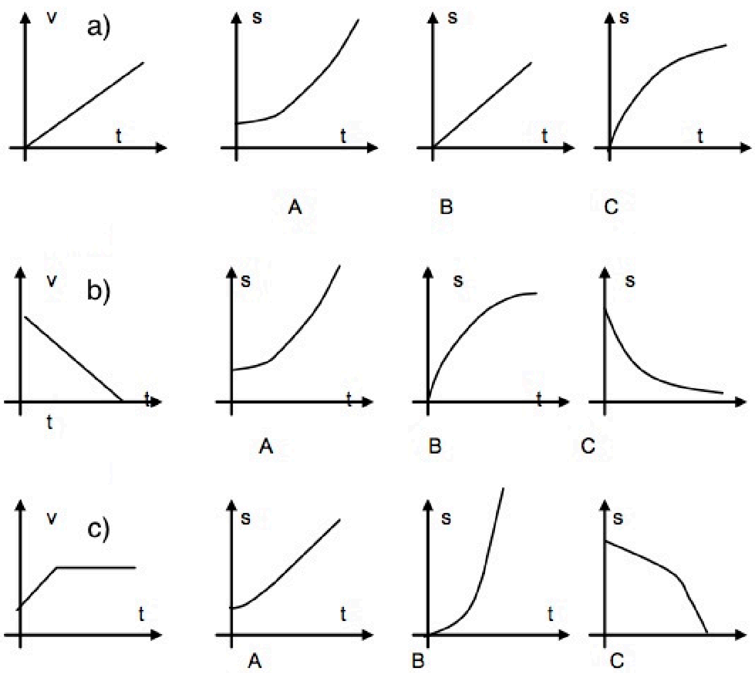
(3.21) Ein PKW fährt mit konstanter Geschwindigkeit von 110 km/h geradlinig auf einem ebenen Autobahnabschnitt. Plötzlich nimmt er ein Hindernis in 90 m Entfernung wahr. Der PKW-Fahrer beginnt nach einer Reaktionszeit von 0,9 s zu bremsen.

a) Wie weit ist der PKW beim Beginn des Bremsvorganges noch vom Hindernis entfernt?
b) Die Bremsverzögerung (Negative Beschleunigung) des PKW ist konstant und beträgt $-6,8\ \mathrm{m/s^2}$. Kommt der PKW noch vor dem Hindernis zum Stehen?

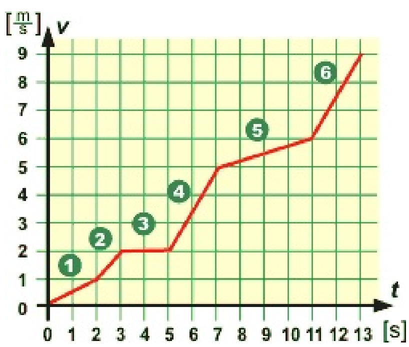
(3.22) Setzen Sie folgende Begriffe passend ein:
Zeit, Steigung, Beschleunigung, Tangente, Änderung, Geschwindigkeit, Geschwindigkeit

a) Die Momentangeschwindigkeit ist die .... im v-t-Diagramm und die .... im s-t-Diagramm.
b) Die Beschleunigung ist die .... der .... pro ....
c) Die Steigung einer Geraden oder Kurve im s-t-Diagramm heißt ....
d) Die Steigung einer Geraden oder Kurve im v-t-Diagramm heißt ....

(3.23) Welches der drei s-t-Diagramme gehört zum angegebenen v-t-Diagramm?

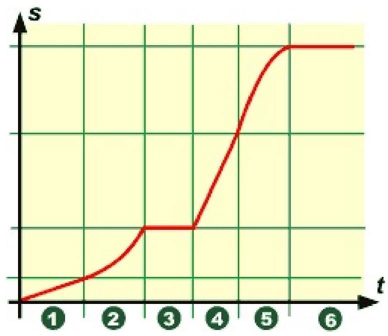


(3.24) Bestimmen Sie für die sechs eingezeichneten Bereiche des angegebenen Geschwindigkeit-Zeit-Diagramms die Beschleunigung und geben Sie die Bewegungsart an (gleichförmig, gleichmäßig beschleunigt, ungleichmäßig beschleunigt, Stillstand).



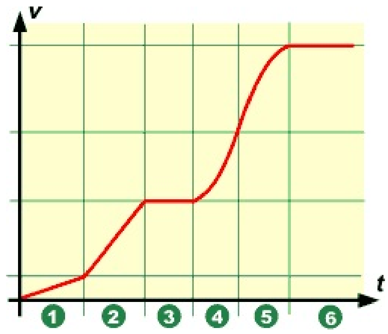
(3.25) Ordnen Sie die Begriffe den richtigen Bereichen im Weg-Zeit-Diagramm zu.

gleichförmige Bewegung (v groß), Stillstand (näher am Start), gleichförmige Bewegung (v klein), beschleunigte Bewegung (a positiv), beschleunigte Bewegung (bremsen, a negativ), Stillstand (näher am Ziel)

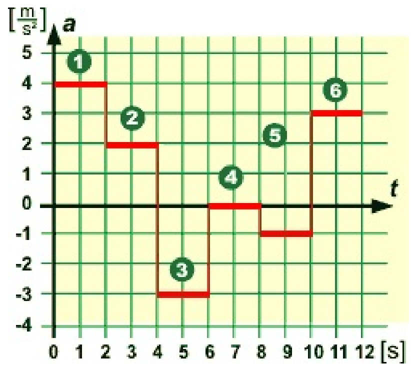


(3.26) Ordnen Sie die Begriffe den richtigen Bereichen im Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm zu.

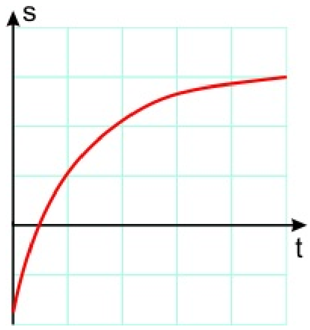
gleichförmige Bewegung (v klein), gleichmäßig beschleunigte Bewegung (a klein), gleichmäßig beschleunigte Bewegung (a groß), beschleunigte Bewegung (Beschleunigung a nimmt zu), beschleunigte Bewegung (Beschleunigung a nimmt ab), gleichförmige Bewegung (v groß)



(3.27) Bestimmen Sie für die sechs eingezeichneten Bereiche des angegebenen Beschleunigung-Zeit-Diagramms die Beschleunigung und geben Sie an, wie sich die Geschwindigkeit verändert (gleichbleibend, zunehmend, abnehmend).



(3.28) Zu der Bewegung eines Körpers wurde das Weg-Zeit-Diagramm aufgenommen. Welche Aussagen sind richtig?
a) Der Körper bewegt sich stets mit positiver Geschwindigkeit.
b) Der Körper hat erst eine negative und dann eine positive Geschwindigkeit.
c) Der Körper bewegt sich stets mit negativer Beschleunigung.
d) Der Körper bewegt sich stets mit positiver Beschleunigung.
e) Über das Vorzeichen der Beschleunigung lässt sich keine Aussage machen.



Freier Fall

(3.29) Welche Aussagen sind für den freien Fall im Vakuum richtig?
a) Alle Körper erhalten dieselbe Beschleunigung.
b) Größere Massen werden stärker beschleunigt.
c) Auf alle Körper wirkt dieselbe Kraft.
d) Auf schwerere Körper wirkt eine größere Kraft.

(3.30) Welche Geschwindigkeit besitzt ein Körper nach dem "Durchfallen" von 12 m? Wie groß ist die Fallzeit?

(3.31) Von der Spitze eines Turmes läßt man einen Stein fallen. Nach 4 Sekunden sieht man ihn auf dem Boden aufschlagen.
a) Wie hoch ist der Turm?
b) Mit welcher Geschwindigkeit trifft der Stein auf den Erdboden auf?
c) Nach welcher Zeit hat der Stein die Hälfte seines Fallweges zurückgelegt?

(3.32) Von einem Turm werden zwei völlig gleiche Kugeln vom gleichen Ort aus fallen gelassen. Kugel 2 startet eine halbe Sekunde nach der 1. Kugel. In welchem zeitlichen Abstand schlagen die beiden Kugeln auf? Begründen Sie Ihre Antwort! (Luftreibung wird vernachlässigt)
a) Kugel 2 schlägt weniger als eine halbe Sekunde nach der ersten auf.
b) Kugel 2 schlägt genau eine halbe Sekunde nach der ersten auf.
c) Kugel 2 schlägt mehr als eine halbe Sekunde nach der ersten auf.

Vertikaler Wurf nach oben

(3.33) Ein Körper wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 30$ m/s lotrecht in die Höhe geworfen. Berechnen Sie die Steigzeit und die Steighöhe!

(3.34) Wie schnell muss man einen Körper im Vakuum hochschießen, damit er 5m hoch kommt?
Wie lange braucht er bis zum höchsten Punkt?
Wie lange braucht er bis er wieder am Boden ist?
Wie schnell kommt er am Boden an?

(3.35) Eine Rakete mit Messgeräten wird mit der Geschwindigkeit $v_0 = 870$ m/s nach oben geschossen, um einen Messpunkt zu erreichen, der sich 10 000 m darüber befindet. Reicht die Anfangsgeschwindigkeit für diese Strecke aus?

(3.36) Bei einem Vulkanausbruch werden Steine bis in eine Höhe von 2 km geschleudert. Wie groß ist die Geschwindigkeit, mit der die Brocken ausgeworfen werden?

(3.37) Ein Stein wird genau senkrecht nach oben geworfen. Seine Geschwindigkeit nimmt bis zum höchsten Punkt ab und hat dort den Wert Null. Wie groß ist genau an dieser Stelle die Beschleunigung?
a) ebenfalls Null
b) kleiner als die Fallbeschleunigung g (aber größer Null)
c) gleich der Fallbeschleunigung g
d) größer als die Fallbeschleunigung g

(3.38) Beim Spielen haben Kinder ihren Ball auf einen Baum geschossen, der dort in einer Höhe von 6,5 m im Geäst hängen blieb. Nun versuchen sie durch senkrechtes Hochwerfen eines zweiten Balles den ersten wieder herunterzuholen. Beim ersten Versuch kommt der Ball nur bis 2 m unter den ersten.
a) Wie groß war die Abwurfgeschwindigkeit bei diesem Schuss?
b) Wie groß muss die Abwurfgeschwindigkeit sein, damit der erste Ball getroffen wird?

Horizontaler Wurf

(3.39) Ein Stein wird von einem 20 m hohen Turm mit $v_0 = 15$ m/s horizontal weggeworfen. Flugzeit und Wurfweite sind zu berechnen.

(3.40) Von einem 50 Meter hohen Felsen wird ein Stein in horizontaler Richtung mit einer Geschwindigkeit von 30 m/s geworfen.
a) Zeichnen Sie die Bewegung des Steins in ein x-y Diagramm ein!
b) Wie weit entfernt vom Felsen landet der Stein auf dem Boden?
c) Nach welcher Zeit kommt der Stein am Boden auf?

(3.41) Von einem horizontalen Förderband aus werden Kohlestücke bei einer Falltiefe von 2,5 m eine Entfernung von 1,8 m weit geworfen.
a) Zeichnen Sie die Bewegung der Kohlestücke in ein x–y–Diagramm ein!
b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Förderbandes!

(3.42) Ein Stuntfahrer rast für einen Kinofilm auf einem Motorrad waagrecht von einer 50 m hohen Klippe. Wie schnell muss das Motorrad beim Verlassen der Klippe sein, wenn es auf ebenem Boden 90 m vom Fuß der Klippe entfernt genau vor der Kamera aufkommen soll?

(3.43) Ein Körper wird aus der Höhe $h = 100$ m mit $v_0 = 20$ m/s vertikal nach unten geschossen.
a) Wie viel Sekunden braucht er bis zum Boden?
b)Wie groß ist seine Geschwindigkeit bei der Ankunft am Boden?
(Hinweis: Verwenden Sie nicht die Formeln für den horizontalen Wurf, sondern die allgemeinen Gesetze für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung!)

4 Dynamik – Die drei Axiome von Newton

Die Dynamik beschäftigt sich mit der Ursache von Bewegungen. Ändert ein Körper seinen Bewegungszustand muss eine äußere Ursache dafür vorliegen. Die Ursache für die Änderung eines Bewegungszustandes wird Kraft genannt. Kräfte können (bewegliche) Körper beschleunigen oder (unbewegliche) Körper verformen.
Aus den Erfahrungen des Alltags weiß jeder, dass man eine Kraft aufwenden muss, um den Bewegungszustand eines Körpers zu ändern. Wer zum Beispiel einen Gegenstand in einen anderen Raum transportieren möchte, muss dazu Kraft aufwenden. Und auch bei einer Richtungsänderung muss eine Kraft wirken.
Dies stellte auch der englische Physiker Isaac Newton fest, der von 1643 - 1727 lebte. Seine Kenntnisse gingen in die Geschichte als die Newtonschen Gesetze ein und gelten immer für die Gesamtkraft auf einen Körper.

4.1 Das erste Axiom: das Trägheitsgesetz

Wir stellen fest, Kräfte verändern die Geschwindigkeit eines Körpers.
Daher beginnt die Mechanik mit folgendem Axiom (= Grundgesetz, welches man nicht beweisen kann).

> Das erste Axiom von Newton:
> Kraft ist die Ursache für Beschleunigung. Ohne Kraft bewegt sich ein Körper überhaupt nicht oder gleichförmig (geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit).

Die Tendenz eines Körpers, den Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung beizubehalten, nennt man Trägheit. Darum wird das erste Newtonsche Axiom auch als Trägheitsgesetz bezeichnet.

Beispiel
Der frei fallende Körper wird immer schneller, weil ihn die Schwerkraft beschleunigt.

Beispiel
Wir denken uns einen Würfel auf einem Tisch und geben ihm einen kleinen Stoß, so dass er auf dem Tisch gleitet. Der Körper wird immer langsamer, bis er zum Stillstand kommt. Die Reibung zwischen Tisch und Würfel ist eine Kraft, die den Körper bremst. Je glatter der Tisch ist, desto kleiner ist die Reibungskraft, desto weniger wird die Geschwindigkeit verändert. Wenn es keine Reibung gäbe, würde der Körper nicht gebremst werden.

4.2 Das zweite Axiom: das dynamische Grundgesetz

Newton stellte fest, dass eine Kraft F die Geschwindigkeit eines Körpers ändert. Also hängt die Kraft mit der Beschleunigung zusammen.
Die Beschleunigung, die ein Körper bekommt, ist proportional zur Kraft $a \propto F$ und umgekehrt proportional zur Masse, $a \propto \frac{1}{m}$, also gilt: $a = \frac{F}{m}$. Dieser Zusammenhang wird im zweiten Newton'sche Axiom dargestellt.

> Das zweite Axiom von Newton:
> Die Kraft F ist gegeben durch Masse m mal Beschleunigung a.
>
> $$F = m \cdot a \tag{4.1}$$

Einheit: Masse: $[m] = \mathrm{kg}$ Kilogramm

Jeder Körper hat eine Masse. Auf einer Waage können wir Massen vergleichen. Durch Teilen und Vervielfachen können wir beliebig große und kleine Massen bestimmen. In Sevres bei Paris wird das Urkilogramm aufbewahrt, damit kann man andere Massen vergleichen. Die Einheit der Masse ist eine Basiseinheit.

Einheit: Kraft: $[F] = [m \cdot a] = \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{N}$ Newton

Die Kraft 1 N gibt der Masse 1 kg die Beschleunigung $a = 1\ \mathrm{m/s^2}$. Die Kraft 1 N gibt der Masse 2 kg die

Beschleunigung $a = 1/2$ m/s^2. Die Kraft $F = 10$ N gibt der Masse $m = 5$ kg die Beschleunigung $a = 2$ m/s^2.

Wichtige Bemerkungen:

- Kraft ist Ursache für Beschleunigung.
  Je größer die Kraft, desto größer ist bei gleicher Masse die Beschleunigung. Doppelte Kraft $\Rightarrow$ doppelte Beschleunigung usw.
- Masse ist "Widerstand" gegen die Beschleunigung.
  Masse wirkt gegen die Beschleunigung. Man sagt auch Masse ist "träge" oder besitzt "Trägheit" (english: inertia). Das heißt, sie ändert ihre Geschwindigkeit nicht von selbst. Je größer die Masse ist, desto schwieriger ist es, sie zu beschleunigen oder auch zu bremsen. Wegen der Trägheit der Masse fährt ein Schiff noch lange, nachdem der Motor ausgeschaltet ist, von selbst weiter.
- Für die Wirkung einer Kraft ist es wichtig, in welche Richtung die Kraft wirkt. Eine Kraft kann daher durch einen Pfeil (Vektor) dargestellt werden, der sowohl eine Richtung als auch eine Länge (Stärke) hat.

Beispiel (4.1)

Die Masse $m = 3$ kg wird durch die konstante Kraft $F = 1,5$ N beschleunigt. Die Anfangsgeschwindigkeit ist $v_0 = 0$ m/s. Nach wieviel Metern beträgt die Geschwindigkeit $v(t) = 30$ m/s?

Lösung

Beschleunigung

$$a = \frac{F}{m} = \frac{1,5}{3} = 0,5 \text{ m/s}^2$$

Die Kraft zeigt hier in die Bewegungsrichtung und wird daher als positiv gezählt.

Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + a \cdot t \\ t &= \frac{v(t) - v_0}{a} = \frac{30 - 0}{0,5} = 60 \text{ s} \end{aligned}$$

Weg

$$s = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} = 0 \cdot 60 + \frac{0,5 \cdot 60^2}{2} = 900 \text{ m}$$

Beispiel (4.2)

Die Masse $m = 3$ kg hat die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 9$ m/s. Sie wird durch die Kraft $F = -3$ N gebremst. Wie lange dauert es, bis die Masse zum Stillstand kommt? Wie groß ist der Weg, der bis zum Stillstand zurückgelegt wird?

Lösung

Beschleunigung

$$a = \frac{F}{m} = \frac{-3}{3} = -1 \text{ m/s}^2$$

Die Kraft zeigt hier in die Gegenrichtung zur Bewegungsrichtung und wird daher als negativ gezählt. Die Beschleunigung ist daher auch negativ, es wird die Masse gebremst.

Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + a \cdot t \\ t &= \frac{v(t) - v_0}{a} = \frac{0 - 9}{-1} = 9 \text{ s} \end{aligned}$$

Weg

$$s = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} = 9 \cdot 9 + \frac{-1 \cdot 9^2}{2} = 40,5 \text{ m}$$

4.3 Das dritte Axiom: das Reaktionsprinzip

Kräfte zwischen Körpern treten nicht einzeln, sondern paarweise auf. Möchte eine Person zum Beispiel ein Auto beschleunigen, muss diese Person dazu eine Kraft ausüben. Das Auto wirkt dieser Kraft entgegen, die Person spürt einen Widerstand. Man bezeichnet sie als Gegenkraft. Das dritte Axiom beschreibt dies.

> Das dritte Axiom von Newton:
> Wirkt ein Körper A auf einen Körper B mit der Kraft F, so wirkt der Körper B auf den Körper A mit einer gleich großen Kraft, der Gegenkraft $-F$. Die Richtungen der beiden Kräfte sind entgegen gesetzt. (“actio und reactio”)

Beispiel

Ein Mensch steht auf dem Boden. Auf ihn wirkt die Schwerkraft. Warum wird er nicht nach unten beschleunigt? Weil der Boden mit einer entgegengesetzt gleichen Gegenkraft auf diesen Menschen drückt.

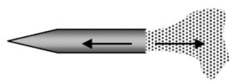
Beispiel

Ein Mensch springt von einem Boot. Der Mensch wird beschleunigt, aber auch das Boot wird in Gegenrichtung beschleunigt. Auf beide Körper wirken Kräfte in entgegengesetzte Richtungen.

Beispiel

Raketenantrieb

Bei einer Rakete dehnt sich das brennende Treibstoffgas stark aus. Das Gas wirkt auf die Rakete, die Rakete wirkt auf das Gas. Beide Körper, die Rakete und das Gas, erhalten Beschleunigungen in entgegengesetzte Richtung.



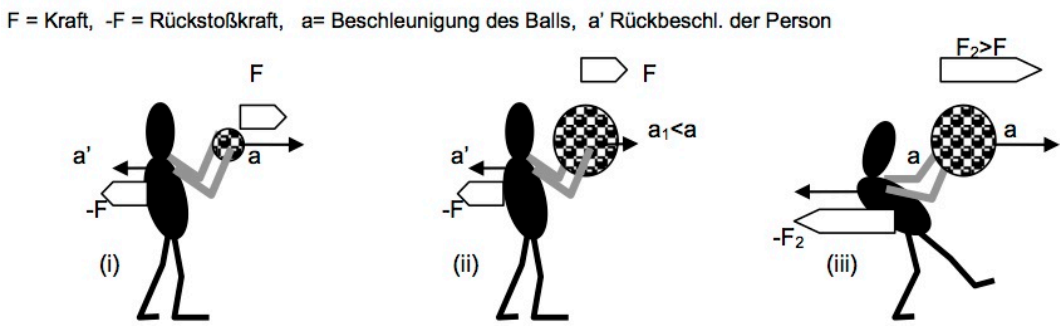
Viele Menschen glauben, dass der Raketenantrieb eines Düsenflugzeugs nur in der Luft funktioniert. Sie glauben, dass sich die Rakete von der Luft abstoßen muss. Dies ist nicht notwendig.

Beispiel

(i) Ein Ballspieler wirft einen Ball mit kleiner Masse m. Die Kraft F wirkt auf den Ball, er wird wegen seiner kleinen Masse stark beschleunigt ($a = \frac{F}{m}$). Die Reaktion $-F$ wirkt auf den Menschen. Wegen seiner großen Masse wird er nur ein wenig nach hinten mit a' beschleunigt ($a' = \frac{-F}{M}$). Man sagt, der Mensch erhält einen Rückstoß $-F$.

(ii) Wirft der Ballspieler mit derselben Kraft F einen schweren Ball (große Masse M_1), so wird dieser viel weniger beschleunigt ($a_1 = \frac{F}{M} < a$). Der Rückstoß auf den Ballspieler nach hinten ist derselbe wie im ersten Fall (i), nämlich $-F$ (Beschleunigung $a' = \frac{-F}{M}$).

(iii) Wirft der Ballspieler einen schweren Ball (große Masse M_1) mit der gleichen gleiche Beschleunigung wie bei (i), so braucht er dazu eine größere Kraft $F_2 > F$. Dann wird auch die Reaktion auf den Menschen selbst größer $a'' = \frac{-F_2}{M} > a'$. Er erhält einen größeren Rückstoß $-F_2$.



4.4 Die Schwerkraft – eine besondere Kraft

4.4.1 Schwerkraft und Masse

Die Kraft, mit der alle Körper auf der Erde vertikal nach unten gezogen werden heißt Schwerkraft, Gewichtskraft oder Erdanziehungskraft (Bezeichnung F_g oder G). Die Schwerkraft ist für verschiedene Massen verschieden:

Große Massen werden stark angezogen, kleine Massen werden schwach angezogen. Je größer die Masse eines Körpers ist, desto stärker wird er von der Erde angezogen. Gleichzeitig ist bei einer größeren Masse eine größere Kraft nötig, um sie zu beschleunigen. Ohne Luftwiderstand werden daher alle Körper im freien Fall gleich schnell zum Erdmittelpunkt hin beschleunigt.

Die Schwerkraft gibt jeder Masse dieselbe Beschleunigung, sie heißt Erdbeschleunigung und hat den Wert $g = 9,81 \text{ m/s}^2 \approx 10 \text{ m/s}^2$.
Schwerkraft = Masse mal Erdbeschleunigung

$$F_g = m \cdot g \tag{4.2}$$

Das Gewicht eines Körpers ist nicht an allen Stellen auf der Erde exakt gleich, sondern hängt eigentlich vom Ort ab, an dem sich der Körper befindet. Auf einem hohen Berg hat ein Körper ein etwas geringeres Gewicht als in Höhe des Meeresspiegels. Auf dem Mond oder auf anderen Planeten hängt die Gewichtskraft, die ein Körper erfährt, von der Masse des jeweiligen Himmelskörpers ab. Je schwerer ein Planet ist, desto größer ist die Anziehungskraft, die er auf andere Massen ausübt.

Ort	Fall-Beschleunigung [in m/s^2]
Äquator	9,78
Mitteleuropa	9,81
300 km über der Erde	8,96
40 000 km über der Erde	0,19
Mond	1,60
Venus	8,5
Mars	3,8
Jupiter	26
Sonne	274

Wir nähern die Erdbeschleunigung auf der Erde durch den Wert $g = 10 \text{ m/s}^2$ an.

Beispiel

Ein Körper der Masse 1 kg hat auf der Erde die Gewichtskraft $F_{g,\text{Erde}} = m \cdot g = 1 \cdot 10 = 10$ N.
Ein Körper der Masse 50 kg hat auf der Erde die Gewichtskraft $F_{g,\text{Erde}} = 50 \cdot 10 = 500$ N.
Ein Körper der Masse 1 kg hat auf dem Mond die Gewichtskraft $F_{g,\text{Mond}} = 1 \cdot 1,60 = 1,60$ N.
Ein Körper der Masse 1 kg hat auf der Sonne die Gewichtskraft $F_{g,\text{Sonne}} = 1 \cdot 274 = 274$ N.

Körper haben überall im Universum zwar die gleiche Masse, aber nicht die gleiche Gewichtskraft. (Oft sagt man zur Gewichtskraft auch nur Gewicht.)

4.4.2 Heben einer Masse im Schwerefeld der Erde

Beispiel (4.3)

Sie heben die Masse $m = 5$ kg gleichförmig nach oben. Wie groß ist die Kraft, die sie dazu brauchen?

Lösung

Wenn Sie die Masse gleichförmig heben möchten, so müssen Sie nur die Erdbeschleunigung ausgleichen und es ist keine zusätzliche Kraft mehr notwendig.
$F = F_g = m \cdot g = 5 \cdot 10 = 50$ N

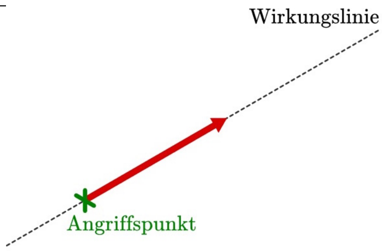
Beispiel (4.4)

Sie heben die Masse $m = 5$ kg mit der Beschleunigung $a = 3 \text{ m/s}^2$ nach oben. Wie groß ist die Kraft, die sie dazu brauchen?

Lösung

In diesem Fall möchten Sie der Masse auch noch eine zusätzliche Beschleunigung von a geben.
$F = F_g + F_a = m \cdot g + m \cdot a = 5 \cdot 10 + 5 \cdot 3 = 65$ N

4.5 Betrag, Wirkungslinie und Angriffspunkt von Kräften



Um die Wirkung einer Kraft vorhersagen zu können, muss man nicht nur die Größe (den "Betrag") einer Kraft kennen, sondern auch wissen, an welchem Punkt sie angreift und in welche Richtung sie wirkt.
In Koordinatensystemen und Zeichnungen werden Kräfte meist durch Pfeile ("Vektoren") dargestellt. Dabei gilt:

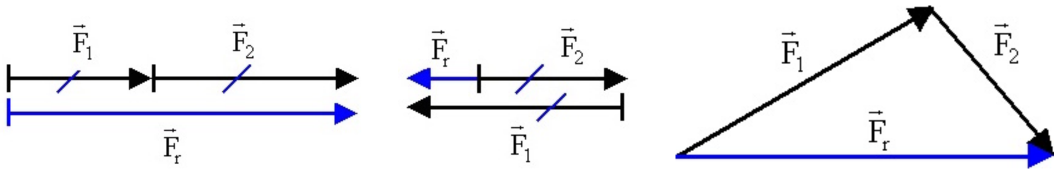
- Die Länge des Pfeils gibt die Größe der Kraft an.
- Der Anfangspunkt des Pfeils ist gleich dem Angriffspunkt der Kraft.
- Die Richtung des Pfeils entspricht der Wirkungslinie der Kraft.

Entlang der Wirkungslinie kann der Kraftvektor beliebig verschoben werden, ohne dass sich an der physikalischen Wirkung der Kraft etwas ändert.

4.6 Die Summe von Kräften

Wirken mehrere Kräfte auf einen Körper ein, so kann man sich diese als zu einer Gesamtkraft (= resultierende Kraft) zusammengesetzt denken.

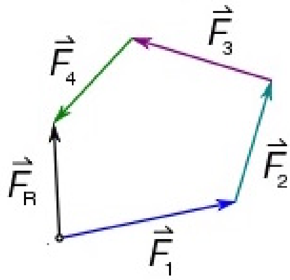
- Wirken zwei Teilkräfte in die gleiche Richtung, so erhält man die Gesamtkraft, indem man die Beträge der Teilkräfte addiert. Die Gesamtkraft zeigt in die gleiche Richtung wie die einzelnen Teilkräfte.
- Wirken zwei Teilkräfte in die entgegengesetzte Richtung, so erhält man die Gesamtkraft, indem man die Differenz aus den Beträgen der Teilkräfte bildet. Die Gesamtkraft zeigt in Richtung der größeren der beiden Teilkräfte.
- Wirken an einem Punkt mehrere Kräfte in unterschiedlicher Richtung, so sind für die Bestimmung der resultierenden Kraft die Größen und auch die Richtungen der einzelnen Teilkräfte wichtig.



Die Summe von Kräften mit verschiedener Richtung kann mit Hilfe der Vektorrechnung berechnet werden. In Zeichnungen lassen sich die wirkenden Kräfte als Vektorpfeile darstellen. Die sich aus zwei Teilkräften ergebende Gesamtkraft kann zeichnerisch ermittelt werden, indem beide Vektorpfeile addiert werden, d.h. der Anfangspunkt des einen Vektors an die Spitze des anderen Vektors verschoben wird. Die Verbindungslinie vom Anfangspunkt zum Endpunkt entspricht dann der resultierenden Gesamtkraft.

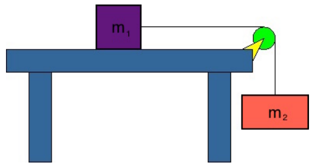
> Die Gesamtwirkung von Kräften heißt resultierende Kraft F_r. Sie kann für parallele Kräfte berechnet werden durch:
>
> $$F_r = F_1 + F_2 + F_3 + \dots \tag{4.3}$$
>
> wobei gilt: Kräfte mit gleicher Richtung haben gleiches Vorzeichen, Kräfte mit entgegengesetzter Richtung haben verschiedenes Vorzeichen.

Wirken an einem gemeinsamen Angriffspunkt mehr als zwei Kräfte in unterschiedliche Richtungen, so kann die resultierende Gesamtkraft graphisch ermittelt werden, indem alle Vektorpfeile so miteinander verbunden werden, dass der Anfangspunkt des zweiten Vektors am Endpunkt des ersten liegt, der Anfangspunkt des dritten Vektors am Endpunkt des zweiten liegt, usw. Der Vektor vom Anfangspunkt der Vektorkette zu ihrem Endpunkt entspricht der wirkenden Gesamtkraft.



Beispiel (4.5)

Ein Quader ($m_1 = 20$ kg) kann mit einem Seil auf einem horizontalen Tisch gezogen werden. Er ist durch ein Seil und eine Rolle mit einem Gewicht ($m_2 = 5$ kg) verbunden, das durch die Schwerkraft nach unten gezogen wird.
a) Wie lautet die Bewegungsgleichung?
b) Berechnen Sie die Beschleunigung, die das gesamte System bekommt!
c) Wie schnell ist das System nach 5 Sekunden, wenn die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 1$ m/s beträgt und sich der Quader am Tisch reibungsfrei bewegt?



Lösung

a) Das gesamte System (bestehend aus m_1 und m_2) wird beschleunigt durch eine gesamt Kraft F

$$F = (m_1 + m_2) \cdot a \tag{4.4}$$

Die Kraft wird in diesem Fall nur von der Gewichtskraft F_g des hängenden Körpers m_2 verursacht

$$F = F_g = m_2 \cdot g \tag{4.5}$$

Daher ergibt sich

$$(m_1 + m_2) \cdot a = m_2 \cdot g \tag{4.6}$$

b) Die Beschleunigung ist daher

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2) \cdot a &= m_2 \cdot g \\ a &= \frac{m_2 \cdot g}{m_1 + m_2} = \frac{5 \cdot 10}{20 + 5} = 2\ m/s^2\end{aligned} \tag{4.7}$$

c) Die Geschwindigkeit ist

$$v(t) = v_0 + a \cdot t = 1 + 2 \cdot 5 = 11\ m/s \tag{4.8}$$

4.7 Der Aufzug und das scheinbare Gewicht

Befinden wir uns in einem Aufzug (Lift, Fahrstuhl), so spüren wir die Gegenkraft des Aufzugbodens auf uns. Diese Gegenkraft kann man auch als das scheinbare Gewicht bezeichnen. Wird nun der Aufzug beschleunigt so ist unser scheinbares Gewicht anders, als unser normales Gewicht. Die Waage auf der wir stehen zeigt unser scheinbares Gewicht F_S an.
Ruht die Aufzugkabine, so drücken unsere Füße auf die Personenwaage mit der gleichen Kraft wie unser Gewicht. Beim Losfahren der Kabine entzieht sich plötzlich die Personenwaage unseren Füßen. Es ist so, als ob sie von unseren Füßen weggezogen würde. Folglich drücken unsere Füße weniger fest auf sie. Sie zeigt also einen kleineren Wert an.

- Fall 1:
  Der Aufzug steht oder fährt mit gleichbleibender Geschwindigkeit (d.h. $a = 0$)
  scheinbares Gewicht = Gewichtskraft
  $F_S = m \cdot g$
- Fall 2:
  Beschleunigung nach oben (beim Anfahren nach oben oder beim Bremsen beim nach unten fahren)
  scheinbares Gewicht größer als unser Gewicht (drückendes Gefühl im Magen)
  $F_S = m \cdot g + m \cdot a$
- Fall 3:
  Beschleunigung nach unten (beim Anfahren nach unten oder beim Bremsen beim nach oben fahren)
  scheinbares geringer als unser Gewicht (es hebt den Magen)
  $F_S = m \cdot g - m \cdot a$
- Fall 4:
  das Seil des Aufzugs reißt ($a = g$)
  Schwerelosigkeit
  $F_S = m \cdot g - m \cdot g = 0$

Beispiel (4.6)

In einem Aufzug steht eine Person auf einer Badezimmerwaage. Im Stand zeigt die Waage 70 kg an, beim Anfahren 55 kg und beim Abbremsen 80 kg.
a) In welcher Richtung bewegt sich der Aufzug?
b) Mit welcher Beschleunigung fährt der Aufzug an?
c) Mit welcher Beschleunigung bremst er?
d) Was zeigt die Waage zwischendrin und bei gleichförmiger Fahrt?

Lösung

a) Der Aufzug bewegt sich nach unten.
b) Wir verwenden die Formel: $F_S = m \cdot g - m \cdot a$
umformen nach der Beschleunigung gibt: $a = \frac{m \cdot g - F_S}{m}$
einsetzen: $a = \frac{70 \cdot 10 - 55 \cdot 10}{70} = 2,14 \text{ m/s}^2$
c) Wir verwenden die Formel: $F_S = m \cdot g + m \cdot a$
umformen nach der Beschleunigung gibt: $a = \frac{F_S - m \cdot g}{m}$
einsetzen: $a = \frac{80 \cdot 10 - 70 \cdot 10}{70} = 1,43 \text{ m/s}^2$
d) Die Waage zeigt bei gleichförmiger Bewegung 70 kg an.

4.8 Aufgaben

Newtons Axiome

(4.1) Welche physikalische Größe ist die Ursache für Beschleunigungen? Welche physikalische Größe bedeutet Widerstand gegen Beschleunigung? Welche Wirkung hat die Kraft 1 Newton auf die Masse 2kg?

(4.2) Die Masse $m = 4$ kg hat eine Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 0$. Sie wird durch die Kraft $F = 6$ N beschleunigt. Wie schnell ist die Masse nach 10 s?

(4.3) Die Masse $m = 2$ kg hat eine Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 0$. Sie wird durch eine Kraft F beschleunigt und legt in 10 s den Weg $s(t) = 50$ m zurück. Bestimmen Sie die Beschleunigung a und die Kraft F!

(4.4) Die Masse $m = 3$ kg hat die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 12$ m/s. Sie wird durch die Kraft $F = -4.5$ N gebremst. Wie lange dauert es, bis die Masse zum Stillstand kommt?

(4.5) Die Massen $m_1 = 5$ kg und $m_2 = 4$ kg haben die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$. Sie werden beide durch die Kraft $F = 8$ N beschleunigt. Wie schnell sind beide Massen nach 10 s und welchen Abstand haben sie dann?

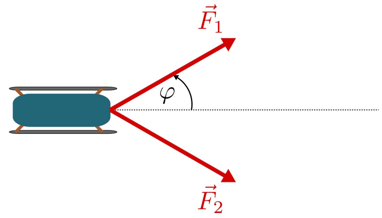
(4.6) Ein Fahrzeug mit einer Masse von 850 kg hat eine Geschwindigkeit von 50 km/h. Es wirkt 8 Sekunden lang eine beschleunigende Kraft von 2380 N. Berechnen Sie die Geschwindigkeit nach den 8 Sekunden!

(4.7) Eine Gewehrkugel ($m = 10$ g) führt im Gewehrlauf eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung aus. Sie wird im 80 cm langen Lauf auf 800 m/s beschleunigt.
Berechnen Sie die Beschleunigung der Kugel und die Kraft, die im Gewehr auf die Kugel wirkt!

(4.8) Zu jeder Kraft F gibt es stets eine gleich große, in die umgekehrte Richtung wirkende Gegenkraft $-F$. Zeichnen Sie in der Abbildung zueinander gehörende Kraft-Gegenkraft-Paare ein und achten Sie auf die passenden Richtungen der Kraftpfeile.

(4.9) Ein Kind mit einer Masse von $m = 30$ kg sitzt auf einer Schaukel. Welche Kraft wirkt auf die beiden Seile der Schaukel?

(4.10) Zwei Kinder ziehen einen Schlitten mit den beiden Kräften $F_1 = F_2 = 40$ N. Die Kräfte wirken in unterschiedlicher Richtung, der Winkel gegenüber der zum Schlitten senkrecht verlaufenden Linie beträgt jeweils $\varphi = 30°$. Bestimmen Sie die resultierende Kraft durch graphische Addition! Bestimmen Sie die resultierende Kraft durch Rechnung!



(4.11) Ein Mensch ($m_1 = 80$ kg) springt von einem Boot ($m_2 = 200$ kg). Er erhält dabei die Beschleunigung $a_1 = 1$ m/s^2. Welche Beschleunigung a_2 erhält das Boot?

(4.12) Ein Mensch ($m_1 = 80$ kg) springt von einem Boot ($m_2 = 200$ kg) und übt dabei 2 Sekunden lang die konstante Kraft $F = 120$ N aus. Welche Geschwindigkeit erreichen der Mensch und das Boot? (Wir vernachlässigen die Reibung.)

Schwerkraft

(4.13) Die Gewichtskraft eines Astronauten beträgt auf dem Mond 130 N. Wie groß ist seine Gewichtskraft auf der Erde? Wie groß ist seine Masse?

(4.14) Ein Astronaut im Astronautenanzug hat auf der Erde die Gewichtskraft von $F_{\mathrm{Erde}} = 980$ N.
a) Berechnen Sie die Masse m des Astronauten!
b) Welche Masse hat der gleiche Astronaut auf dem Mond?
c) Welche Gewichtskraft F_{Mond} hat der Astronaut auf dem Mond?

(4.15) Jupiter ist der größte Planet im Sonnensystem. Seine Fallbeschleunigung ist ungefähr 2,5 mal so groß, wie die der Erde.
a) Berechnen Sie die Fallbeschleunigung auf dem Jupiter!
b) Ein Satellit hat die Masse $m = 1250$ kg. Berechnen Sie die Anziehungskraft, die der Jupiter auf den Satelliten ausübt!

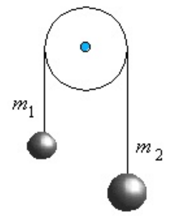
(4.16) Sie heben die Masse $m = 10$ kg gleichförmig nach oben. Wie groß ist die Kraft, die Sie dazu brauchen?

(4.17) Sie heben die Masse $m = 10$ kg mit der Beschleunigung $a = 4$ m/s^2 nach oben. Wie groß ist die Kraft, die Sie dazu brauchen?

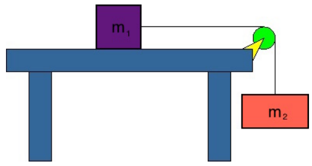
(4.18) Eine Rakete ($m = 1000$ kg) steigt vertikal nach oben. Sie soll nach 10 Sekunden die Geschwindigkeit von 2 m/s haben. Wie groß ist die Kraft, die man dazu braucht? (Wir vernachlässigen den Massenverlust durch Treibstoffausstoß!)

(4.19) Zwei verschiedene Massen $m_1 > m_2$ fallen frei im Vakuum. Welche Aussage ist richtig:
a) Sie erhalten dieselbe Beschleunigung.
b) Auf m_1 wirkt eine größere Beschleunigung.
c) Die Schwerkraft auf m_1 ist größer als auf m_2.
d) Auf beide Massen wirkt dieselbe Schwerkraft.

(4.20) (Atwoodsche Fallmaschine)
Über eine sehr leichte, reibungsfrei drehbare Rolle ist eine Schnur gelegt. An einem Ende hängt die Masse $m_1 = 498$ g, am anderen Ende die Masse $m_2 = 502$ g.
a) Wie lautet die Bewegungsgleichung?
b) Mit welcher Beschleunigung setzt sich die Anordnung in Bewegung?
c) Welche Geschwindigkeit erreichen die Massen nach 10 s?
d) Welchen Weg hat jede Masse in dieser Zeit zurückgelegt?



(4.21) Ein Quader ($m_1 = 20$ kg) kann mit einem Seil auf einem horizontalen Tisch gezogen werden. Er ist durch ein Seil und eine Rolle mit einem Gewicht ($m_2 = 5$ kg) verbunden, das durch die Schwerkraft nach unten gezogen wird.
a) Wie lautet die Bewegungsgleichung?
b) Berechnen Sie die Beschleunigung, die das gesamte System bekommt!
c) Wie schnell ist das System nach 5 Sekunden, wenn die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 1$ m/s beträgt und sich der Quader am Tisch reibungsfrei bewegt?
d) Wie schnell ist das System nach 5 Metern, wenn die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ ist und sich der Quader am Tisch reibungsfrei bewegt?



Aufzug, scheinbares Gewicht

(4.22) Ein Student ($m = 70$ kg) fährt in einem Aufzug gleichförmig mit $v = 1$ m/s nach unten. In den letzten 2 s bremst der Aufzug gleichförmig bis zum Stillstand. Mit welcher Kraft drückt der Boden des Aufzugs gegen den Studenten?

(4.23) In einem Aufzug steht eine Person mit 70 kg Masse auf einer Badezimmerwaage. Was zeigt die Waage, wenn sich der Aufzug mit $a = 2,5$ m/s^2 nach oben bewegt?

(4.24) In einem Aufzug steht eine Person auf einer Badezimmerwaage. Im Stand zeigt die Waage 70 kg an, beim Anfahren 85 kg und beim Abbremsen 60 kg.
a) In welcher Richtung bewegt sich der Aufzug?
b) Mit welcher Beschleunigung fährt der Aufzug an?
c) Mit welcher Beschleunigung bremst er?
d) Was zeigt die Waage zwischendrin und bei gleichförmiger Fahrt?

(4.25) In einer Aufzugskabine liegt ein Körper mit der Masse $m = 10$ kg auf einer Waage. Diese zeigt eine Kraft von $F = 115$ N an. Welche der aufgeführten Bewegungsformen sind möglich?
a) Gleichförmige Bewegung nach oben.
b) Gleichförmige Bewegung nach unten.
c) Gleichförmig beschleunigte, schneller werdende Bewegung nach oben.
d) Gleichförmig beschleunigte, schneller werdende Bewegung nach unten.
e) Gleichförmig beschleunigte, langsamer werdende Bewegung nach oben.
f) Gleichförmig beschleunigte, langsamer werdende Bewegung nach unten.

(4.26) Wenn Paul mit dem Aufzug fährt, ist sein scheinbares Gewicht am größten, wenn
a) der Aufzug mit konstanter Geschwindigkeit fährt.
b) der Aufzug nach oben beschleunigt.
c) wenn das Seil reißt und der Lift mit konstanter Geschwindigkeit nach unten fällt.
d) Keine der Aussagen stimmt, da Gewicht konstant ist.

(4.27) Ein 65 kg schwerer Mann betritt im 15. Stock eines Gebäudes mit 100 Stockwerken einen Aufzug. In diesem Aufzug steigt er auf eine Waage und beobachtet die Anzeige. Zu Beginn liest er 78 kg ab, dann 65 kg und am Schluss 52 kg.
Befindet er sich jetzt auf dem Dach oder im Keller?

5 Die Energie

5.1 Allgemeines

Energie ist lebensnotwendig. Menschen, Tiere und Pflanzen benötigen sie für ihre Entwicklung. Technische Geräte wie Radios, Kühlschränke, Fernsehgeräte oder Computer brauchen zum Betrieb Energie. Ohne Energie würde kein Zug fahren und kein Flugzeug fliegen. Trotzdem kann man Energie zumeist nicht sehen, fühlen oder anfassen. Man kann sie aber an ihren Wirkungen erkennen.

Nach einer älteren Definition ist Energie, die Fähigkeit, Arbeit zu verrichten.
Heute definiert man Energie als eine physikalische Größe, die auf verschiedene Weise in Erscheinung treten kann, deren Zahlenwert aber immer gleich bleibt. Das Vorhandensein von Energie ist die Voraussetzung um etwas zu verändern. Energie kann nicht produziert oder verbraucht werden, Energie kann umgewandelt, transportiert und gespeichert werden.

Es gibt unterschiedliche Energieformen, die nicht erzeugt oder vernichtet, aber ineinander umgewandelt werden können. So wird z.B. zwischen potenzieller oder Lageenergie, kinetischer oder Bewegungsenergie, mechanischer, elektrischer, magnetischer, chemischer, Strahlungs-, Kern- oder Ruhe-Energie unterschieden.

Beispiel (5.1)

Wenn ein Kran eine Masse m hebt, braucht er dazu Kraft und Energie (z.B. in Form von elektrischem Strom). Für die doppelte Masse braucht er die doppelte Energie. Wenn er sie drei mal so hoch – also um den dreifachen Weg – hebt, so braucht er auch die dreifache Energie.

Beispiel (5.2)

Wenn man ein Auto beschleunigt, braucht man dazu Energie, die im Benzin gespeichert ist. Wenn man es mit der doppelten Kraft beschleunigt, braucht man auch doppelt so viel Energie. Wenn man diese Beschleunigung auf einem doppelt so langen Weg ausführt, braucht man auch doppelt so viel Energie.

Die Beispiele zeigen, dass die Energie proportional zu Kraft und Weg ist. Daher ist es sinnvoll, die Energie (Arbeit) folgendermaßen zu definieren.

Die Energie E ist gegeben durch Kraft F_s mal Weg s

$$E = F_s \cdot s \tag{5.1}$$

wobei die (konstante) Kraft F_s in die gleiche Richtung wie der Weg Δs wirkt.

Bemerkung:

Wenn die Kraft nicht in Richtung des Weges wirkt, so kann man die Energie berechnen mit

$$E = F \cdot \cos\varphi \cdot s = F_s \cdot s \tag{5.2}$$

wobei der Winkel φ zwischen der Kraft F und dem Weg s ist.

Einheit: $[E] = [F \cdot s] = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m} = \mathrm{J}$ Joule

Andere Einheiten:

Elektronenvolt: $1\ \mathrm{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$ (im Bereich der kleinsten Teilchen, wie Atome und Moleküle)
Kilowattstunde: $1\ \mathrm{kWh} = 3,6 \cdot 10^{6}\ \mathrm{J}$ (beim Handel mit elektrischer Energie)
Kilokalorie: $1\ \mathrm{kcal} = 4186\ \mathrm{J}$ (in der Wärmelehre und der Ernährungslehre)

Wir unterscheiden zwei wichtige Formen der Energie:

- kinetische Energie:
  Eine Kraft wird dazu benutzt, um eine Masse zu beschleunigen und damit deren Geschwindigkeit zu verändern. Die Energie, die dafür nötig ist, heißt kinetische Energie oder Bewegungsenergie.

- potentielle Energie:
  Eine Kraft wird dazu benutzt, um eine Masse gegen eine andere Kraft zu verschieben ohne die Masse zu beschleunigen. Die Energie, die dafür nötig ist, heißt potentielle Energie oder Lageenergie.

5.2 Das Vorzeichen der Energie

Wir haben in den vorigen Beispielen gesehen, dass es einen Unterschied macht, welches Vorzeichen die Energieänderung hat.
Wir können allgemein feststellen:

- $\Delta E > 0$:
  das System bekommt Energie, das System absorbiert Energie (das ist positiv für das System)
- $\Delta E < 0$:
  das System verliert Energie, Energie wird frei (das ist negativ für das System)

5.3 Die kinetische Energie

Die kinetische Energie E_{kin} einer Masse m ist die Energie, die man braucht, um die Masse m von der Geschwindigkeit Null auf die Geschwindigkeit v zu beschleunigen. Sie ist gegeben durch:

$$E_{\text{kin}} = \frac{m \cdot v^2}{2} \tag{5.3}$$

Wenn ein Körper nicht von der Geschwindigkeit 0 auf die Geschwindigkeit v beschleunigt wird, sondern von der Geschwindigkeit v_1 auf die Geschwindigkeit v_2, so spricht man davon, dass sich die kinetische Energie des Körpers geändert hat.

Die Änderung der kinetischen Energie ΔE_{kin} ist die Energie, die man braucht, um die Masse m von der Geschwindigkeit v_1 auf die Geschwindigkeit v_2 zu beschleunigen. Sie ist gegeben durch:

$$\Delta E_{\text{kin}} = E_{\text{kin},2} - E_{\text{kin},1} = \frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2} = \frac{m \cdot (v_2^2 - v_1^2)}{2} \tag{5.4}$$

Die Formel für die kinetische Energie kann aus der allgemeinen Energieformel abgeleitet werden. Wir zeigen dies für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung ($v(t) = v_0 + a \cdot t$, $s(t) = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$ mit $v_0 = 0$ und $s_0 = 0$) gilt.

$$E = F \cdot s = m \cdot a \cdot \frac{a \cdot t^2}{2} = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

Beispiel (5.3)
Ein Auto ($m = 1000$ kg) beschleunigt von $v_0 = 0$ m/s auf $v = 20$ m/s.
Wie groß ist die kinetische Energie des Autos?

Lösung
Dazu braucht man die kinetische Energie: $E_{\text{kin}} = \frac{1000 \cdot 20^2}{2} = 200000$ J$= 200$ kJ
Das Auto hat die kinetische Energie $E_{\text{kin}} = 200$ kJ.
Die kinetische Energie $E_{\text{kin}} = 200$ kJ ist im Auto gespeichert.

Beispiel (5.4)
Ein Auto ($m = 1000$ kg) beschleunigt von $v_1 = 10$ m/s auf $v_2 = 30$ m/s.
Wie groß ist die Änderung der kinetischen Energie des Autos?

Lösung
$\Delta E_{\text{kin}} = E_{\text{kin},2} - E_{\text{kin},1} = \frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2} = \frac{1000 \cdot 30^2}{2} - \frac{1000 \cdot 10^2}{2} = 450\,000 - 50\,000 = 400\,000\,\text{J} = 400\,\text{kJ}$

Das Auto mit der niedrigeren Geschwindigkeit v_1 hat die kinetische Energie $E_{\text{kin}}^{(1)} = 50$ kJ.
Im schnellen Zustand hat es die kinetische Energie $E_{\text{kin}}^{(2)} = 450$ kJ.
Die Änderung der kinetischen Energie ist $\Delta E_{\text{kin}} = E_{\text{kin},2} - E_{\text{kin},1} = +400$ kJ.
Das Auto bekommt (absorbiert) bei der Beschleunigung 400 kJ. (Vorher war diese Energie in Form von chemischer Energie im Benzin gespeichert).

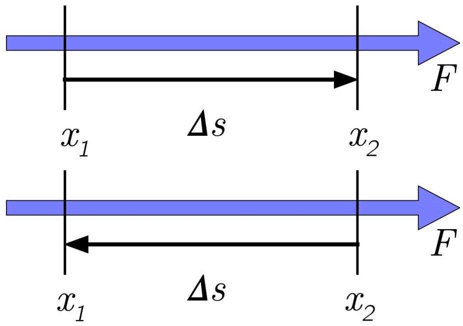
Beispiel (5.5)
Ein Auto ($m = 1000$ kg) bremst von $v_1 = 30$ m/s auf $v_2 = 10$ m/s.
Wie groß ist die Änderung der kinetischen Energie?

Lösung
$\Delta E_{\text{kin}} = E_{\text{kin},2} - E_{\text{kin},1} = \frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2} = \frac{1000 \cdot 10^2}{2} - \frac{1000 \cdot 30^2}{2} = 50\,000 - 450\,000 = -400\,\text{kJ}$
Das schnelle Auto hat die kinetische Energie 450 kJ.
Nach der Bremsung hat es $E_{\text{kin}} = 50$ kJ.
Die Änderung ist $\Delta E_{\text{kin}} = -400$ kJ.
Das Auto verliert bei der Bremsung 400 kJ. Die Energie von 400 kJ wird bei der Bremsung frei und verwandelt sich in Wärme.

5.4 Die potentielle Energie

5.4.1 Allgemeines

Man spricht von potentieller Energie, wenn man eine Masse m gegen eine Kraft F (oder in Richtung einer Kraft) verschiebt ohne die Masse dabei zu beschleunigen. Die Kraft kann z.B. die Schwerkraft, eine elektrische Kraft oder eine magnetische Kraft sein.



Die Abbildung zeigt eine Kraft F, dargestellt als allgemeiner Kraftpfeil. Wir verschieben nun eine Masse von einem Ort x_1 zu einem Ort x_2 (obere Abbildung) oder von einem Ort x_2 zu einem Ort x_1 (untere Abbildung). Für diese Verschiebung brauchen wir eine Kraft $F_{\textbf{verschiebung}}$. Wir können nun für diese Verschiebung die Änderung der potentiellen Energie berechnen. Damit wir die Energieänderung mit den korrekten Vorzeichen bekommen verwenden wir folgende Formel zur Berechnung

$$\Delta E_{\text{pot}} = -F \cdot \Delta s \tag{5.5}$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

- die Verschiebung ist in Richtung der Kraft
  die Verschiebung $\Delta s = x_2 - x_1$ von x_1 nach x_2 ist in die gleiche Richtung wie die Kraft, beide haben dasselbe Vorzeichen (beide plus oder beide minus) die Energieänderung ist daher negativ $\Delta E_{\text{pot}} < 0$, die Energie wird frei, das System verliert Energie

- die Verschiebung ist gegen die Richtung der Kraft
  die Verschiebung $\Delta s = x_1 - x_2$ von x_2 nach x_1 ist in die andere Richtung wie die Kraft, beide haben unterschiedliches Vorzeichen (einmal plus und einmal minus) die Energieänderung ist daher positiv $\Delta E_{\text{pot}} > 0$, die Energie wird absorbiert, das System bekommt Energie

"Verschieben" bedeutet, dass wir den Ort ändern, aber dabei keine Beschleunigungen wirken. Man muß für die Verschiebung entweder dem System Energie zuführen oder das System verliert dadurch Energie. Diese Energie heißt potentielle Energie.

Es gilt:

Die Änderung der potentiellen Energie ΔE_{pot} eines Körpers ist die Energie, die bei der Verschiebung eines Körpers um den Weg Δs in Richtung einer Kraft F oder gegen eine Kraft F frei wird oder absorbiert wird. Sie ist gegeben durch:

$$\Delta E_{\text{pot}} = -F \cdot \Delta s \tag{5.6}$$

Beispiel (5.6)

Die Kraft beträgt $F = 50$ N. Berechnen Sie die Änderung der potentiellen Energie, wenn ...
a) ...die Masse um 3 m in Richtung der Kraft F verschoben wird!
b) ...die Masse um 3 m gegen die Kraft F verschoben wird!

Lösung

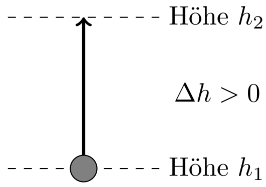
a) Wir haben hier den Fall, dass die Masse in Richtung der Kraft verschoben wird. Wir können also für beide Größen dasselbe Vorzeichen verwenden. Wir nehmen an, die Kraft zeigt in die positive Richtung, also auch der Weg.
Wir wählen für die Verschiebung von x_1 nach x_2 den Wert $\Delta s = +3$ m. Damit ist die Änderung der potentiellen Energie
$$\Delta E_{\text{pot}} = -F \cdot \Delta s = -(+50) \cdot (+3) = -150 \text{ J} \tag{5.7}$$
Das Minuszeichen bedeutet, dass die Masse Energie verliert (die Energie wird frei), wenn sie von x_1 nach x_2 verschoben wird. Die Masse hat in x_2 um 150 J weniger Energie als in x_1.

b) Jetzt wird die Masse gegen die Richtung der Kraft verschoben. Wir verwenden für beide Größen unterschiedliche Vorzeichen. Wir nehmen an, die Kraft zeigt in die positive Richtung, dann ist der Weg negativ (man kann es auch umgekehrt machen).
Wir wählen für die Verschiebung von x_2 nach x_1 den Wert $\Delta s = -3$ m. Damit ist die Änderung der potentiellen Energie
$$\Delta E_{\text{pot}} = -F \cdot \Delta s = -(+50) \cdot (-3) = +150 \text{ J} \tag{5.8}$$
Das Pluszeichen bedeutet, dass die Masse Energie absorbiert (bekommt), wenn sie von x_2 nach x_1 verschoben wird. Die Masse hat in x_1 um 150 J mehr Energie als in x_2.

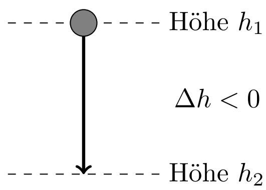
5.4.2 Die potentielle Energie der Schwerkraft

Die Schwerkraft ist eine besondere Kraft, die uns ständig umgibt. Es ist deshalb sinnvoll, die potentielle Energie, die sich durch die Schwerkraft ergibt gesondert zu behandeln.
Die Schwerkraft zeigt immer nach unten. Wir führen ein Koordinatensystem ein, wo alle Größen nach oben positiv gezählt werden. Der Weg s wird durch die Höhe h beschrieben. Die Anfangshöhe wird mit h_1 bezeichnet, die Endhöhe mit h_2. Die Schwerkraft zeigt nach unten und ist deshalb negativ $F_g = -m \cdot g$.

- Nach oben bewegen einer Masse:
  Die Masse m wird von der Höhe h_1 auf die Höhe h_2 gehoben:
  $h_2 > h_1 \quad \Rightarrow \quad \Delta h = h_2 - h_1 > 0$
  potentielle Energie:
  $$\Delta E_{\text{pot}} = -F \cdot \Delta s = -F_g \cdot \Delta h = -(-m \cdot g)\Delta h = +m \cdot g \cdot \Delta h$$
  Die Änderung der potentiellen Energie $\Delta E_{\text{pot}} > 0$ ist hier positiv. Die Energie wird vom System absorbiert, die potentielle Energie des Systems wird dadurch größer.



- Nach unten bewegen einer Masse:
  Die Masse m wird von der Höhe h_1 auf die Höhe h_2 gesenkt:
  $h_2 < h_1 \quad \Rightarrow \quad \Delta h = h_2 - h_1 < 0$
  potentielle Energie:
  $$\Delta E_{\text{pot}} = -F_{system} \cdot \Delta s = -F_g \cdot \Delta h = -(-m \cdot g)\Delta h = +m \cdot g \cdot \Delta h$$
  Die Änderung der potentiellen Energie $\Delta E_{\text{pot}} < 0$ ist hier negativ. Die Energie wird frei, die potentielle Energie des Systems wird dadurch kleiner.



Wir erhalten in beiden Fällen die gleiche Formel für die potentielle Energie. Ob Energie absorbiert oder frei wird hängt nur vom Vorzeichen von Δh ab. Es gilt:

Die Änderung der potentiellen Energie ΔE_{pot} aufgrund der Schwerkraft ist gegeben durch:

$$\Delta E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot \Delta h \quad \text{mit} \quad \Delta h = h_2 - h_1 \tag{5.9}$$

Beispiel (5.7)

Wie viel Energie braucht man, um 30 kg mit konstanter Geschwindigkeit 15 m hoch zu heben?

Lösung

Es wird hier nur die potentielle Energie verändert, da die Geschwindigkeit konstant ist. Wir können die spezielle Form der potentiellen Energie verwenden, wobei die Änderung der Höhe positiv ist

$$\Delta E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot \Delta h = 30 \cdot 10 \cdot (+15) = +4\,500 \text{ J} \tag{5.10}$$

Die Masse bekommt die potentielle Energieänderung von 4 500 J.

5.5 Energieänderung und Energie - ein wichtiger Unterschied

Kinetische Energie

Ein Auto mit der Geschwindigkeit v_1 hat die kinetische Energie $E_{\text{kin},1} = \frac{mv_1^2}{2}$. Wenn es auf die Geschwindigkeit v_2 beschleunigt wird, so hat es danach die Energie $E_{\text{kin},2} = \frac{mv_2^2}{2}$. Die Änderung der kinetischen Energie beträgt

$$\Delta E_{\text{kin}} = E_{\text{kin},2} - E_{\text{kin},1} = \frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2} \tag{5.11}$$

Bei der kinetischen Energie ist sowohl die Energie E_{kin} selbst als auch die Energieänderung ΔE_{kin} eindeutig bestimmt.

Potentielle Energie

Ein Körper wird bei einer Kraft F entlang des Wegs $\Delta s = x_2 - x_1$ von einem Punkt x_1 zu einem Punkt x_2 verschoben. Die Änderung der potentiellen Energie ist dann

$$\Delta E_{\text{pot}} = -F \cdot \Delta s = -F \cdot (x_2 - x_1) = (-F \cdot x_2) - (-F \cdot x_1) = E_{\text{pot},2} - E_{\text{pot},1} \tag{5.12}$$

wobei die Größen $E_{\text{pot},1}$ und $E_{\text{pot},2}$ als Potential am Punkt x_1 bzw. x_2 bezeichnet werden.
Der konkrete Wert des Potentials hängt davon ab, wo man mit der Messung des Weges beginnt, also wo man den Nullpunkt setzt. Ein anderer Nullpunkt verändert die beiden Größen $E_{\text{pot},1}$ und $E_{\text{pot},2}$, nicht aber die Größe ΔE_{pot}, die ja von der Differenz des Weges Δs abhängt.

Bei der potentiellen Energie ist nur die Energieänderung ΔE_{pot} eindeutig bestimmt. Von den beiden Größen $E_{\text{pot},1}$ und $E_{\text{pot},2}$ ist eine frei wählbar, die andere ergibt sich aus $\Delta E_{\text{pot}} = E_{\text{pot},2} - E_{\text{pot},1}$.

Das gilt natürlich auch für die potentielle Energie gegen die Schwerkraft.

5.6 Der Energieerhaltungssatz

5.6.1 Das abgeschlossene System

Man spricht von einem abgeschlossenen System, wenn in einem System alle Körper nur untereinander in Wechselwirkung treten und es keine Krafteinwirkung von außen gibt.

Beispiele

- freier Fall: der fallende Körper und die Erde bilden ein abgeschlossenes System; es gibt keine Kraft von außen oder eine zusätzliche Energie
- vertikaler Wurf: der geworfene Körper und die Erde bilden zusammen ein abgeschlossenes System, das sich von selbst ohne äußeren Einfluß ändert
- eine rollende Kugeln auf einer schiefen Ebene; ein Pendel; eine schwingende Feder; ein Stück Eisen und ein Magnet, die sich anziehen

Viele Systeme sind nur dann abgeschlossene Systeme, wenn es keine Reibung gibt. Durch Reibung geht Energie nach außen verloren.

5.6.2 Der Satz von der Erhaltung der Gesamtenergie

Satz von der Erhaltung der Gesamtenergie: In einem abgeschlossenen System ist die Gesamtenergie erhalten: $E_{\text{ges}} = \text{const.}$ Die Änderung der Gesamtenergie ist gleich Null: $\Delta E_{\text{ges}} = 0$.

Die Gesamtenergie setzt sich aus verschiedenen Formen der Energie zusammen, die sich jeweils ändern können:

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} + E_{\text{mag}} + \ldots = \text{const} \tag{5.13}$$

$$\Delta E_{\text{ges}} = \Delta E_{\text{pot}} + \Delta E_{\text{kin}} + \Delta E_{\text{mag}} + \ldots = 0 \tag{5.14}$$

Beispiele für verschiedene Formen der Energie sind: potentielle Energie, kinetische Energie, magnetische Energie, Wärmeenergie, Lichtenergie.

Beispiel (5.8)

Die Masse $m = 2$ kg ($v_0 = 0$) wird durch die Kraft $F = 5$ N gleichförmig 3 Sekunden lang beschleunigt.
a) Wie groß sind die Endgeschwindigkeit und der Beschleunigungsweg?
b) Wie groß sind die Änderung der potentiellen Energie, die Änderung der kinetischen Energie und die Änderung der Gesamtenergie?

Lösung

a) Zuerst berechnen wir die Beschleunigung aus $a = \frac{F}{m} = \frac{5}{2} = 2,5$ m/s^2. Daraus können wir dann die Endgeschwindigkeit berechnen $v(t) = v_0 + a \cdot t = 2,5 \cdot 3 = 7,5$ m/s. Der Beschleunigungsweg ist dann $s(t) = \frac{a \cdot t^2}{2} = \frac{2,5 \cdot 3^2}{2} = 11,25$ m.
b) Die Änderung der potentiellen Energie berechnet man hier mit dem allgemeinen Ansatz

$$\Delta E_{\text{pot}} = -F \cdot \Delta s = -F \cdot (+s(t)) = -5 \cdot (+11,25) = -56,25 \text{ J}$$

Der Weg und die Kraft haben dieselbe Richtung. Diese Energie geht aus dem System weg, sie wird frei.
Die Änderung der kinetischen Energie ist hier

$$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2} = \frac{m \cdot v(t)^2}{2} - \frac{m \cdot v_0^2}{2} = \frac{2 \cdot 7,5^2}{2} - \frac{2 \cdot 0^2}{2} = +56,25 \text{ J}$$

Diese Energie wird vom System aufgenommen.
Die Änderung der Gesamtenergie ist dann

$$\Delta E_{\text{ges}} = \Delta E_{\text{pot}} + \Delta E_{\text{kin}} = (-56,25) + 56,25 = 0 \text{ J}$$

Das System ist also abgeschlossen und es verändert sich die Gesamtenergie nicht.

Beispiel (5.9)

Die Masse $m = 2$ kg wird mit $v_0 = 8$ m/s gegen eine konstante Kraft geschossen. Dadurch wird sie gebremst und hat nach 10 Sekunden nur mehr die Geschwindigkeit $v = 3$ m/s.
a) Wie groß ist der Weg, den die Masse in diesen 10 Sekunden zurück legt?
b) Wie groß sind die Änderung der potentiellen Energie, die Änderung der kinetischen Energie und die Änderung der Gesamtenergie?

Lösung

a) Zuerst berechnen wir die Beschleunigung aus $a = \frac{v(t)-v_0}{t} = \frac{3-8}{10} = -0,5\ \text{m/s}^2$. Daraus können wir die Kraft $F = m \cdot a = 2 \cdot (-0,5) = -1$ N berechnen, die gegen die Bewegungsrichtung zeigt. Der zurückgelegte Weg beträgt dann $s(t) = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} = 8 \cdot 10 + \frac{(-0,5) \cdot 10^2}{2} = 55$ m.

b) Die Änderung der potentiellen Energie berechnet man hier mit dem allgemeinen Ansatz

$$\Delta E_{\text{pot}} = -F \cdot \Delta s = -F \cdot (+s(t)) = -(-1) \cdot (+55) = +55\ \text{J}$$

Der Weg und die Kraft haben unterschiedliche Richtungen. Hier wurde die Kraft negativ gewählt und daher der Weg positiv. Man kann es auch umgekehrt machen. Diese Energie wird vom System aufgenommen. Die Änderung der kinetischen Energie ist

$$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2} = \frac{m \cdot v(t)^2}{2} - \frac{m \cdot v_0^2}{2} = \frac{2 \cdot 3^2}{2} - \frac{2 \cdot 8^2}{2} = -55\ \text{J}$$

Diese Energie geht aus dem System weg, sie wird frei.
Die Änderung der Gesamtenergie ist dann

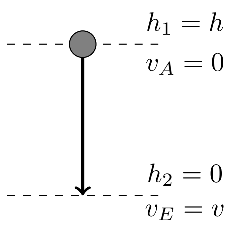
$$\Delta E_{\text{ges}} = \Delta E_{\text{pot}} + \Delta E_{\text{kin}} = 55 + (-55) = 0\ \text{J}$$

Das System ist also abgeschlossen und es verändert sich die Gesamtenergie nicht.

5.6.3 Die Umwandlung von beiden Energieformen

Freier Fall

Ein Körper fällt von der Höhe $h_1 = h$ auf die Höhe $h_2 = 0$. Am Anfang hat der Körper die Geschwindigkeit $v_A = 0$. Ein frei fallender Körper hat nach der durchfallenen Höhe h die Geschwindigkeit $v_E = v = \sqrt{2gh}$ erreicht.

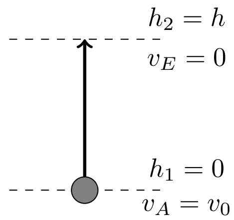


Änderung der potentiellen Energie:
$\Delta E_{\text{pot}} = mg\Delta h = mg(0-h) = -mgh.$
Änderung der kinetischen Energie:
$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{mv_E^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - 0 = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(\sqrt{2gh})^2}{2} = +mgh$
Änderung der Gesamtenergie:
$\Delta E_{\text{ges}} = \Delta E_{\text{pot}} + \Delta E_{\text{kin}} = -mgh + mgh = 0$

Der Körper verliert die potentielle Energie $-mgh$, er gewinnt aber die kinetische Energie $+mgh$. Die Gesamtenergie ändert sich nicht, sie bleibt konstant.
Beim freien Fall verwandelt sich die potentielle Energie in kinetische Energie.

Vertikaler Wurf

Ein Körper wird mit Anfangsgeschwindigkeit $v_A = v_0$ von der Höhe $h_1 = 0$ vertikal nach oben geworfen. Dabei erreicht er die Wurfhöhe $h_2 = h = \frac{v_0^2}{2g}$. Am höchsten Punkt ist die Geschwindigkeit $v_E = 0$.



Änderung der potentiellen Energie:
$\Delta E_{\text{pot}} = mg\Delta h = mg(h-0) = +mgh = \frac{mgv_0^2}{2g} = +\frac{mv_0^2}{2}.$
Änderung der kinetischen Energie:
$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{mv_E^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = 0 - \frac{mv_0^2}{2} = -\frac{mv_0^2}{2}$
Änderung der Gesamtenergie:
$\Delta E_{\text{ges}} = \Delta E_{\text{pot}} + \Delta E_{\text{kin}} = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = 0$

Der Körper verliert die kinetische Energie $-\frac{mv_0^2}{2}$, da er langsamer wird, aber er gewinnt die potentielle Energie $+\frac{mv_0^2}{2}$. Die Gesamtenergie ändert sich nicht, sie bleibt konstant.
Beim vertikalen Wurf verwandelt sich die kinetische Energie in potentielle Energie.

Beispiel (5.10)
Wir lassen einen Körper der Masse m von einer Höhe $h = 5$ m frei fallen. Welche Geschwindigkeit hat er am Boden? Benutzen Sie die Umwandlung von potentieller Energie in kinetische Energie!

Lösung
Die Änderung der potentiellen Energie beim freien Fall ist gegeben durch

$$\Delta E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot \Delta h = m \cdot g \cdot (0 - h) = -m \cdot g \cdot h$$

und die Änderung der kinetischen Energie ist

$$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{m \cdot v_E^2}{2} - \frac{m \cdot v_A^2}{2} = \frac{m \cdot v^2}{2} - 0 = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

Wir setzen in den Energieerhaltungssatz ein und berechnen die Geschwindigkeit v am Boden

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{ges}} &= \Delta E_{\text{pot}} + \Delta E_{\text{kin}} \\ 0 &= -m \cdot g \cdot h + \frac{m \cdot v^2}{2} \\ m \cdot g \cdot h &= \frac{m \cdot v^2}{2} \\ v &= \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 5} = 10 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Beispiel (5.11)
Die Masse $m = 3$kg wird mit $v_0 = 6$ m/s in Gegenrichtung zu einer konstanten Kraft $F = 12$ N geworfen. Berechnen Sie mit dem Energieerhaltungssatz, wie weit die Masse bis zum Stillstand kommt!

Lösung
Die Änderung der potentiellen Energie ist gleich

$$\Delta E_{\text{pot}} = -F \cdot \Delta s$$

und die Änderung der kinetischen Energie ist (das ist eine bremsende Bewegung)

$$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{m \cdot v_E^2}{2} - \frac{m \cdot v_A^2}{2} = 0 - \frac{m \cdot v_0^2}{2} = -\frac{m \cdot v_0^2}{2}$$

Wir setzen in den Energieerhaltungssatz ein und berechnen die Strecke Δs bis zum Stillstand

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{ges}} &= \Delta E_{\text{pot}} + \Delta E_{\text{kin}} \\ 0 &= -F \cdot \Delta s - \frac{m \cdot v_0^2}{2} \\ \Delta s &= -\frac{m \cdot v_0^2}{2 \cdot F} = -\frac{3 \cdot 6^2}{12} = -9 \text{ m} \end{aligned}$$

Das Minus bedeutet hier, dass sich die Masse gegen die Kraft bewegt.

5.7 Aufgaben

Kinetische Energie

(5.1) Beweisen Sie die Formel $E_{\text{kin}} = \frac{mv^2}{2}$ für eine gleichförmig beschleunigte Bewegung!

(5.2) Die Masse $m = 5$ kg hat die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ und wird 10 s lang mit $a = 0,5$ m/s^2 beschleunigt. Wieviel kinetische Energie bekommt sie dabei?

(5.3) Die Masse $m = 10$ kg mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 40$ m/s wird durch die Bremskraft $F = -20$ N abgebremst. Wieviel kinetische Energie verliert sie dabei in den ersten 5 s?

(5.4) Wie schnell muss ein Elektron (Masse $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg) fliegen, damit es die kinetische Energie von 2 keV hat?

(5.5) Wie groß ist die Energieänderung, wenn ein Fahrzeug mit einer Masse von $m = 1000$ kg von 0 auf 50 km/h beziehungsweise von 0 auf 100 km/h beschleunigt wird? Wie groß ist die Energieänderung, wenn das Fahrzeug von 50 km/h auf 100 km/h beschleunigt wird?

(5.6) Ein Auto ($m = 1000$ kg) hat im Augenblick die kinetische Energie 450 kJ. Es bremst gleichförmig und verliert dabei 250 kJ an kinetischer Energie.
a)Wie schnell ist das Auto am Anfang und am Ende der Bremsung?
b) Wie groß ist die Bremskraft?

Potentielle Energie

(5.7) Es wirkt die Kraft $F = 5$ N auf eine Masse. Wieviel Energie braucht man, um die Masse 3 m gegen die Kraft zu verschieben?

(5.8) Stangenklettern im Sportunterricht. Fred wiegt 35 kg und klettert 5 m hoch. Paul wiegt 43 kg und schafft nur 4m. Wer hat die höhere potentielle Energie?

(5.9) Angenommen, wir haben die Energie 1kWh zur Verfügung.
a) Wie hoch kann man damit einen 10 Tonnen schweren Betonblock heben?
b) Auf welche Geschwindigkeit kann man damit ein 1000 kg schweres Auto aus dem Stand ($v_0 = 0$) beschleunigen?

(5.10) Ein Kran hebt die Masse $m = 300$ kg mit konstanter Geschwindigkeit 10 Meter hoch.
a) Welche Form der Energie ändert sich dabei, welche ändert sich nicht?
b) Wie groß ist die Energieänderung?

(5.11) Bei welcher Energieform (kinetisch oder potentiell) kann man nur die Änderung eindeutig bestimmen, aber nicht die Energie selbst?

(5.12) Eine Masse hat die potentielle Energie $E_{\text{pot},1} = 200$ J. Sie wird ohne Beschleunigung in Richtung der Kraft $F = 12$ N um 7 m verschoben. Welche potentielle Energie hat sie dann?

Energieerhaltungssatz

(5.13) Die Masse $m = 4$ kg ($v_0 = 0$) wird durch die Kraft $F = 12$ N gleichmäßig 5 Sekunden lang beschleunigt.
a) Wie groß sind die Endgeschwindigkeit und der Beschleunigungsweg?
b) Wie groß sind die Änderung der potentiellen Energie, die Änderung der kinetischen Energie und die Änderung der Gesamtenergie?

(5.14) Die Masse $m = 4$ kg wird mit $v_0 = 5$ m/s gegen eine konstante Kraft geschossen. Dadurch wird sie gebremst und hat nach 10 Sekunden nur mehr die Geschwindigkeit $v = 3$ m/s.
a) Wie groß ist der Weg, den die Masse in diesen 10 Sekunden zurück legt?
b) Wie groß sind die Änderung der potentiellen Energie, die Änderung der kinetischen Energie und die Änderung der Gesamtenergie?

(5.15) Welche Form der Energie verwandelt sich beim freien Fall in welche Form der Energie?

(5.16) Wir lassen einen Körper von einer Höhe $h = 20$ m frei fallen. Welche Geschwindigkeit hat er am Boden? Benutzen Sie die Umwandlung von potentieller Energie in kinetische Energie!

(5.17) Wir werfen einen Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 9$ m/s vertikal nach oben. Bestimmen Sie die Wurfhöhe mit Hilfe der Umwandlung von potentieller Energie in kinetische Energie!

(5.18) Ein Körper bewegt sich reibungsfrei aus eine Höhe von 2 m herab. Welche Geschwindigkeit kann er unten maximal erreichen? Verwenden Sie den Energieerhaltungssatz!

(5.19) Die Masse $m = 8$kg wird mit $v_0 = 5$ m/s in Gegenrichtung zu einer konstanten Kraft $F = 4$ N geworfen. Wie weit kommt sie? Wie schnell ist sie nach 15 m bzw. 20 m? Verwenden Sie den Energieerhaltungssatz!

(5.20) Die Masse $m = 2$ kg wird mit der Geschwindigkeit $v = 4$ m/s gegen eine konstante Kraft $F = 10$ N geworfen. Wie weit dringt sie gegen die Kraft vor? Verwenden Sie den Energieerhaltungssatz!

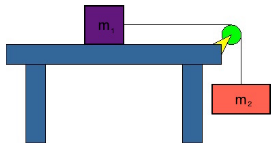
(5.21) Auf die Masse $m = 5$ kg wirkt die konstante Kraft $F = 100$ N. Sie wird dadurch aus dem Stillstand beschleunigt. Welche Geschwindigkeit hat sie nach 10 m? Verwenden Sie den Energieerhaltungssatz!

(5.22) Die Masse $m = 4$ kg wird mit der Geschwindigkeit v_0 gegen die konstante Kraff $F = 3,2$ N geworfen und legt dabei bis zum Stillstand den Weg von 10 m zurück. Berechnen Sie die Anfangsgeschwindigkeit v_0! Verwenden Sie den Energieerhaltungssatz!

(5.23) Ein Körper ($m_1 = 15$ kg) liegt auf einem Tisch (reibungsfrei) und ist mit einem zweiten Körper ($m_2 = 5$ kg) mit einem Seil verbunden. Dieser wird durch die Schwerkraft nach unten gezogen. Das System ist anfangs in Ruhe ($v_0 = 0$ m/s).

a) Formulieren Sie die Bewegungsgleichung für dieses System mit dem Energieerhaltungssatz! (Hinweis: Überlegen Sie, welche Energien sich für welchen Körper ändern!)

b) Wie schnell ist das System nach 2 Sekunden?



6 Die Leistung

Die Leistung P ist gegeben durch die Änderung der Energie ΔE_{ges} pro Zeit Δt.

$$P = \frac{\Delta E_{\text{ges}}}{\Delta t} \tag{6.1}$$

Die Leistung ist eine Information darüber, wie schnell sich eine bestimmte Form der Energie ändert. Die Änderung der Energie ΔE_{ges} kann entweder potentiell oder kinetisch oder beides sein.

Bemerkung:

Die Leistung wird oft für Systeme berechnet, die nicht abgeschlossen sind und für die $\Delta E_{\text{ges}} \neq 0$ gilt.

Einheit: $[P] = [\frac{\Delta E_{\text{ges}}}{\Delta t}] = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W}$ Watt

Alte Einheit:

Pferdestärke: 1 PS = 735,498 75 W, 1 W = 1,359 621 62 PS

Beispiel (6.1)

Ein gewöhnlicher PKW ($m = 1000$ kg) beschleunigt von $v_0 = 0$ auf $v = 40$ m/s in 10 s. Ein Sportwagen mit derselben Masse macht diese Beschleunigung in 5 s. Berechnen Sie jeweils die Leistung (in W und PS)!

Lösung

PKW und Sportwagen bekommen die kinetische Energie
$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{1000 \cdot 40^2}{2} = 800$ kJ.
Der PKW absorbiert die Energie in 10 s. Seine Leistung beträgt
$P = \frac{\Delta E_{\text{kin}}}{\Delta t} = \frac{800\,000}{10} = 80\,000$ W = 80 kW. (≈ 108 PS)
Der Sportwagen absorbiert die Energie in 5 s. Seine Leistung beträgt
$P = \frac{\Delta E_{\text{kin}}}{\Delta t} = \frac{800\,000}{5} = 160\,000$ W = 160 kW. (≈ 216 PS)

Beispiel (6.2)

Ein Kran hebt die Masse $m = 5$ kg gleichförmig in 2 s um 6 m hoch.
Berechnen Sie seine Leistung!

Lösung

Es ändert sich nur die potentielle Energie, nicht aber die kinetische Energie.
$P = \frac{\Delta E_{\text{pot}}}{\Delta t} = \frac{mg\Delta h}{\Delta t} = \frac{5 \cdot 10 \cdot 6}{2} = 150$ W

Beispiel (6.3)

Ein Kran hebt die Masse $m = 500$ kg 4 Sekunden lang hoch. Die Anfangsgeschwindigkeit ist $v_0 = 0$, die Endgeschwindigkeit ist $v = 3$ m/s. Wie groß ist die Leistung des Krans?

Lösung

Es ändern sich sowohl die potentielle als auch die kinetische Energie.
$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{mv_E^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = \frac{mv^2}{2} = \frac{500 \cdot 3^2}{2} = 2250$ J
$\Delta E_{\text{pot}} = mg\Delta h$
es gilt (gleichmäßig beschleunigte Bewegung):

$v_t = v_0 + a \cdot t \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v_t - v_0}{t} = \frac{3}{4} = 0,75\ \text{m/s}^2$
$\Delta h = s_t = v_0 \cdot t + \frac{at^2}{2} = 0 + \frac{0,75 \cdot 4^2}{2} = 6$ m
$\Rightarrow \quad \Delta E_{\text{pot}} = mg\Delta h = 500 \cdot 10 \cdot 6 = 30\,000$ J

Leistung $P = \frac{\Delta E_{\text{kin}} + \Delta E_{\text{pot}}}{\Delta t} = \frac{2250 + 30\,000}{4} = 8062,5$ W

6.1 Aufgaben

(6.1) Ein PKW ($m = 2000$ kg) beschleunigt von $v_0 = 0$ auf $v = 30$ m/s auf einem Weg von 75 m. Welche Form der Energie ändert sich dabei? Wie groß ist die Leistung?

(6.2) Ein Kran hebt in 4 s die Masse $m = 500$ kg gleichförmig um 10 m. Welche Form der Energie ändert sich dabei? Wie groß ist die Leistung?

(6.3) Ein Kran hebt die Masse $m = 500$ kg gleichförmig mit der konstanten Geschwindigkeit $v = 3$ m/s. Welche Form der Energie ändert sich dabei? Wie groß ist die Leistung?

(6.4) Ein Kran hebt in 2 s die Masse $m = 100$ kg um 10 m und beschleunigt dabei gleichmäßig. Welche Form der Energie ändert sich dabei? Wie groß ist die Leistung?

(6.5) Ein Student ($m = 75$ kg) läuft gleichförmig eine Treppe (Höhenunterschied von 3 m) hoch und braucht dafür 2 Sekunden. Welche Form der Energie ändert sich dabei? Wie groß ist die Leistung?

(6.6) Ein PKW ($m = 1000$ kg) beschleunigt auf einer schiefen Ebene (nach oben) von $v_0 = 0$ auf $v = 30$ m/s in 20 s und gewinnt dabei 5 m an Höhe. Bestimmen Sie die Leistung!

(6.7) Ein Motor einer Hebebühne zum Anheben von Autos hebt die Last von 12 kN in der Zeit von $t = 15$ s um 1,75 m nach oben. Wie groß ist seine Leistung (in kW)?

(6.8) Ein Wanderer, der mit Rucksack die Gewichtskraft von 880 N hat, überwindet einen Höhenunterschied von 1 000 m in 200 Minuten. Wie groß ist die Leistung des Wanderers?

(6.9) Ein Radfahrer (Masse zusammen mit dem Rad $m = 78$ kg) hat eine Leistung von 70 W. Er überwindet einen Höhenunterschied von 450 m. Welche Zeit braucht der Radfahrer für diesen Höhenunterschied?

(6.10) Der Motor einer Seilwinde leistet 8 kW. Welche Masse kann mit dieser Seilwinde in 1,5 Minuten um 30 m gehoben werden?

(6.11) Der Motor eines Aufzugs leistet 12 kW. Das Eigengewicht des Aufzugs beträgt 3,25 kN. Wie viele Personen (je 75 kg) kann dieser Aufzug in 15 Sekunden um 18 m in die Höhe befördern?

(6.12) Ein Löschfahrzeug der Feuerwehr pumpt mit einer Leistung von 5 kW Wasser in die Höhe von $h = 15$ m. Wie viel Liter Wasser stehen den Feuerwehrleuten in einer Sekunde, wie viel in einer Minute zur Verfügung? (1 kg Wasser entspricht 1 Liter Wasser)

(6.13) Welche Leistung in kW muss ein PKW mit einer Masse von 1790 kg mindestens haben, damit er aus dem Stillstand nach 270 m eine Geschwindigkeit von 110 km/h erreichen kann?

(6.14) Der Korb eines Grubenaufzuges ($m = 4000$ kg) wird aus dem Stillstand gleichmäßig nach oben beschleunigt und erreicht nach 10 s die Geschwindigkeit $v = 8$ m/s. Welche Energie ändert sich dabei? Wie groß ist seine Leistung?

7 Der Impuls

7.1 Allgemeines

Definition

Die kinetische Energie gibt an, wie "stark" eine Bewegung ist. Der Impuls gibt an, wie "gut" die Bewegung eines Körpers auf einen anderen übertragen wird. Bei einem Stoß sind beide Größen wichtig.

Der Impuls p eines Körpers ist gegeben durch Masse m mal Geschwindigkeit v.

$$p = m \cdot v \tag{7.1}$$

Einheit: $[p] = [m \cdot v] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s}$

Impulsänderung und Kraft

Die Änderung des Impulses ist gegeben durch:
$\Delta p = \Delta(m \cdot v) = m \cdot \Delta v = (m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}) \cdot \Delta t = m \cdot a \cdot \Delta t = F \cdot \Delta t$
Die Änderung des Impulses wird durch eine Kraft verursacht, die über eine gewisse Zeit Δt wirkt. Das Produkt $F \cdot \Delta t$ wird auch als Kraftstoß bezeichnet mit der Wirkzeit Δt.

Die Änderung des Impulses wird durch eine Kraft (einen Kraftstoß) verursacht.

$$\Delta p = F \cdot \Delta t \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta p}{\Delta t} = F \tag{7.2}$$

In einem abgeschlossenen System wird keine Energie mit der Außenwelt ausgetauscht. Es wird also auch keine Kraft von außen oder nach außen ausgeübt, also ist $F = 0$. Daher gilt: $\Delta p = 0$, die Änderung des Impulses ist Null. Der Impuls bleibt im abgeschlossenen System erhalten.

Der Satz von der Erhaltung des Gesamtimpulses

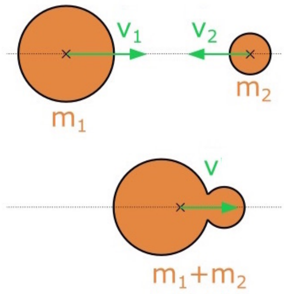
Impulserhaltungssatz:
In einem abgeschlossenen System bleibt der Gesamtimpuls erhalten: $p_{\mathrm{ges}} = \mathrm{const}$.
Die Änderung der Gesamtimpulses ist gleich Null: $\Delta p_{\mathrm{ges}} = 0$.

Bei einem Stoß bewegen sich zwei (oder mehr) Massen aufeinander zu und nach einer kurzen Wechselwirkung bewegen sie wieder auseinander. Wir können einen Gesamtimpuls vor dem Stoß angeben, $p_{\mathrm{ges}}^{\mathrm{vor}} = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 + \ldots$, und einen Gesamtimpuls nach dem Stoß, $p_{\mathrm{ges}}^{\mathrm{nach}} = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' + \ldots$. Es muß aufgrund des Impulserhaltungsatzes gelten:

$$p_{\mathrm{ges}}^{\mathrm{vor}} = p_{\mathrm{ges}}^{\mathrm{nach}} = \mathrm{const} \quad \text{oder} \quad \Delta p_{\mathrm{ges}} = p_{\mathrm{ges}}^{\mathrm{nach}} - p_{\mathrm{ges}}^{\mathrm{vor}} = 0 \tag{7.3}$$

Man unterscheidet zwei Arten von Stößen: der unelastische Stoß und der elastische Stoß.

7.2 Unelastischer Stoß



Ein zentraler unelastischer Stoß zwischen zwei Körpern ist dadurch gekennzeichnet, dass

- keine elastischen Wechselwirkungen auftreten,
- sich die Körper nach dem Stoß mit einer gemeinsamen Geschwindigkeit weiterbewegen und
- ein Teil der kinetischen Energie in andere Energieformen umgewandelt wird.

Die Körper deformieren sich nach dem Stoß so lange, bis sie sich mit einer gemeinsamen Geschwindigkeit v weiter bewegen. Es gilt der Impulserhaltungssatz und der allgemeine Energieerhaltungssatz, nicht aber der Erhaltungssatz der kinetischen Energie.
Für den Impuls gilt der Impulserhaltungssatz:

$$\begin{aligned} p_{\text{ges}}^{\text{vor}} &= p_{\text{ges}}^{\text{nach}} \\ p_1 + p_2 &= p' \\ m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 &= (m_1 + m_2) \cdot v \end{aligned} \tag{7.4}$$

Für die kinetische Energie gilt:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin,ges}}^{\text{vor}} &= E_{\text{kin,ges}}^{\text{nach}} - \Delta E_{\text{kin}} \\ E_{\text{kin,1}}^{\text{vor}} + E_{\text{kin,2}}^{\text{vor}} &= E_{\text{kin,1}}^{\text{nach}} + E_{\text{kin,2}}^{\text{nach}} - \Delta E_{\text{kin}} \\ \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} &= \frac{m_1 \cdot v^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v^2}{2} - \Delta E_{\text{kin}} \end{aligned} \tag{7.5}$$

Die kinetische Energie bleibt beim unelastischen Stoß nicht erhalten. Ein Teil davon, nämlich $\Delta E_{\text{kin}} < 0$, verwandelt sich in Deformationsenergie und Wärme und geht daher dem System verloren. Die Gesamtenergie (kinetische Energie und potentielle Energie zusammen) bleibt aber erhalten.
Aus dem Impulserhaltungssatz kann man die gemeinsame Geschwindigkeit berechnen

$$v = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \tag{7.6}$$

und aus der zweiten Gleichung kann man die Deformationsenergie $\Delta E_{\text{kin}} = E_{\text{kin,ges}}^{\text{nach}} - E_{\text{kin,ges}}^{\text{vor}}$ berechnen.

Beispiele für zentrale unelastische Stöße sind der Zusammenstoß von Autos, der Aufprall eines Steines auf den Erdboden, der Einschlag einer Kugel in einen Körper oder der Schlag eines Hammers auf einen Nagel, der in Holz eingeschlagen wird.

Beispiel (7.1)

Die Masse $m_1 = 2$ kg stößt unelastisch mit $v_1 = 5$ m/s gegen die Masse $m_2 = 3$ kg, die mit $v_2 = -8$ m/s entgegenkommt. Berechnen Sie die Geschwindigkeit beiden Massen nach dem Stoß und den Verlust an kinetischer Energie, die bei der Deformation in Wärme verwandelt wird.

Lösung

Wir beginnen mit dem Impulserhaltungssatz

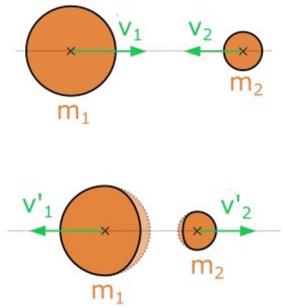
$$\begin{aligned} m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 &= (m_1 + m_2) \cdot v \\ v &= \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot (-8)}{2 + 3} = \frac{-14}{5} = -2,8 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Die beiden Körper bewegen sich nach dem Stoß in die negative Richtung weiter, weil der Impuls des zweiten Körpers größer war als der des ersten.

Der Verlust an kinetischer Energie wird berechnet durch

$$\begin{aligned} E_{\text{kin,ges}}^{\text{vor}} &= \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} = \frac{2 \cdot 5^2}{2} + \frac{3 \cdot (-8)^2}{2} = 121 \text{ J} \\ E_{\text{kin,ges}}^{\text{nach}} &= \frac{(m_1 + m_2) \cdot v^2}{2} = \frac{(2 + 3) \cdot (-2,8)^2}{2} = 19,6 \text{ J} \\ \Delta E_{\text{kin}} &= E_{\text{kin,ges}}^{\text{nach}} - E_{\text{kin,ges}}^{\text{vor}} \\ &= 19,6 - 121 = -101,4 \text{ J} \end{aligned}$$

7.3 Elastischer Stoß



Ein zentraler elastischer Stoß zwischen zwei Körpern ist dadurch gekennzeichnet, dass

- nur elastischen Wechselwirkungen auftreten,
- sich die Körper nach dem Stoß mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten weiterbewegen und
- die kinetische Energie erhalten bleibt.

Für einen solchen Stoß gilt der Impulserhaltungssatz und der Energieerhaltungssatz der Mechanik.
Zwei Körper (m_1 und m_2 mit v_1 und v_2) stoßen vollkommen elastisch zusammenn. Die beiden Körper deformieren sich nur kurzzeitig, die Deformation geht wieder zurück. Nach dem Stoß bewegen sich die beiden Massen mit neuen Geschwindigkeiten v_1' und v_2' weiter.
Für den Impuls gilt der Impulserhaltungssatz:

$$\begin{aligned} p_{\text{ges}}^{\text{vor}} &= p_{\text{ges}}^{\text{nach}} \\ p_1 + p_2 &= p_1' + p_2' \\ m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 &= m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \end{aligned} \tag{7.7}$$

Die kinetischen Energie bleibt hier auch erhalten, da es keine bleibende Deformation gibt:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin,ges}}^{\text{vor}} &= E_{\text{kin,ges}}^{\text{nach}} \\ E_{\text{kin,1}}^{\text{vor}} + E_{\text{kin,2}}^{\text{vor}} &= E_{\text{kin,1}}^{\text{nach}} + E_{\text{kin,2}}^{\text{nach}} \\ \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} &= \frac{m_1 \cdot v_1'^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2'^2}{2} \end{aligned} \tag{7.8}$$

Aus diesem beiden Gleichungen kann man die Geschwindigkeiten v_1' und v_2' nach dem Stoß berechnen.

Beispiele für zentrale elastische Stöße sind der Schlag eines Tennisschlägers gegen einen Tennisball, der Aufprall eines hochelastischen Balles auf dem Fußboden, der Stoß von zwei Billardkugeln.

Beispiel (7.2)

Zwei Bälle stoßen vollkommen elastisch aufeinander. Nach dem Stoß bewegen sich die beiden Bälle mit neuen, verschiedenen Geschwindigkeiten auseinander. Der erste Ball hat die Masse $m_1 = 1$ kg und die Geschwindigkeit $v_1 = 3$ m/s vor dem Stoß. Der zweite Ball hat $m_2 = 4$ kg und die Geschwindigkeit $v_2 = -1$ m/s vor dem Stoß. Berechnen Sie die Geschwindigkeiten der beiden Bälle nach dem Stoß!

Lösung

Wir benutzen den Impulserhaltungssatz

$$\begin{aligned} m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 &= m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \\ 1 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) &= 1 \cdot v_1' + 4 \cdot v_2' \\ -1 &= v_1' + 4 \cdot v_2' \end{aligned}$$

und den Erhaltungssatz für die kinetische Energie

$$\begin{aligned} \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} &= \frac{m_1 \cdot v_1'^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2'^2}{2} \\ \frac{1 \cdot 3^2}{2} + \frac{4 \cdot (-1)^2}{2} &= \frac{1 \cdot v_1'^2}{2} + \frac{4 \cdot v_2'^2}{2} \\ 13 &= v_1'^2 + 4 \cdot v_2'^2 \end{aligned} \tag{7.9}$$

wir setzten $v_1' = -1 - 4 \cdot v_2'$ aus der ersten Gleichung in die zweite Gleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned} 13 &= (-1 - 4 \cdot v_2')^2 + 4 \cdot v_2'^2 \\ 13 &= 1 + 8 \cdot v_2' + 16 \cdot v_2'^2 + 4 \cdot v_2'^2 \\ 0 &= 20 \cdot v_2'^2 + 8 \cdot v_2' - 12 \\ 0 &= 5 \cdot v_2'^2 + 2 \cdot v_2' - 3 \end{aligned}$$

Das ist eine quadratische Gleichung, die wir lösen können mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen

$$\begin{aligned}(v_2')_{1/2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-3)}}{2 \cdot 5} = \frac{-2 \pm 8}{10} \\ (v_2')_1 &= 0,6 \\ (v_2')_2 &= -1\end{aligned}$$

Die zugehörigen v_1' Werte sind

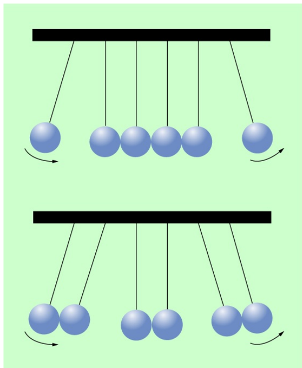
$$\begin{aligned}v_1' &= -1 - 4 \cdot v_2' \\ (v_1')_1 &= -3,4 \\ (v_1')_2 &= 3\end{aligned}$$

Es gibt hier also mathematisch zwei Lösungen, aber physikalisch sinnvoll ist nur eine Lösung, nämlich die erste, denn die zweite ist genau identisch mit den Anfangswerten der beiden Körper.

Wir haben also als Lösung

$$\begin{aligned}v_1' &= -3,4 \text{ m/s} \\ v_2' &= 0,6 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Beispiel zum elastischen Stoß

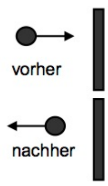


Die Abbildung zeigt ein klassisches Experiment zur Energieerhaltung und Impulserhaltung beim elastischen Stoß, das als „Newtons Wiege“ bezeichnet wird. Das entsprechende Gerät nennt man auch Kugelstoßapparat. Lässt man eine Kugel stoßen, dann fliegt auf der anderen Seite genau eine Kugel weg. Bei zwei stoßenden Kugeln sind es auf der anderen Seite genau zwei Kugeln usw.
Die Erklärung dafür ist folgende:
Die Anzahl i der Kugeln ($i = 1, 2, \ldots$) der Masse m werden ausgelenkt und stoßen mit der Geschwindigkeit v auf die verbliebenen Kugeln. Nach dem Stoß fliegen k Kugeln mit der Geschwindigkeit u nach rechts weg. Nach dem Impulserhaltungssatz und dem Energieerhaltungssatz gilt dann:

$$\begin{aligned}i \cdot m \cdot v &= k \cdot m \cdot u \\ i \cdot \frac{mv^2}{2} &= k \cdot \frac{mu^2}{2}\end{aligned}$$

Setzt man die erste Gleichung in die zweite ein, folgt $i = k$ und daraus $v = u$, also genau das, was man sieht.

7.4 Impulsänderung beim Stoß gegen eine starre Wand



Eine Wand ist ein starrer Körper, der sich nicht bewegt, $m_2 \gg m_1$ und $v_2 = 0$.

Unelastischer Stoß

Körper 1 hat die Geschwindigkeit v_1, Körper 2 hat $v_2 = 0$. Die Geschwindigkeit nach dem Stoß ist $v = 0$.
Die Impulsbilanz ist:
vor dem Stoß: $p_1 + p_{\text{wand}} = m_1 \cdot v_1 + p_{\text{wand}}$
nach dem Stoß: $p_1' + p_{\text{wand}}' = 0 + p_{\text{wand}}'$

Die gesamte Impulsänderung ist: $\Delta p_{ges} = 0 = \Delta p_1 + \Delta p_{\text{wand}} = -m_1 \cdot v_1 + \Delta p_{\text{wand}}$
Daraus ergibt sich die Impulsänderung der Wand zu: $\Delta p_{\text{wand}} = m_1 \cdot v_1$

Elastischer Stoß

Körper 1 hat die Geschwindigkeit v_1, Körper 2 hat $v_2 = 0$. Die Geschwindigkeiten nach dem Stoß sind $v_1' = -v_1$ und $v_2' = 0$.
Die Impulsbilanz ist:
vor dem Stoß: $p_1 + p_{\text{wand}} = m_1 \cdot v_1 + p_{\text{wand}}$
nach dem Stoß: $p_1' + p_{\text{wand}}' = -m_1 \cdot v_1 + p_{\text{wand}}'$

Die gesamte Impulsänderung ist: $\Delta p_{ges} = 0 = \Delta p_1 + \Delta p_{\text{wand}} = -2m_1 \cdot v_1 + \Delta p_{\text{wand}}$
Daraus ergibt sich die Impulsänderung der Wand zu: $\Delta p_{\text{wand}} = 2m_1 \cdot v_1$

> Beim Stoß gegen eine starre Wand wird folgender Impuls auf die Wand übertragen:
> beim unelastischer Stoß: $\Delta p_{\text{wand}} = m_1 \cdot v_1$
> beim elastischer Stoß: $\Delta p_{\text{wand}} = 2m_1 \cdot v_1$

7.5 Aufgaben

Unelastischer Stoß

(7.1) a) Was bedeutet unelastisch? Nennen Sie Beispiele für unelastische Stöße!
b) Welche physikalische Größe bleibt beim unelastischen Stoß erhalten? Welche Größe bleibt nicht erhalten? Was geschieht mit dieser Größe?

(7.2) Die Masse $m_1 = 4$ kg stößt unelastisch mit $v_1 = 8$ m/s gegen die Masse $m_2 = 16$ kg, die mit $v_2 = -3$ m/s entgegenkommt. Berechnen Sie die Geschwindigkeit beiden Massen nach dem Stoß und den Verlust an kinetischer Energie, die bei der Deformation in Wärme verwandelt wird.

(7.3) Die Masse $m_1 = 10$ kg bewegt sich mit $v_1 = 4$ m/s = const und stößt dabei unelastisch auf $m_2 = 5$ kg, die mit 2 m/s entgegen kommt.
a) Welche Gesetze gelten für den unelastischen Stoß? Welche physikalischen Größen bleiben erhalten? Welche nicht?
b) Mit welchen Geschwindigkeiten bewegen sich die beiden Massen nach dem Stoß?
c) Ändert sich dabei die kinetische Energie des ganzen Systems oder ändern sich nur die einzelnen kinetischen Energie der beiden Massen? Wie groß sind diese Änderungen?

(7.4) Ein Eisenbahnwagen koppelt mit der Geschwindigkeit $v = 3$ m/s an vier stehende, Eisenbahnwagen gleicher Bauart und Masse an. Mit welcher Geschwindigkeit bewegen sich die Wagen anschließend weiter, wenn die Reibung vernachlässigt werden kann?

(7.5) Eine Eisläuferin mit der Masse $m_1 = 50$ kg läuft mit der Geschwindigkeit $v_1 = 10$ m/s. Sie stößt von hinten auf eine ruhende Eisläuferin mit der Masse $m_2 = 50$ kg. Die beiden "umarmen" sich beim Zusammenstoß. Wie groß ist die Geschwindigkeit mit der sie gemeinsam weiterlaufen?
Wie nennt man diese Art von Stoß? Welche physikalische Größe ist dabei erhalten?

(7.6) Zwei vollkommen gleichartige Autos ($m_1 = m_2 = 1000$ kg) fahren mit entgegengesetzten Geschwindigkeiten ($v_1 = 30$ m/s, $v_2 = -30$ m/s) auf einander zu und stoßen vollkommen unelastisch auf einander.
a) Wie groß ist der Gesamtimpuls vor und nach dem Stoß? Wie groß sind die Geschwindigkeiten nach dem Stoß? b) Wie viel kinetische Energie verliert jedes einzelne Auto? Wozu wird sei verwendet?

(7.7) Die Masse $m_1 = 7$ kg bewegt sich mit $v_1 = 4$ m/s und stößt dabei unelastisch auf $m_2 = 3$ kg, die gleich schnell entgegen kommt.
a) Welche Gesetze gelten für den unelastischen Stoß? Welche physikalischen Größen bleiben erhalten? Welche nicht?
b) Mit welchen Geschwindigkeiten bewegen sich die beiden Massen nach dem Stoß?
c) Berechnen Sie den Verlust an kinetischer Energie! Zusatzfrage: Wie groß wäre der relative Verlust?

(7.8) Ein Auto ($m = 1000$ kg, $v = 30$ m/s) stößt vollkommen unelastisch gegen eine starre Wand.
a) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Autos nach dem Stoß?
b) Wie groß ist der Verlust an kinetischer Energie? Wozu wird diese verwendet?
c) Wie groß ist der Impuls, den die Wand bekommt?

Elastischer Stoß

(7.9) a) Was bedeutet elastisch? Nennen Sie Beispiele für elastische Stöße!
b) Welche physikalische Größe bleibt beim unelastischen Stoß erhalten?

(7.10) Zwei gleich Massen m stoßen elastisch aufeinander. Die erste Masse hat vor dem Stoß die Geschwindigkeit v, die zweite Masse ruht. Berechnen Sie die beiden Geschwindigkeiten nach dem Stoß!

(7.11) Die Masse $m_1 = 10$ kg bewegt sich mit $v_1 = 4$ m/s $=$ const und stößt dabei elastisch auf die ruhende Masse $m_2 = 5$ kg.
a) Welche Gesetze gelten für den elastischen Stoß? Welche physikalischen Größen bleiben erhalten? Welche nicht?
b) Mit welchen Geschwindigkeiten bewegen sich die beiden Massen nach dem Stoß?
c) Ändert sich dabei die kinetische Energie des ganzen Systems oder ändern sich nur die einzelnen kinetischen Energie der beiden Massen? Wie groß sind diese Änderungen?

(7.12) Die Masse $m_1 = 1$ kg stößt vollkommen elastisch mit $v_1 = 0,5$ m/s auf $m_2 = 4$ kg mit $v_2 = -2$ m/s.
a) Welche Gesetze gelten für den elastischen Stoß? Welche physikalischen Größen bleiben erhalten? Welche nicht?
b) Mit welchen Geschwindigkeiten bewegen sich die beiden Massen nach dem Stoß?
c) Ändert sich dabei die kinetische Energie des ganzen Systems oder ändern sich nur die einzelnen kinetischen Energie der beiden Massen? Wie groß sind diese Änderungen?

(7.13) Die Masse $m_1 = 2$ kg bewegt sich mit $v_1 = 4$ m/s und stößt dabei elastisch auf die ruhende Masse $m_2 = 4$ kg.
a) Welche Gesetze gelten für den elastischen Stoß? Welche physikalischen Größen bleiben erhalten? Welche nicht?
b) Mit welchen Geschwindigkeiten v_1' und v_2' bewegen sich die beiden Massen nach dem Stoß?
c) Ändert sich dabei die kinetische Energie des ganzen Systems oder ändern sich nur die einzelnen kinetischen Energie der beiden Massen? Wie groß sind diese Änderungen?

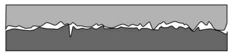
(7.14) Zwei vollkommen gleichartige Autos ($m_1 = m_2 = 1000$ kg) fahren mit entgegengesetzten Geschwindigkeiten ($v_1 = 30$ m/s, $v_2 = -30$ m/s) auf einander zu und stoßen vollkommen elastisch auf einander.
a) Wie groß ist der Gesamtimpuls vor und nach dem Stoß?
b) Wie groß sind die Geschwindigkeiten nach dem Stoß?

(7.15) Ein Auto mit Stoßstangen aus Gummi ($m = 1000$ kg, $v = 30$ m/s) stößt vollkommen elastisch gegen eine starre Wand.
a) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Autos nach dem Stoß?
b) Wie groß ist der Verlust an kinetischer Energie?
c) Wie groß ist der Impuls, den die Wand bekommt?

(7.16) Zwei Körper haben die Massen $m_1 = 0,1$ kg und $m_2 = 0,3$ kg. Sie bewegen sich reibungsfrei auf einer geraden Bahn und stoßen mit den Geschwindigkeiten $v_1 = 4$ m/s und $v_2 = -2$ m/s zusammen.
a) Berechnen Sie die Geschwindigkeiten v_1' und v_2' der beiden Körper für einen elastischen Stoß!
b) Berechnen Sie die Geschwindigkeiten v_1' und v_2' der beiden Körper für einen unelastischen Stoß!
c) Wie viel Prozent der kinetischen Energie wird im Fall b) in Wärme umgewandelt?

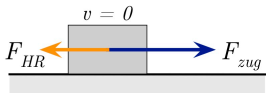
8 Reibung zwischen festen Körpern

Erfahrungsgemäß kommt jeder bewegte Körper, der nicht angetrieben wird, nach einer gewissen Zeit zur Ruhe. Da seine Geschwindigkeit abnimmt, muss eine bremsende Kraft wirken. Diese Kraft heißt Reibungskraft.
Reibungskräfte treten immer auf, wenn sich Körper berühren und gegeneinander bewegen. Ursache dafür sind die unebenen Oberflächen der Körper und Kohäsionskräfte, die zwischen den Molekülen der aneinander reibenden Körper wirken.
Bei starker Vergrößerung gleicht selbst eine geschliffene Oberfläche einem kleinen Gebirge mit vielen Zacken und Spitzen. Haften zwei Körper aneinander, so verhaken sich die Spitzen ineinander. Versucht man die Körper gegeneinander zu bewegen, so werden die Zacken verformt.



Um unerwünschte Reibungskräfte zu verringern, verwendet man Schmiermittel (Fett, Öl). Dadurch wird der Raum zwischen den sich reibenden Flächen ausgefüllt, so dass sich die Unebenheiten der Körper nicht mehr so störend auswirken.
In sehr vielen Fällen ist die Reibungskraft allerdings unbedingt notwendig. Ohne Reibungskräfte zwischen den Rädern von Fahrzeugen und der Straße wäre eine gezielte Fortbewegung unmöglich, die Räder würden durchdrehen. Um den Rädern eine gute Straßenlage zu geben, sind die Reifen aus Spezialgummi und mit Profilen versehen.
Es gibt verschiedene Arten von Reibung, welchen wir im Folgenden besprechen.

8.1 Haftreibung



Haftreibung liegt vor, wenn ein Körper auf einem anderen haftet. Dabei liegen zwei Körper aufeinander, ohne dass diese sich zueinander bewegen ($v = 0$). Wenn man versucht, den Körper mit einer sehr kleinen Kraft weg zu ziehen, gelingt es nicht. Der Körper bewegt sich nicht, er bleibt “haften” (er “haftet” z.B. auf dem Tisch). Erst ab einer bestimmten Größe der Kraft F_{zug} (Zugkraft genannt) beginnt sich der Körper zu bewegen

$$F_{\text{zug}} > F_{\text{HR}} \tag{8.1}$$

wobei die Haftreibung F_{HR} von der Beschaffenheit der Berührungsflächen so wie der Kraft, mit der die Körper aufeinander wirken abhängt. Ohne Haftreibung wäre es für Menschen unmöglich, sich auf dem Boden weiter zu bewegen.
Die Haftreibungskraft F_{HR} ist proportional zur Normalkraft F_N, die den Körper auf den Untergrund drückt

$$F_{\text{HR}} = \mu_{\text{HR}} \cdot F_N \tag{8.2}$$

Die Proportionalitätskonstante heißt Haftreibungszahl μ_{HR} und hängt vom Stoff und von der Oberflächenbeschaffenheit der Körper ab. Ist die angreifende Kraft größer als die Haftreibungskraft, so beginnt der Körper zu gleiten.

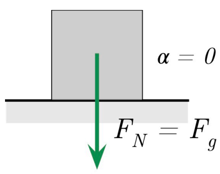
Die Haftreibung F_{HR} ist entgegengesetzt gleich der (Zug-) Kraft F_{zug}, die notwendig ist, um einen haftenden Körper in Bewegung zu setzen. Sie ist unabhängig von der Größe der Berührungsfläche aber proportional zur Normalkraft F_N und der Bewegungsrichtung entgegengesetzt.

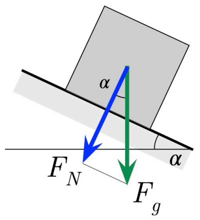
$$F_{\text{HR}} = \mu_{\text{HR}} \cdot F_N \tag{8.3}$$

Die Normalkraft

Die Größe der Normalkraft hängt davon ab, ob die Oberfläche, auf der der Körper steht, eben ist oder geneigt. Die Richtung der Normalkraft zeigt immer im rechten Winkel (normal) zur Oberfläche.

- Die Oberfläche ist waagrecht, der Neigungswinkel beträgt $\alpha = 0$:
  Wenn die Oberfläche waagrecht ist, so ist die Normalkraft gleich der Gewichtskraft.
  $$F_N = F_g = m \cdot g$$





- Die Oberfläche ist geneigt, der Neigungswinkel beträgt $\alpha \neq 0$:
  Wenn die Oberfläche geneigt ist, so ist die Normalkraft kleiner als die Gewichtskraft.
  $$F_N = F_g \cdot \cos\alpha = m \cdot g \cdot \cos\alpha$$
  Die Normalkraft steht normal auf die schiefe Ebene.

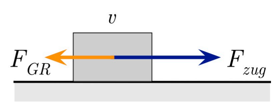
Beispiel (8.1)

Ein quaderförmiger Körper hat die Masse $m = 20$ kg und befindet sich in Ruhe auf einer Fläche mit der Haftreibungszahl von $\mu_{\text{HR}} = 0,45$. Berechnen Sie die Größe der Kraft F_{zug} (Zugkraft) ab der sich der Körper in Bewegung setzt, wenn
a) die Fläche horizontal ist!
b) die Fläche um den Winkel $\alpha = 35°$ gegen die Horizontale geneigt ist!

Lösung

Der Grenzfall für die Bewegung ist, dass die Zugkraft genau gleich groß (oder etwas größer als) die Haftreibungskraft ist
$$F_{\text{zug}} = F_{\text{HR}} = \mu_{\text{HR}} \cdot F_N$$
a) Der Neigungswinkel der Fläche ist $\alpha = 0$, die Normalkraft ist also gleich der Gewichtskraft
$$F_{\text{zug}} = F_{\text{HR}} = \mu_{\text{HR}} \cdot F_N = \mu_{\text{HR}} \cdot F_g = \mu_{\text{HR}} \cdot m \cdot g = 0,45 \cdot 20 \cdot 10 = 90 \text{ N}$$
b) Der Neigungswinkel ist $\alpha = 35°$ und damit gilt für die Kraft
$$F_{\text{zug}} = F_{\text{HR}} = \mu_{\text{HR}} \cdot F_N = \mu_{\text{HR}} \cdot F_g \cdot \cos\alpha = \mu_{\text{HR}} \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha = 0,45 \cdot 20 \cdot 10 \cdot \cos 35° = 73,7 \text{ N}$$
Es ist deutlich zu sehen, dass mit steigendem Winkel die Zugkraft (bzw. die Haftreibungskraft) kleiner wird.

8.2 Gleitreibung



Gleitreibung liegt vor, wenn zwei Körper aufeinander gleiten. Ziehen wir an dem Körper aus dem obigen Beispiel so stark, dass er sich bewegt, liegt anschließend ein Gleiten der beiden Körper vor. Die Geschwindigkeit ist somit ungleich Null ($v \neq 0$). Die Gleitreibung ist immer geringer als die Haftreibung.
Bewegen sich zwei Körper gegeneinander, so bewegen sich die rauhen Oberflächen übereinander hinweg. Im Gegensatz zur Haftreibung können sich die Oberflächen nicht völlig ineinander verhaken.
Die Gleitreibungskraft F_{GR} hängt wie auch die Haftreibungskraft von der Normalkraft F_N und der Oberflächenbeschaffenheit der Körper ab:
$$F_{\text{GR}} = \mu_{\text{GR}} \cdot F_N \tag{8.4}$$
Die Gleitreibungszahl μ_{GR} hängt von Material und Glätte der beiden Berührungsflächen ab und ist immer kleiner als die Haftreibungszahl μ_{HR}.
Die Haftreibung ist größer als die Gleitreibung: $F_{\text{HR}} > F_{\text{GR}}$, weil ein ruhender Körper viel mehr mit seiner Unterlage "verzahnt" ist als ein gleitender Körper. Um diese "Verzahnung" zu überwinden, ist eine größere Kraft nötig.

Die Gleitreibungskraft F_{GR} ist der Bewegung eines gleitenden Körpers entgegengerichtet. Um den Körper gleichförmig gleiten zu lassen, muß man ihn mit der Kraft $F_{\text{zug}} = -F_{\text{GR}}$ ziehen. Die Gleitreigungskraft hängt von der Normalkraft F_N ab.
$$F_{\text{GR}} = \mu_{\text{GR}} \cdot F_N \tag{8.5}$$

Die Reibungskraft ist unabhängig von Geschwindigkeit mit der sich der Körper bewegt und unabhängig von der Größe der Berührungsfläche. Sie hängt nur von der Normalkraft F_N ab.

Haft- und Gleitreibungszahlen einiger Stoffe

Stoffpaar	Haftreibungszahl μ_{HR}	Gleitreibungszahl μ_{GR}
Holz auf Holz	0,5 bis 0,6	0,2 bis 0,4
Stahl auf Stahl	0,15	0,06
Stahl auf Eis	0,03	0,01
Autoreifen auf Beton (trocken)	1,00	0,60
Autoreifen auf Beton (nass)	0,50	0,30
Autoreifen auf Eis	0,10	0,05

Reibungsenergie

Um einen Körper trotz Reibung zu bewegungen braucht man nicht nur Kraft, sondern auch Energie, die Reibungsenergie

$$\Delta E_{\mathrm{reibung}} = F_{\mathrm{GR}} \cdot \Delta s \tag{8.6}$$

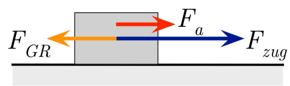
wobei Δs der zurückgelegte Weg ist. Diese Energie verwandelt sich durch die Reibung meist in Wärme und wird dem System entzogen.

Beispiel (8.2)

Ein Quader (Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 2$ m/s, $m = 15$ kg) wird mit der Kraft $F_{\mathrm{zug}} = 45$ N über eine horizontale Fläche gezogen. Dabei wird er beschleunigt, so dass er nach 3 s die Geschwindigkeit $v = 8$ m/s hat.
Bestimmen Sie die Gleitreibungskraft F_{GR} und die Gleitreibungszahl μ_{GR}! Wieviel Energie verwandelt sich in Wärme?

Lösung

Am Quader wirken folgende Kräfte: die Zugkraft F_{zug} nach vorne, die Gleitreibungskraft F_{GR} nach hinten. Da der Körper (positiv) beschleunigt wird, zeigt die resultierende Beschleunigungskraft F_a auch in Bewegungsrichtung nach vorne. Es gilt



$$F_a = F_{\mathrm{zug}} - F_{\mathrm{GR}}$$

Wir berechnen zuerst die Beschleunigung

$$v(t) = v_0 + a \cdot t$$
$$a = \frac{v(t) - v_0}{t} = \frac{8-2}{3} = 2 \text{ m/s}^2$$

und damit die Beschleunigungskraft $F_a = m \cdot a = 15 \cdot 2 = 30$ N. Damit können wir die Reibungskraft berechnen

$$F_{\mathrm{GR}} = F_{\mathrm{zug}} - F_a = 45 - 30 = 15 \text{ N}$$

und damit die Gleitreibungszahl

$$\mu_{\mathrm{GR}} = \frac{F_{\mathrm{GR}}}{F_N} = \frac{F_{\mathrm{GR}}}{m \cdot g} = \frac{15}{15 \cdot 10} = 0,1$$

Der Quader legt in dieser Zeit den folgenden Weg zurück

$$s(t) = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} = 2 \cdot 3 + \frac{2 \cdot 3^2}{2} = 15 \text{ m}$$

und damit ist die Reibungsenergie

$$\Delta E_{\mathrm{reibung}} = F_{\mathrm{GR}} \cdot s(t) = 15 \cdot 15 = 225 \text{ J}$$

Beispiel (8.3)

Ein Quader mit $m = 10$ kg gleitet horizontal mit Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 6$ m/s auf einer Fläche. Er wird durch Reibung gebremst und kommt nach 3 s zum Stillstand.
Bestimmen Sie die Gleitreibungszahl! Wieviel Energie verwandelt sich dabei in Wärme?

Lösung

Die Bewegungsrichtung des Quaders ist nach vorne. Die Reibungskraft F_{GR} wirkt hier als Bremskraft F_a. Beide Kräfte sind zur Bewegungsrichtung entgegen gesetzt gerichtet. Es gilt

$$|F_a| = |F_{\mathrm{GR}}|$$

In diesem Fall haben wir die (umgekehrte) Richtung der Beschleunigungskraft bereits verwendet. Wir können aber auch mit der ganz allgemeinen Formel des letzten Beispiels arbeiten und die Zugkraft $F_{\mathrm{zug}} = 0$ gleich Null setzen

$$F_a = F_{\mathrm{zug}} - F_{\mathrm{GR}} = -F_{\mathrm{GR}}$$

Wir berechnen die Beschleunigung

$$v(t) = v_0 + a \cdot t$$
$$a = \frac{v(t) - v_0}{t} = \frac{0 - 6}{3} = -2 \text{ m/s}^2$$

und damit die Beschleunigungskraft $F_a = m \cdot a = 15 \cdot (-2) = -30$ N (das Minus deutet darauf hin, dass die Kraft entgegen der Bewegungsrichtung ist). Damit können wir die Reibungskraft berechnen

$$F_{\mathrm{GR}} = -F_a = -(-30) = +30 \text{ N}$$

und damit die Gleitreibungszahl

$$\mu_{\mathrm{GR}} = \frac{F_{\mathrm{GR}}}{F_N} = \frac{F_{\mathrm{GR}}}{m \cdot g} = \frac{30}{10 \cdot 10} = 0,3$$

Der Quader legt in dieser Zeit den folgenden Weg zurück

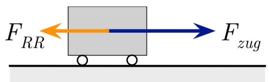
$$s(t) = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} = 6 \cdot 3 + \frac{(-2) \cdot 3^2}{2} = 9 \text{ m}$$

und damit ist die Reibungsenergie

$$\Delta E_{\mathrm{reibung}} = F_{\mathrm{GR}} \cdot s(t) = 30 \cdot 9 = 270 \text{ J}$$

8.3 Rollreibung

Rollreibung liegt vor, wenn ein Körper auf einem anderen rollt. Wenn wir den Körper aus dem obigen Beispiel auf Rollen legen und anziehen, so beginnt dieser zu rollen. Dabei ist die Rollreibung kleiner als die Haftreibung und kleiner als die Gleitreibung.



Rollt ein Körper auf dem anderen ab, so können die Unebenheiten der Oberflächen deutlich leichter überwunden werden. Die Rollreibungskraft ist bei gleicher Gewichtskraft wesentlich kleiner als die Gleitreibungskraft.
Die Rollreibung ist entgegengesetzt gleich der Kraft die notwendig ist, um ein Rad gleichförmig auf einer ebenen Fläche zu rollen. Die Rollreibung ist fast unabhängig von der Geschwindigkeit, proportional zur Normalkraft und umgekehrt proportional zum Radius.

Rollreibungszahlen einiger Stoffe

Stoffpaar	Rollreibungszahl μ_{RR}
Eisen auf Eisen	ca. 0,005
Kugeln im Kugellager	ca. 0,001

8.4 Aufgaben

(8.1) Eine 50 kg schwere Holzkiste aus Eichenholz soll auf einem Holzboden verschoben werden. Die Haftreibungszahl beträgt $\mu_{\mathrm{HR}} = 0,54$, die Gleitreibungszahl $\mu_{\mathrm{GR}} = 0,34$.
Welche Kraft ist nötig, um die Kiste aus der Ruhelage in Bewegung zu versetzen, und welche Kraft ist nötig, um die Kiste weiter gleiten zu lassen?

(8.2) Ein Quader mit $m = 23$ kg gleitet horizontal mit Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 2$ m/s auf einem Tisch. Er wird durch Reibung gebremst und kommt nach 4 s zum Stillstand.
Bestimmen Sie die Gleitreibungszahl! Wieviel Energie verwandelt sich dabei in Wärme?

(8.3) Wir ziehen einen Quader (Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 3$ m/s, $m = 5$ kg) mit der Kraft $F = 15$ N über eine horizontale Tischfläche. Dabei wird er beschleunigt, so dass er nach 2 s die Geschwindigkeit $v = 5$ m/s hat.
Bestimmen Sie F_{GR} und μ_{GR}! Wieviel Energie verwandelt sich in Wärme?

(8.4) Ein Quader mit $m = 25$ kg gleitet horizontal mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 2$ m/s auf einem Tisch. Er wird durch Reibung gebremst und kommt nach 4 Metern zum Stillstand.
Bestimmen Sie die Gleitreibungszahl μ_{GR}! Wieviel Energie verwandelt sich in Wärme?

(8.5) Ein Quader ($m_1 = 15$ kg) kann mit einem Seil auf einem horizontalen Tisch gezogen werden. Er ist durch das Seil und eine Rolle mit einem Gewicht $m_2 = 5$ kg verbunden, das durch die Schwerkraft nach unten gezogen wird.
Wie schnell ist das System nach 2 Sekunden, wenn die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 1$ m/s und die Gleitreibungszahl $\mu_{\mathrm{GR}} = \frac{2}{30}$ beträgt?

(8.6) Ein Quader ($m_1 = 15$ kg) kann mit einem Seil auf einem horizontalen Tisch gezogen werden. Er ist durch das Seil und eine Rolle mit einem Gewicht $m_2 = 5,5$ kg verbunden, das durch die Schwerkraft nach unten gezogen wird.
Wie lange braucht das System für den Weg 7 m, wenn die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 1$ m/s und die Gleitreibungszahl $\mu_{\mathrm{GR}} = \frac{1}{30}$ beträgt?

9 Einführung in das Rechnen mit Vektoren

9.1 Die Grundlagen

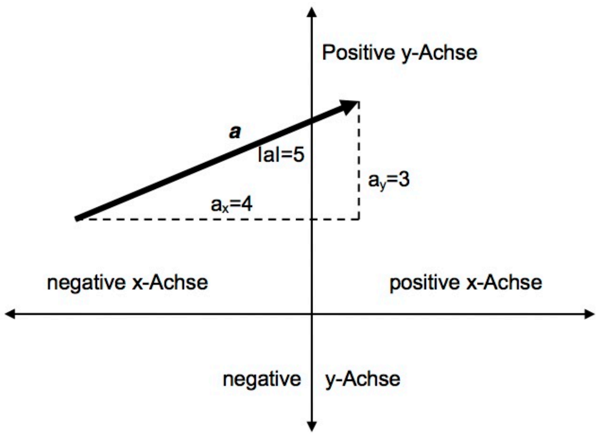
Der Vektor

Ein Vektor ist eine Zahl mit einer Richtung. Die Physikalischen Größen Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft und viele andere sind Vektoren. Eine Zahl ohne Richtung heißt Skalar, z.B. die physikalischen Größen Temperatur, Energie.
Ein Vektor kann durch einen Pfeil dargestellt werden. Der Anfang des Vektors ist frei wählbar.

Zwei Vektoren sind gleich, wenn sie gleiche Richtung und gleiche Länge haben.

Die Koordinatendarstellung eines (zweidimensionalen) Vektors

Jeder Vektor kann in einem Koordinatensystem dargestellt werden. Dazu gibt man an, um wie viele Einheiten man von einem frei gewählten Anfangspunkt nach rechts (oder links) in x-Richtung geht und wie viele Einheiten man nach oben (oder unten) in y-Richtung geht.
Es gibt verschiedene Schreibweisen für Vektoren, z.B. $\vec{a}$ oder **a**.
Wir verwenden hier die Schreibweise $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$, wobei man a_x und a_y die Komponenten des Vektors $\vec{a}$ nennt.



Beispiel (9.1)

In der Abbildung wird der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ dargestellt.

Die Bestimmung der Komponenten a_x und a_y

Die Größe a_x heißt x-Komponente des Vektors $\vec{a}$, die Größe a_y heißt y-Komponente von $\vec{a}$.
Zu ihrer Bestimmung geht man den Weg vom Anfang des Vektors zu seiner Spitze in Richtung der beiden Achsen. Wege in Richtung einer positiven Achse werden positiv gezählt, Wege in Richtung negativer Achsen werden negativ gezählt.

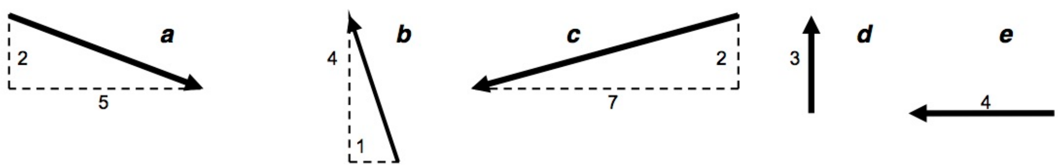
Der Betrag des Vektors

Der Betrag ist die Länge des Vektors. Man schreibt $|\vec{a}|$ oder auch nur a, wenn kein Zweifel besteht, dass damit der Betrag gemeint ist. Man berechnet den Betrag mit folgender Formel (Satz von Pythagoras):

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \tag{9.1}$$

Beispiel (9.2)

Bestimmen Sie von folgenden Vektoren die Komponenten und den Betrag!



Lösung

Die Vektoren sind:
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{e} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Beträge dieser Vektoren sind:
$|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$, $|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2} = \sqrt{17}$, $|\vec{c}| = \sqrt{(-7)^2 + (-2)^2} = \sqrt{53}$, $|\vec{d}| = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$, $|\vec{e}| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = 4$

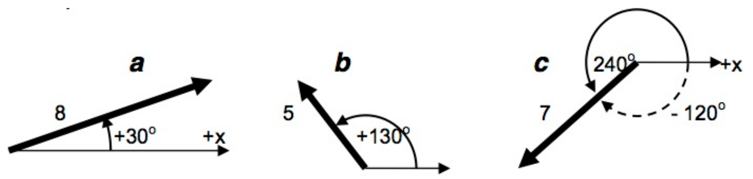
Die Polardarstellung eines Vektors

Eine andere Art der Darstellung eines Vektors ist die sogenannte Polardarstellung. Dabei wird der Vektor durch seine Länge (=Betrag) $|\vec{a}|$ und einen Winkel φ angegeben, den man von der positiven x-Achse aus mißt.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = (|\vec{a}|, \varphi) \tag{9.2}$$

Beispiel (9.3)

Bestimmen Sie von folgenden Vektoren die Polardarstellung!



Lösung

$\vec{a} = (8, 30°)$, $\vec{b} = (5, +130°)$, $\vec{c} = (7, +240°) = (7, -120°)$

Die Umrechnung zwischen den beiden Darstellungen

Man kann beide Darstellungen ineinander umrechnen.
Es gelten folgende Formeln und Zusammenhänge:

$$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi \qquad a_y = |\vec{a}| \cdot \sin\varphi \tag{9.3}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad \sin\varphi = \frac{a_y}{|\vec{a}|} \qquad \cos\varphi = \frac{a_x}{|\vec{a}|} \tag{9.4}$$

Beispiel (9.4)

Rechnen Sie die jeweils fehlende Darstellungsform aus!

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{b} = (7, 240°)$

Lösung

a) $|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$ und $\sin\varphi = \frac{-3}{5} \rightarrow \varphi = -36,87°$

$\vec{a} = (5, -36,9°) = (5, 323,1°)$

b) $b_x = 7 \cdot \cos 240° = -3,5$ $\quad b_y = 7 \cdot \sin 240° = -6,1$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} -3,5 \\ -6,1 \end{pmatrix}$

9.2 Das Rechnen mit Vektoren

Die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

Ein Vektor $\vec{a}$ kann mit einem Skalar α multipliziert werden. Dabei wird jede Komponente in der Koordinatendarstellung mit α multipliziert.

$$\alpha \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_x \\ \alpha \cdot a_y \end{pmatrix} \tag{9.5}$$

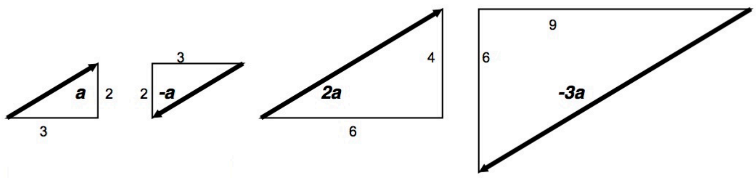
Die Multiplikation mit einem Skalar bewirkt eine Stauchung (für $|\alpha| < 1$) oder Streckung (für $|\alpha| > 1$) des Vektors. Bei $\alpha < 0$ wird die Richtung des Vektors umgekehrt.

Beispiel (9.5)

Berechnen Sie vom Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ die Vektoren $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$, $2 \cdot \vec{a}$, $(-3) \cdot \vec{a} = -3 \cdot \vec{a}$ und zeichnen Sie die Vektoren!

Lösung

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\quad (-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\quad 2 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\quad (-3) \cdot \vec{a} = -3 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \end{pmatrix}$

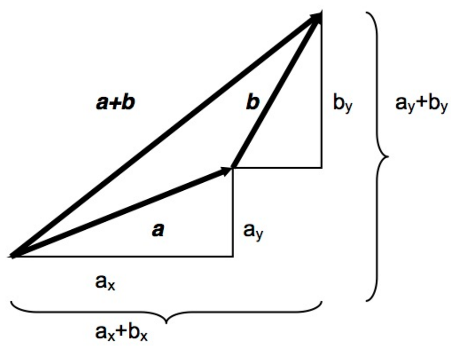


Die Addition von zwei Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden addiert, indem man ihre Komponenten paarweise addiert

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix} \tag{9.6}$$

Graphisch ergibt sich folgendes Bild:
Zeichnet man den Vektor $\vec{b}$ an die Spitze von $\vec{a}$, so zeigt der Summenvektor $\vec{a} + \vec{b}$ vom Anfang von $\vec{a}$ zur Spitze von $\vec{b}$.

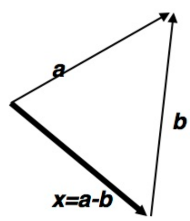


Die Differenz von zwei Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden subtrahiert, indem man ihre Komponenten paarweise subtrahiert

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \end{pmatrix} \tag{9.7}$$

Jede Subtraktion kann als Addition geschrieben werden $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1) \cdot \vec{b}$, wie man aus der Graphik erkennen kann.



Die beiden Produkte von Vektoren

Man kann zwei Vektoren auf verschiedene Art mit einander multiplizieren:

- beim skalaren Produkt entsteht ein Skalar: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ist ein Skalar
- beim Vektorprodukt (oder Kreuzprodukt) entsteht ein neuer Vektor: $\vec{a} \times \vec{b}$ ist ein neuer Vektor

Das skalare Produkt

Das skalare Produkt von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist folgendermaßen definiert

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y \tag{9.8}$$

Das Ergebnis ist eine reelle Zahl (ein Skalar).
Man kann das Skalarprodukt auch durch die Beträge der beiden Vektoren ausdrücken

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi \tag{9.9}$$

wobei φ der Winkel zwischen den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.
Wichtige Eigenschaften des skalaren Produkts:

- Es gilt das Kommutativgesetz:
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \tag{9.10}$$
- Es gilt das Distributivgesetz:
$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \tag{9.11}$$
- Es gilt:
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = |\vec{a}| \cdot b_a = a_b \cdot |\vec{b}| \tag{9.12}$$
wobei a_b die Normalprojektion des Vektors $\vec{a}$ auf den Vektor $\vec{b}$ ist und b_a die Normalprojektion des Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$.

Beispiel (9.6)

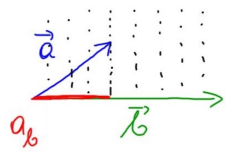
Berechnen Sie das Skalarprodukt für die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

Lösung
Wir verwenden die Formel

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} = 3 \cdot 5 + 2 \cdot (-4) = 7$$

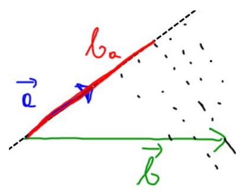
Die Normalprojektion eines Vektors

Die Normalprojektion ist eine Art Schatten eines Vektors in Richtung eines anderen Vektors.
Die Größe a_b nennt man Normalprojektion des Vektors $\vec{a}$ in Richtung von $\vec{b}$. Man erhält a_b indem man sich den Schatten vorstellt, den der Vektor $\vec{a}$ in Richtung des Vektors $\vec{b}$ wirft. Die Normalprojektion wird berechnet durch



$$a_b = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \tag{9.13}$$

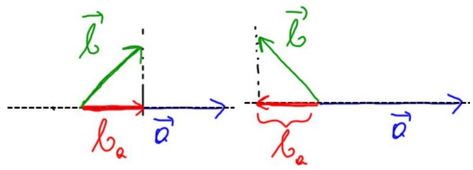
wobei φ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.
Die Größe b_a nennt man Normalprojektion des Vektors $\vec{b}$ in Richtung von $\vec{a}$. Man erhält b_a indem man sich den Schatten vorstellt, den der Vektor $\vec{b}$ in Richtung des Vektors $\vec{a}$ wirft. Die Normalprojektion wird berechnet durch



$$b_a = |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} \tag{9.14}$$

wobei φ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.

Die Normalprojektion b_a kann positiv oder negativ sein. Hat $\vec{b}$ dieselbe Richtung wie $\vec{a}$ (Winkel $\varphi < 90°$), so ist $b_a > 0$ (erste Abbildung), bei umgekehrter Richtung (Winkel $\varphi > 90°$) ist $b_a < 0$ (zweite Abbildung). Wenn $\vec{b}$ normal zu $\vec{a}$ ist, dann ist $b_a = 0$.
Die Normalprojektion ist sehr wichtig in der Physik.



Beispiel (9.7)

Bestimmen Sie die Normalprojektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ für die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Lösung

Wir verwenden $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot b_a$ und formen um zu $b_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$

$b_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{6 \cdot 1 + 2 \cdot 4}{\sqrt{6^2 + 2^2}} = 2,21$

Beispiel (9.8)

Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$!

Lösung

Wir verwenden $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ und formen um zu $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{5 \cdot 2 + (-2) \cdot 1}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{5}} = 0,664 \quad \longrightarrow \quad \varphi = 48,36°$

Das vektorielle Produkt zweier Vektoren (Kreuzprodukt)

Dieses Produkt gibt es nur für dreidimensionale (räumliche) Vektoren. Das Ergebnis dieser Multiplikation ist ein Vektor. Das Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ ist folgendermaßen definiert:

1. $\vec{a} \times \vec{b}$ ist ein Vektor, der auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ normal steht
2. Rechte-Hand-Regel:
   Hält man den Daumen der rechten Hand in die Richtung von $\vec{a}$ und den Zeigefinger in die Richtung von $\vec{b}$, so gibt der normal zu diesen beiden Fingern gestreckte Mittelfinger die Richtung von $\vec{a} \times \vec{b}$.
3. Der Betrag von $\vec{a} \times \vec{b}$ ist zahlenmäßig gleich der Fläche des Parallelogramms, das von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gebildet wird:
   $$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$$
   wobei φ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.

9.3 Die Wiederholung der Mechanik unter Benutzung von Vektoren

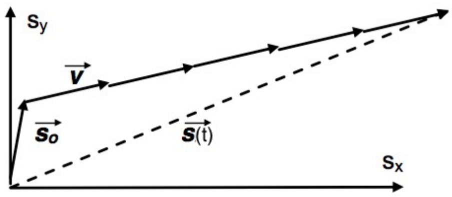
9.3.1 Die gleichförmige Bewegung

Der Weg $\vec{s}$ und die Geschwindigkeit $\vec{v}$ sind Vektoren. Die Zeit t ist ein Skalar.
Die Formeln für die gleichförmige Bewegung in Vektorform lauten:

$$\vec{v}(t) = \rightarrow const \tag{9.15}$$

$$\vec{s}(t) = \vec{s}_0 + t \cdot \vec{v} \tag{9.16}$$

Wir stellen die (2 dimensionale) Bewegung in einem (2 dimensionalen) Koordinatensystem dar, wo die Achsen die Ortskoordinaten s_x und s_y darstellen. Es ergibt sich eine Gerade als Bahnkurve.



Beispiel (9.9)

Ein Körper startet seine Bewegung an einem Punkt, der durch den Vektor $\vec{s}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ m beschrieben wird, und bewegt sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ m/s. Wo befindet sich der Körper nach 5 Sekunden?

Lösung

Wir setzen in die Formel ein und berechnen:
$\vec{s}(t) = \vec{s}_0 + \vec{v} \cdot t = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 8 \end{pmatrix}$ m

Der Körper befinet sich nach 5 Sekunden am Punkt $\vec{s} = \begin{pmatrix} 21 \\ 8 \end{pmatrix}$ m.

9.3.2 Die gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Die Beschleunigung $\vec{a}$ ist auch ein Vektor.
Die Formeln für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung lauten:

$$\vec{a}(t) = \overrightarrow{\mathrm{const}} \tag{9.17}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + t \cdot \vec{a} \tag{9.18}$$

$$\vec{s}(t) = \vec{s}_0 + t \cdot \vec{v}_0 + \frac{t^2}{2} \cdot \vec{a} \tag{9.19}$$

Wir stellen die (2 dimensionale) Bewegung in einem (2 dimensionalen) Koordinatensystem dar, wo die Achsen die Ortskoordinaten s_x und s_y darstellen. Es ergibt sich eine Parabel (gekrümmte Kurve) als Bahnkurve.

Beispiel (9.10)

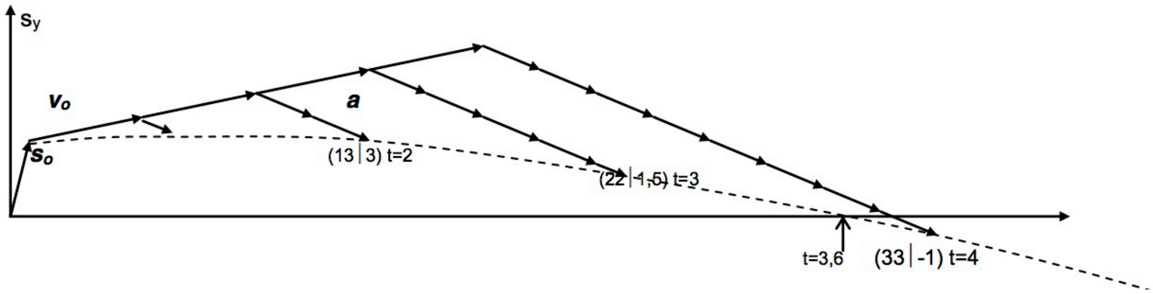
Ein Körper startet seine Bewegung an einem Punkt, der durch den Vektor $\vec{s}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ m beschrieben wird, und bewegt sich gleichmäßig beschleunigt mit der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ m/s und der Beschleunigung $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ m/s^2.

a) Wo befindet sich der Körper nach 4 Sekunden?
b) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, für den die y-Koordinate s_y des Körpers gleich Null ist!

Lösung

a) Wir setzen in die Formel ein und berechnen:
$\vec{s}(t) = \vec{s}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{t^2}{2} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4^2}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ -1 \end{pmatrix}$ m

Der Körper befinet sich nach 5 Sekunden am Punkt $\vec{s} = \begin{pmatrix} 33 \\ -1 \end{pmatrix}$ m.
b) Wir müssen diese Gleichung lösen:
$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$
das sind eigentlich 2 Gleichungen.
für die x-Komponenten gilt: $1 + t \cdot 4 + \frac{t^2}{2} \cdot 2 = x$
und für die y-Komponente gilt: $3 + t \cdot 1 + \frac{t^2}{2} \cdot (-1) = 0$
aus der zweiten Gleichung kann der Wert für t berechnet werden:
$t^2 - 2t - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad t_1 = 3,6 \quad t_2 = -1,6$ dabei ist nur die erste Lösung sinnvoll
Für die x-Koordinate ergibt sich $x = 28,4$ m.
Zum Zeitpunkt $t = 3,6$ s ist die y-Koordinate des Weges gleich Null.



9.3.3 Die Kraft als Vektor

Die Kraft $\vec{F}$ ist ein Vektor, der zur Beschleunigung $\vec{a}$ parallel ist. Die Masse m ist ein Skalar. Das zweite Axiom von Newton lautet:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \tag{9.20}$$

Wirken auf einen Körper mehrere Kräfte $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$, ...in verschiedene Richtungen, so ist in das Newton Axiom immer die Gesamtwirkung aller Kräfte, also die resultierende Kraft $\vec{F_r}$, einzusetzen, die sich aus der Vektorsumme aller Kräfte ergibt

$$\vec{F_r} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \dots \tag{9.21}$$

Beispiel (9.11)

Auf die Masse $m = 2$ kg wirken zwei Kräfte $\vec{F_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ N und $\vec{F_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ N. Die Masse startet am Nullpunkt und die Anfangsgeschwindigkeit ist Null $\vec{v_0} = \vec{0}$ m/s.
Wo befindet sich die Masse nach 10 Sekunden?

Lösung

die resultierende Kraft ist $\vec{F_r} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ N

daraus ergibt sich die Beschleunigung $\vec{a} = \frac{1}{m} \cdot \vec{F_r} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ m/s^2

einsetzen in die Wegformel: $\vec{s}(t) = \vec{s_0} + \vec{v_0} \cdot t + \frac{t^2}{2} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 10 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{10^2}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ -50 \end{pmatrix}$ m

Jede Kraft $\vec{F}$ kann in verschiedene Teilkräfte $\vec{F_a}$ und $\vec{F_b}$ zerlegt werden, sodass gilt

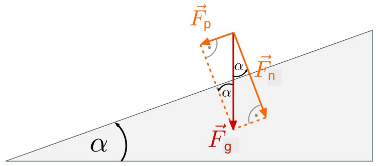
$$\vec{F} = \vec{F_a} + \vec{F_b} \tag{9.22}$$

Beispiel (9.12)

Ein Körper ($m = 8$ kg) befindet sich auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel $\alpha = 30°$.
Zerlegen Sie die Gewichtskraft des Körpers graphisch in zwei Komponenten (Teilkräfte): eine Teilkraft $\vec{F_p}$ parallel zur schiefen Ebene und eine Teilkraft $\vec{F_n}$ normal zur schiefen Ebene und bestimmen Sie die Länge der beiden Komponenten!

Lösung

Wie aus der Zeichung ersichtlich ist kann die Schwerkraft in die beiden Komponenten $\vec{F}_p$ und $\vec{F}_n$ zerlegt werden.
Die Länge der beiden Komponenten kann durch einfache trigonometrische Überlegungen bestimmt werden:
$|\vec{F}_p| = |\vec{F}_g| \cdot \sin\alpha$
$|\vec{F}_n| = |\vec{F}_g| \cdot \cos\alpha$



9.3.4 Der Impuls als Vektor

Der Impuls $\vec{p}$ ist ein Vektor, der parallel zur Geschwindigkeit $\vec{v}$ ist.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \tag{9.23}$$

Der Gesamtimpuls $\vec{p}_{\text{ges}}$ berechnet sich aus der Vektorsumme der Einzelimpulse $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, $\vec{p}_3$, ...

$$\vec{p}_{\text{ges}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots \tag{9.24}$$

Der Impulserhaltungssatz lautet dann:
In einem abgeschlossenen System bleibt der Gesamtimpuls erhalten: $\vec{p}_{\text{ges}} = \rightarrow const.$
Die Änderung der Gesamtimpulses ist gleich Null: $\Delta\vec{p}_{\text{ges}} = \vec{0}$.

Beispiel (9.13)

Die Masse $m_1 = 1$ kg mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ m/s stößt vollkommen unelastisch auf die Masse $m_2 = 4$ kg mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ m/s.
Berechnen Sie die Geschwindigkeiten der Massen nach dem Stroß (Richtung und Größe)!

Lösung

Es gilt der Impulserhaltungssatz für den unelastischen Stoß:

$$\begin{aligned}
\vec{p}_{\text{vor}} &= \vec{p}_{\text{nach}} \\
m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 &= (m_1 + m_2) \cdot \vec{v} \\
1 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} &= (1+4) \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} &= 5 \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} &= \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 1,2 \end{pmatrix} \text{ m/s}
\end{aligned}$$

Der Betrag der Geschwindigkeit ist $|\vec{v}| = \sqrt{0,4^2 + 1,2^2} = \sqrt{1,6} = 1,26$ m/s.

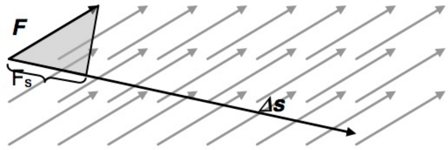
9.3.5 Energieberechnungen mit Vektoren

Die Energie E ist ein Skalar. Sie hat keine Richtung.
Es gilt für die kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} \cdot \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{m}{2} \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| = \frac{m}{2} \cdot v^2 \tag{9.25}$$

wenn $|\vec{v}| = v$.
Es gilt für die potentielle Energie

$$\Delta E_{\text{pot}} = -\vec{F} \cdot \Delta\vec{s} \tag{9.26}$$



Die Formel für die potentielle Energie gilt nicht nur für den Fall, dass $\vec{F}$ und $\Delta\vec{s}$ parallel sind (was wir bisher betrachtet haben), sondern sie gilt auch für den allgemeinen Fall, dass $\vec{F}$ und $\Delta\vec{s}$ nicht parallel sind. In diesem Fall kann man die Formel auch mit der Normalprojektion F_s der Kraft $\vec{F}$ auf den Weg $\Delta\vec{s}$ schreiben

$$\Delta E_{\text{pot}} = -\vec{F}\cdot\Delta\vec{s} = -F_s\cdot|\Delta\vec{s}| = -|\vec{F}|\cdot|\Delta\vec{s}|\cdot\cos\varphi \tag{9.27}$$

wobei φ der Winkel zwischen $\vec{F}$ und $\Delta\vec{s}$ ist.

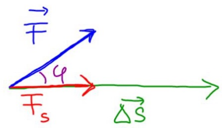
Beispiel (9.14)

Die Masse $m = 2$ kg mit der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v} = \vec{0}$ m/s wird in Richtung des Weges $\Delta\vec{s} = \begin{pmatrix}10\\-5\end{pmatrix}$ m durch die Wirkung der Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ N beschleunigt.
Wie schnell ist die Masse am Ende des Weges? Lösen Sie mit dem Energieerhaltungssatz!
(Hinweis: Es ist nur der Betrag der Geschwindigkeit gesucht!)
b) Berechnen Sie den Teil der Kraft $F_{\Delta s}$, der in Wegrichtung wirkt!

Lösung

a) Die Änderung der kinetischen Energie beträgt

$$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{m\cdot v_t^2}{2} - \frac{m\cdot v_0^2}{2} = \frac{m\cdot v_t^2}{2} = \frac{2\cdot v^2}{2} = v^2 \text{ J}$$



Die Änderung der potentiellen Energie ist

$$\Delta E_{\text{pot}} = -\vec{F}\cdot\Delta s = -\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\-5\end{pmatrix} = -(4\cdot 10 + 3\cdot(-5)) = -25 \text{ J}$$

Wir verwenden zur Lösung den Energieerhaltungssatz:

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{kin}} + \Delta E_{\text{pot}} &= 0\\ v^2 - 25 &= 0\\ v &= \sqrt{25} = 5 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit der Masse am Ende des Weges $\Delta\vec{s}$ beträgt $v = 5$ m/s.

b) Der Teil der Kraft, der in Wegrichtung wirkt, wird durch die Normalprojektion bestimmt

$$F_{\Delta s} = \frac{\vec{F}\cdot\Delta\vec{s}}{|\Delta\vec{s}|} = \frac{25}{\sqrt{10^2+5^2}} = \frac{25}{11,18} = +2,24 \text{ N}$$

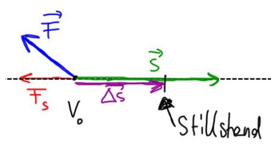
Das Plus deutet an, dass die Kraft in die Bewegungsrichtung zeigt. Die Kraft in Bewegungsrichtung ist kleiner als die Größe der gesamten Kraft $|\vec{F}| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$ N.

Beispiel (9.15)

Die Masse $m = 2$ kg wird mit $\vec{v}_0 = 1$ m/s gegen die Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ N geschossen. Da die Masse auf Schienen fährt, kann sie sich nur entlang des Weges $\vec{s} = \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ m bewegen!
a) Wie weit kommt die Masse? Lösen Sie mit dem Energieerhaltungssatz!
(Hinweis: Verwenden Sie $\Delta\vec{s} = \ell\cdot\vec{s}$ und bestimmen Sie ℓ!)
b) Berechnen Sie den Teil der Kraft $F_{\Delta s}$, der in Wegrichtung wirkt!

Lösung

a) Die Masse wird durch die Kraft $\vec{F}$ bis zum Stillstand abgebremst. Die Masse bewegt sich entlang des Weges $\vec{s}$. Wir wissen nicht genau, wo sie zum Stillstand kommen wird. Wir verwenden daher den Ansatz $\Delta\vec{s} = \ell\cdot\vec{s}$ und bestimmen den Wert von ℓ. Wir berechnen die Änderung der kinetischen Energie



$$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{m\cdot v_t^2}{2} - \frac{m\cdot v_0^2}{2} = -\frac{m\cdot v_0^2}{2} = -\frac{2\cdot 1^2}{2} = -1 \text{ J}$$

Die Änderung der potentiellen Energie ist

$$\Delta E_{\text{pot}} = -\vec{F}\cdot\Delta s = -\ell\cdot(\vec{F}\cdot\vec{s}) = -\ell\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} = -\ell\cdot(1\cdot 2+2\cdot(-3)) = -\ell\cdot(-4) = 4\cdot\ell\ \text{J}$$

Dies setzen wir jetzt in den Energieerhaltungssatz ein und bestimmen den Wert von ℓ

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{kin}} + \Delta E_{\text{pot}} &= 0\\ -1+4\cdot\ell &= 0\\ \ell &= \frac{1}{4} = 0,25\end{aligned}$$

Die Masse legt also den Weg (als Vektor) $\Delta\vec{s} = \ell\cdot\vec{s} = 0,25\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,5\\-0,75\end{pmatrix}$ m zurück, das entspricht der Strecke von $\Delta s = \sqrt{0,5^2+0,75^2} = 0,9$ m.

b) Der Teil der Kraft, der in Wegrichtung wirkt, wird durch die Normalprojektion bestimmt

$$F_{\Delta s} = \frac{\vec{F}\cdot\Delta\vec{s}}{|\Delta\vec{s}|} = \frac{-4\cdot\ell}{\Delta s} = \frac{-1}{0,9} = -1,1\ \text{N}$$

Das Minus deutet an, dass die Kraft gegen die Bewegungsrichtung zeigt.

Beispiel (9.16)

Die Masse $m_1 = 1$ kg mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ m/s stößt vollkommen unelastisch auf die Masse $m_2 = 4$ kg mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ m/s. Die Geschwindigkeit nach dem Stoß beträgt $|v| = 1,26$ m/s.

Wie viel kinetische Energie geht bei der Deformation verloren?

Lösung

Wir benötigen die Beträge der Geschwindigkeiten: $|\vec{v}_1 = \sqrt{6^2+2^2} = \sqrt{40} = 6,32$, $|\vec{v}_2 = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2} = 1,42$ kinetische Energie vor dem Stoß: $E_{\text{kin,vor}} = \frac{1}{2}\cdot 40 + \frac{4}{2}\cdot 2 = 24$ J

kinetische Energie nach dem Stoß: $E_{\text{kin,nach}} = \frac{1+4}{2}\cdot 1,6 = 4$ J

der Energieverlust beträgt $\Delta E_{\text{kin}} = 4-24 = -20$ J

der relative Verlust beträgt $\frac{\Delta E_{\text{kin}}}{E_{\text{kin,vor}}} = -\frac{20}{24} = -0,833 = -83,3\%$

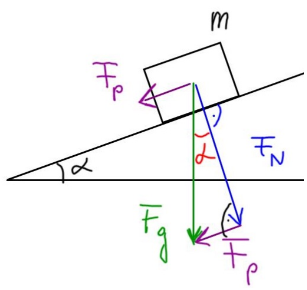
Beispiel (9.17)

Ein Quader ($m = 6$ kg, $v_0 = \vec{0}$ m/s) steht auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel $\alpha = 25°$. Die Haftreibungszahl beträgt $\mu_H = 0,3$ und die Gleitreibungszahl beträgt $\mu_G = 0,2$.

a) Entscheiden Sie durch Rechnung, ob der Quader haften bleibt oder ob er sich zu bewegen beginnt!

b) Wenn sich der Körper bewegt, wie schnell ist er nach 10 Sekunden?

Lösung



Wir können die Gewichtskraft in folgende Kräfte zerlegen:

Normalkraft (ist für die Reibung wichtig):

$$F_N = F_g\cdot\cos\alpha$$

Parallelkraft (ist für die Vorwärtsbewegung wichtig):

$$F_p = F_g\cdot\sin\alpha$$

Bei der Reibung gibt es:

Haftreibungskraft: $F_H = \mu_H\cdot F_N = \mu_H\cdot F_g\cdot\cos\alpha$

Gleitreibungskraft: $F_R = \mu_G\cdot F_N = \mu_G\cdot F_g\cdot\cos\alpha$

a) Der Körper beginnt sich zu bewegen, wenn

$$\begin{aligned}F_p &> F_H\\ F_g\cdot\sin\alpha &> \mu_H\cdot F_g\cdot\cos\alpha\\ \sin\alpha &> \mu_H\cdot\cos\alpha\\ \tan\alpha &> \mu_H\\ \tan 25° = 0,47 &> 0,3\end{aligned}$$

Der Körper beginnt zu gleiten. Ab diesem Zeitpunkt wirkt die Gleitreibung.

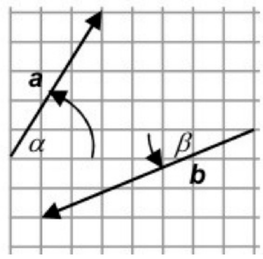
b) Die Bewegungsgleichung für den Quader lautet:

$$\begin{aligned} F_a &= F_p - F_R \\ m \cdot a &= F_g \cdot \sin\alpha - \mu_G \cdot F_g \cdot \cos\alpha \\ a &= g \cdot (\sin\alpha - \mu_G \cdot \cos\alpha) \\ a &= 10 \cdot (\sin 25° - 0,2 \cdot \cos 25°) = 4,2 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit nach 10 Sekunden ist:
$v(t = 10) = v_0 + a \cdot t = 0 + 4,2 \cdot 10 = 42$ m/s

9.4 Aufgaben

(9.1) In der Abbildung sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gegeben.
a) Bestimmen Sie durch Rechnung (Koordinatenschreibweise) und Zeichnung folgende Vektoren: $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} - 3 \cdot \vec{b}$!
b) Bestimmen Sie die Beträge von $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} - 3 \cdot \vec{b}$!
c) Berechnen Sie die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in Polardarstellung!
d) Berechnen Sie die Normalprojektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$!
e) Berechnen Sie das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$!



(9.2) Ein Körper $m = 2$ kg hat die Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ m/s und wird durch die Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} 2 \\ -0,8 \end{pmatrix}$ N beschleunigt. Der Anfangsweg ist $\vec{s}_0 = \vec{0}$ m.
a) Bestimmen Sie die Position nach 8 Sekunden!
b) Zu welchem Zeitpunkt ist $s_y = 0$?

(9.3) Die Masse $m = 2$kg hat die Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ m/s und wird durch die Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ N beschleunigt.
a) Wie weit kommt die Masse in 3 Sekunden?
b) Wie schnell ist die Masse nach 3 Sekunden?

(9.4) Die Masse $m = 2$ kg mit der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0 = \vec{0}$ m/s wird in Richtung des Weges $\Delta\vec{s} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ m durch die Wirkung der Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ N beschleunigt.
Wie schnell ist die Masse am Ende des Weges?

(9.5) Ein Segelboot (Gesamtmasse $m = 200$ kg, $v_0 = 1$ m/s) gleitet reibungsfrei in Richtung des Weges $\Delta\vec{s} = \begin{pmatrix} 24 \\ -10 \end{pmatrix}$. Die Wirkung des Windes auf das Seegelboot ist aber durch die Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2,3 \end{pmatrix}$ N gegeben.
a) Wie groß ist die Kraft, die in Wegrichtung wirkt? Wie groß ist die Beschleunigung?
b) Wie schnell ist das Boot am Ende des Weges?

(9.6) Die Masse $m = 2$ kg wird in einem konstanten Kraftfeld $\vec{F} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ N mit der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ m/s abgeschossen. Sie kann sich nur in horizontaler Richtung bewegen.
Wie weit kommt die Masse?

(9.7) Die Masse $m = 2$ kg wird mit $\vec{v}_0 = 1$ m/s gegen die Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} -1,3 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ N geschossen. Da die Masse auf Schienen fährt, kann sie sich nur entlang des Weges $\Delta\vec{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ m bewegen!

a) Wie weit kommt die Masse? (Lösen Sie mit dem Energieerhaltungssatz!)
b) Wie groß ist der Teil der Kraft F_s, der in Wegrichtung wirkt?

(9.8) Ein Auto ($m_1 = 1000$ kg, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \end{pmatrix}$ m/s) stößt völlig unelastisch auf ein Motorrad ($m_2 = 250$ kg, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \end{pmatrix}$ m/s).
a) In welche Richtung und wie schnell bewegen sich beide nach dem Stoß?
b) Wieviel Energie geht bei der Deformation verloren?

(9.9) Zwei Massen ($m_1 = 4$ kg, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $m_2 = 6$ kg, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$) stoßen vollkommen unelastisch auf einander.
a) Berechnen Sie Richtung und Betrag der Geschwindigkeit nach dem Stoß!
b) Wie groß ist der relative Verlust an kinetischer Energie?

(9.10) Ein Auto ($m_1 = 1000$ kg, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$ m/s) stößt völlig unelastisch auf ein Motorrad ($m_2 = 250$ kg, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix}$ m/s). Nach dem Stoss hat der gemeinsame Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ den Winkel $\alpha = 45°$ mit der positiven x-Achse. Der Motorradfahrer sagt, er sei nicht schneller als 50 km/h gefahren.
Sagt er die Wahrheit?

(9.11) Ein Quader ($m = 8$ kg, $\vec{v}_0 = \vec{0}$ m/s) gleitet reibungsfrei auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel $\alpha = 30°$, die Länge seines Weges bis zum Boden beträgt 20 m.
a) Bestimmen Sie die Höhe des Quaders über dem Boden!
b) Zerlegen Sie die Gewichtskraft des Quaders graphisch in zwei Komponenten parallel und normal zur schiefen Ebene! Berechnen Sie die Beträge dieser Komponenten!
c) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Quaders am Boden?

(9.12) Ein Quader ($m = 4$ kg, $v_0 = \vec{0}$ m/s) gleitet reibungsfrei auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel $\alpha = 20°$ abwärts.
a) Zerlegen Sie die Schwerkraft graphisch in zwei Komponenten parallel und normal zur Ebene!
b) Berechnen Sie die Beträge dieser Komponenten! Wie groß ist die Beschleunigung in Bewegungsrichtung?
c) Wie schnell ist der Körper nach 10 Sekunden?

(9.13) Ein Quader ($m = 4$ kg, $v_0 = \vec{0}$ m/s) steht auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel $\alpha = 20°$. Die Haftreibungszahl beträgt $\mu_H = 0,4$.
Entscheiden Sie durch Rechnung, ob sich der Quader "von selbst" in Bewegung setzt!

(9.14) Ein Quader ($m = 4$ kg, $v_0 = \vec{0}$ m/s) steht auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel $\alpha = 20°$. Die Haftreibungszahl beträgt $\mu_H = 0,3$ und die Gleitreibungszahl beträgt $\mu_G = 0,2$.
Wie schnell ist der Körper nach 10 Sekunden?

(9.15) Ein Quader wird auf eine schiefen Ebene mit Neigungswinkel $\alpha = 20°$ gestellt. Die Haftreibungszahl beträgt $\mu_H = 0,4$.
a) Überprüfen Sie durch Rechnung, ob der Körper haften bleibt oder ob er sich zu bewegen beginnt!
b) Wie klein müsste die Haftreibungszahl sein, damit der Körper zu gleiten beginnt?

(9.16) Ein Quader haftet auf einer schiefen Ebene mit variablem Neigungswinkel ε. Die Haftreibungszahl beträgt $\mu_H = 0,2$.
a) Zerlegen Sie die Schwerkraft graphisch in zwei Komponenten parallel und normal zur Ebene!
b) Stellen Sie die Beträge dieser Komponenten mit Hilfe der Winkelfunktionen dar!
c) Ab welchem Neigungswinkel setzt sich der Quader in Bewegung?

(9.17) Ein Quader $m = 8$ kg gleitet auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel $\alpha = 10°$, die Länge seines Weges bis zum Boden beträgt 20 m. Die Gleitreibungszahl $\mu_G = 0,04$ und die Anfangsgeschwindigkeit beträgt 1 m/s.
a) Bestimmen Sie die Höhe des Quaders über dem Boden!

b) Bestimmen Sie die Normalkraft des Quaders auf die schiefe Ebene!
c) Bestimmen Sie die Reibungskraft!
d) Wieviel Energie verliert der Körper auf seinem Weg zum Boden durch Reibung?
e) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Quaders am Boden?

(9.18) Ein Quader $m = 8$ kg gleitet auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel $\alpha = 10°$, die Länge seines Weges bis zum Boden beträgt 20 m. Die Gleitreibungszahl $\mu_G = 0,2$ und die Anfangsgeschwindigkeit beträgt 1 m/s.
a) Bestimmen Sie die Reibungskraft!
b) Wieviel Energie verliert der Körper auf seinem Weg zum Boden durch Reibung?
c) Erreicht der Körper den Boden oder wird er langsamer und kommt vorher zum Stillstand?

(9.19) Ein Quader mit der Masse $m = 20$ kg befindet sich auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel $\alpha = 30°$. Die Haftreibungszahl beträgt $\mu_H = 0,7$, die Gleitreibungszahl beträgt $\mu_G = 0,6$.
a) Zerlegen Sie die Schwerkraft in zwei Komponenten parallel und normal zur Ebene! (Zeichnung und Rechnung!)
b) Haftet der Körper?
c) Was geschieht, wenn man dem Körper durch einen kleinen Stoß eine Anfangsgeschwindigkeit 2m/s erteilt? Wird er gebremst oder beschleunigt?
d) Was geschieht, wenn man dem Körper durch einen kleinen Stoß eine Anfangsgeschwindigkeit 3m/s erteilt?